

Θεωρία εξαναγκασμένης ταλάντωσης

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε ένα σώμα μάζας m είναι δεμένο σε ένα οριζόντιο ελατήριο σταθεράς k . Ονομάζουμε ιδιοσυχνότητα την συχνότητα της ταλάντωσης που θα έκανε το σώμα αν δεν ενεργούσε καμία άλλη δύναμη εκτός της δύναμης του ελατηρίου. Δηλαδή

$$f_0 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ και γωνιακή ιδιοσυχνότητα } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Αν υπάρχουν δυνάμεις τριβής $F_{\text{αντ}} = -bv$ τότε η ταλάντωση είναι φθίνουσα και μετά από κάποιο χρονικό διάστημα το σώμα θα σταματήσει. Αν θέλουμε το σώμα να κάνει αμείωτη ταλάντωση θα πρέπει να του δίνουμε ενέργεια που να αναπληρώνει την ενέργεια που μετατρέπεται σε θερμική λόγω τριβών. Ένας τρόπος για να δίνεται στο σώμα ενέργεια και να εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση είναι να ενεργεί στο σώμα μια περιοδική δύναμη της μορφής:

$$F = F_0 \eta \mu \omega t$$

Η δύναμη αυτή ονομάζεται διεγείρουσα δύναμη και το σώμα που ασκεί την δύναμη διεγέρτης. Όπου ω η γωνιακή συχνότητα του διεγέρτη. Η κίνηση του σώματος τελικά θα είναι μια απλή αρμονική ταλάντωση με γωνιακή συχνότητα ίση με αυτήν του διεγέρτη.

$$x = A \eta \mu(\omega t + \theta) \quad (1)$$

με πλάτος ταλάντωσης

$$A = \frac{F_0}{\sqrt{(k - m\omega^2)^2 + b^2\omega^2}}$$

Δηλαδή το σώμα θα αναγκαστεί να εκτελέσει ταλάντωση με συχνότητα που του επιβάλλεται από το διεγέρτη και όχι με τη δική του ιδιοσυχνότητα και με πλάτος που εξαρτάται και από την συχνότητα του διεγέρτη αλλά και από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Όταν το πλάτος της ταλάντωσης γίνεται μέγιστο, τότε λέμε ότι έχουμε συντονισμό του πλάτους της ταλάντωσης ή απλά συντονισμό. Η συχνότητα για την οποία μεγιστοποιείται το πλάτος της ταλάντωσης είναι λίγο μικρότερη από την ιδιοσυχνότητα του συστήματος. (όταν $f = f_0$ τότε μεγιστοποιείται το πλάτος της ταχύτητας).

$$\text{Συντονισμός} \Leftrightarrow A = A_{\text{max}}, f \simeq f_0 \quad (2)$$

Όσο μεγαλώνει η σταθερά απόσβεσης b τόσο μεγαλώνει και η διαφορά μεταξύ της συχνότητας που έχουμε μέγιστο πλάτος $f_{\text{συντονισμού}}$ και της ιδιοσυχνότητας f_0 . Επειδή η διαφορά των δύο συχνοτήτων είναι μικρή για μικρές τιμές της σταθεράς απόσβεσης, δεν θα γίνεται διάκριση μεταξύ των δύο εκτός και αναφέρεται ρητά. Δηλαδή συντονισμό θα θεωρούμε ότι συμβαίνει όταν η ιδιοσυχνότητα του διεγέρτη γίνει ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος.

Για πολύ μικρές τιμές της f το σώμα και ο διεγέρτης ταλαντώνονται σε φάση με πολύ μικρές ταχύτητες (έτσι επίσης η τριβή είναι πολύ μικρή) στην ουσία του ελατηρίου δεν είναι παραμορφωμένο. Το άκρο (στο οποίο ενεργεί ο διεγέρτης) και το σώμα ταλαντώνονται περίπου όπως θα ταλαντωνόταν αν ανάμεσά τους υπήρχε μια άκαμπτη ράβδος. Έτσι το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι $A = \frac{F_0}{K}$

Για μεγάλες τιμές της f το σώμα και ο διεγέρτης ταλαντώνονται με αντίθεση φάσης, έτσι η μία μετατόπιση σχεδόν αναιρεί την άλλη οπότε το σώμα ταλαντώνεται με πολύ μικρό πλάτος.

Παρατήρηση

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση το σώμα θα καταλήξει να κάνει απλή αρμονική ταλάντωση όμως η σταθερά ταλάντωσης D και η σταθερά του ελατηρίου k γενικά δεν ταυτίζονται και αυτό γιατί $k=m\omega_0^2$ ενώ $D=m\omega^2$ ταυτίζονται μόνο στην περίπτωση του συντονισμού.

Άμεση συνέπεια των παραπάνω είναι η μηχανική ενέργεια του συστήματος ελατήριο-σώμα $E_{μηχ} = \frac{1}{2} kx^2 + \frac{1}{2} m\dot{u}^2$ και η ενέργεια ταλάντωσης $E_T = \frac{1}{2} Dx^2 + \frac{1}{2} m\dot{u}^2$ να είναι διαφορετικές και να ταυτίζονται μόνο στον συντονισμό. Η ενέργεια ταλάντωσης παραμένει σταθερή κατά την διάρκεια ταλάντωσης ενώ η μηχανική ενέργεια μεταβάλλεται γιατί στιγμιαία η ενέργεια που προσφέρει ο διεγέρτης δεν είναι ίση με τον ρυθμό απώλειας ενέργειας λόγω τριβών.

Στην εξαναγκασμένη ταλάντωση ισχύει:

$$F_{\text{διεγέρτη}} + F_{\text{αντ}} - kx = m\ddot{x}$$

$$F_{\text{διεγέρτη}} + F_{\text{αντ}} - (m\omega_0^2)x = m(-\omega^2 x)$$

$$F_{\text{διεγέρτη}} + F_{\text{αντ}} = m\omega_0^2 x - m\omega^2 x$$

Στον συντονισμό επειδή η συχνότητα του διεγέρτη είναι ίση με την ιδιοσυχνότητα του συστήματος έχουμε:

$$F_{\text{διεγέρτη}} + F_{\text{αντ}} = 0 \rightarrow F_{\text{διεγέρτη}} - b\dot{u} = 0 \rightarrow F_{\text{διεγέρτη}} = b\dot{u}$$

$$\text{Η Ισχύς του διεγέρτη θα είναι: } P = F_{\text{διεγέρτη}} \dot{u} \rightarrow P = b\dot{u}^2$$

Από την τελευταία εξίσωση προκύπτει πως κατά τον συντονισμό ο διεγέρτης πάντα προσφέρει ενέργεια στο σύστημα (ισχύς θετική) δηλαδή ο τρόπος που προσφέρεται η ενέργεια είναι ο βέλτιστος, ενώ σε οποιαδήποτε άλλη περίπτωση υπάρχουν στιγμές που ο διεγέρτης έχει αντίθετη φορά με την ταχύτητα και αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα.