

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

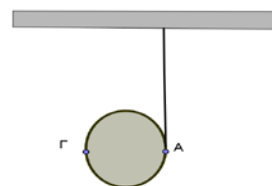
ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Το γιο-γιο του σχήματος έχει ακτίνα R και αρχικά είναι ακίνητο. Την $t=0$ αφήνουμε ελεύθερο τον δίσκο οποίος αρχίζει να κατεβαίνει και ταυτόχρονα περιστρέφεται.

α) Να δειχτεί ότι κατά την κάθοδο του δίσκου ισχύουν οι σχέσεις $v_{cm} = \omega \cdot R$ και $\alpha_{cm} = a_{\gamma} \cdot R$.



β) αν κάποια στιγμή το κέντρο μάζας του δίσκου έχει ταχύτητα v_{cm} το σημείο Γ έχει ταχύτητα.

1) $v_{\Gamma} = v_{cm}$.

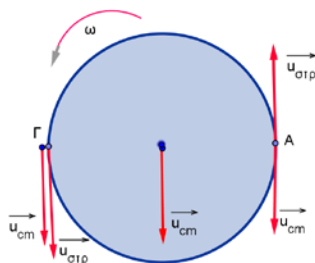
2) $v_{\Gamma} = 2v_{cm}$.

3) $v_{\Gamma} = 0$.

Ποιο από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η 2.



α) Το σημείο A (που είναι το σημείο επαφής του νήματος με την τροχαλία) έχει ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του νήματος επειδή το νήμα δεν γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας. Το νήμα όμως επειδή είναι δεμένο στο ταβάνι έχει ταχύτητα μηδέν άρα και το σημείο A έχει και αυτό ταχύτητα μηδέν.

Από την αρχή της επαλληλίας για την ταχύτητα του σημείου Α έχουμε

$$v_A = v_{cm} - v_{στρ} \Rightarrow 0 = v_{cm} - v_{στρ} \Rightarrow v_{cm} = v_{στρ} \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R$$

Παίρνουμε τον ρυθμό μεταβολής της παραπάνω σχέσης και έχουμε

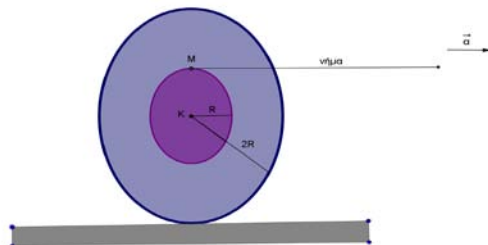
$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow \alpha_{cm} = R \cdot a_\gamma$$

β) Για την ταχύτητα του σημείου Γ έχουμε (από αρχή επαλληλίας)

$$v_\Gamma = v_{cm} + v_{στρ} \Rightarrow v_\Gamma = v_{cm} + \omega \cdot R \Rightarrow v_\Gamma = 2v_{cm}$$

Ερώτηση 2.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται ένα στερεό που αποτελείται από δυο ομοαξονικούς δίσκους με ακτίνες R και $2R$. Τραβάμε με το χέρι μας το νήμα ώστε το στερεό να κυλίεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα χωρίς να ολισθαίνει.



Η απόσταση x που έχει διανύσει το κέντρο μάζας του στερεού όταν έχει ξετυλιχθεί σχοινί μήκους ℓ είναι:

α) $x = \ell$.

β) $x = 2\ell$.

γ) $x = \frac{3}{2}\ell$.

δ) $x = \frac{2}{3}\ell$.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Το στερεό εκτελεί 2 κινήσεις. Μια μεταφορική και μια στροφική η επαλληλία των οποίων μας δίνει την σύνθετη κίνηση. Θα εφαρμόσουμε την αρχή της επαλληλίας για τις κινήσεις του σημείου M . Το σημείο M είναι το σημείο επαφής του τροχού με το νήμα.

Από την αρχή επαλληλίας για την ταχύτητα του M έχουμε:

$$v_M = v_{\text{στροφ}} + v_{\text{cm}} \Rightarrow$$

$$v_M = \omega \cdot R + \omega \cdot 2R \Rightarrow$$

$$v_M = 3\omega \cdot R$$

Επειδή ισχύει η σχέση $v_{\text{cm}} = \omega \cdot 2R$ θα έχουμε (το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει):

$$v_M = \frac{3}{2}v_{\text{cm}}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στιγμή η ταχύτητα του M άρα και του νήματος είναι 1,5 φορά μεγαλύτερη από την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Επομένως το άκρο του

νήματος θα διαγράφει απόσταση κατά 1,5 φορά μεγαλύτερη από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου. Επομένως το άκρο του νήματος θα διαγράφει απόσταση κατά 1,5 φορά μεγαλύτερη από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου.

$$d = 1,5x$$

Όμως, η μετατόπιση του άκρου του νήματος είναι το άθροισμα της μετατόπισης του κέντρου μάζας (x) και του μήκους του σχοινιού που έχει ξετυλιχθεί (ℓ):

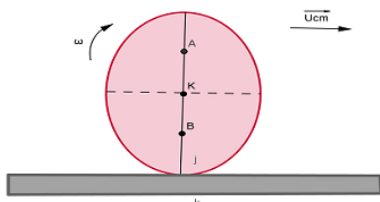
$$d = x + \ell$$

Οπότε:

$$1,5x = x + \ell \Rightarrow 0,5x = \ell \Rightarrow x = 2\ell$$

Ερώτηση 3.

Ο δίσκος του σχήματος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση σε οριζόντιο δρόμο. Τα σημεία A και B ανήκουν στην κατακόρυφη διάμετρο και απέχουν από το κέντρο του δίσκου αποστάσεις $AK = KB = \frac{R}{2}$.



Ο λόγος των ταχυτήτων $\frac{v_A}{v_B}$ είναι

α) $\frac{v_A}{v_B} = 1$.

β) $\frac{v_A}{v_B} = 2$.

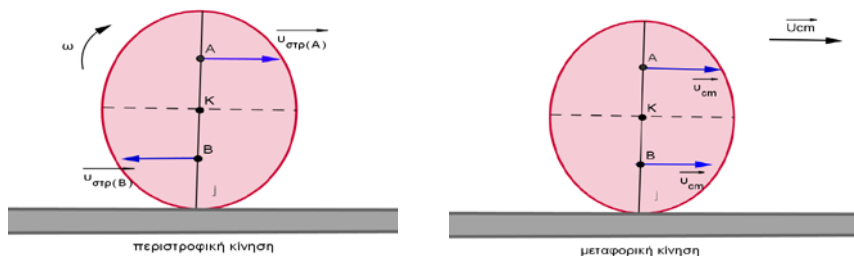
γ) $\frac{v_A}{v_B} = 3$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Στα παρακάτω σχήματα φαίνονται οι ταχύτητες των σημείων A και B στην περιστροφική και στην μεταφορική κίνηση.



Επειδή ο δίσκος κάνει κύλιση χωρίς ολίσθηση ισχύει η σχέση $v_{cm} = \omega \cdot R$

Από την αρχή επαλληλίας για την ταχύτητα του A έχουμε:

$$v_A = v_{cm} + v_{στρ} \Rightarrow v_A = v_{cm} + \omega \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow v_A = v_{cm} + \frac{v_{cm}}{2} \Rightarrow v_A = \frac{3}{2} v_{cm}$$

Ομοίως για την ταχύτητα του B έχουμε.

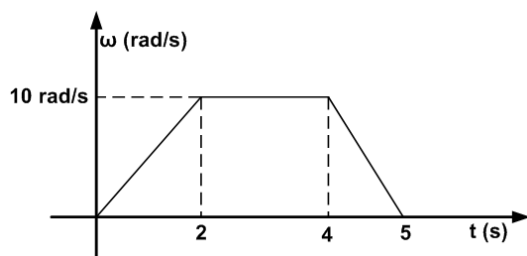
$$v_B = v_{cm} - v_{\sigma\tau\rho} \Rightarrow v_B = v_{cm} - \omega \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow v_B = v_{cm} - \frac{v_{cm}}{2} \Rightarrow v_B = \frac{1}{2} v_{cm}$$

Διαιρώντας κατά μέλη παίρνουμε ότι $\frac{v_A}{v_B} = 3$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Στο σχήμα φαίνεται πως μεταβάλλεται η γωνιακή ταχύτητα ενός δίσκου που εκτελεί μόνο στροφική κίνηση γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής. Δίνεται ακτίνα δίσκου $r = 0,5\text{m}$.



- α) Να βρεθούν οι γωνιακές επιταχύνσεις που έχει το κινητό σε κάθε κίνηση.
β) Να γίνει το διάγραμμα επιτάχυνσης-χρόνου για όλη την κίνηση.
γ) Να βρεθεί η συνολική γωνία που έχει διαγράψει ο δίσκος.
δ) Ένα σημείο Α απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση $r=0,2\text{ m}$. Να βρεθεί η γραμμική ταχύτητα του Α τη χρονική στιγμή $t = 1\text{s}$ καθώς και τη χρονική στιγμή $t = 4,5\text{s}$.

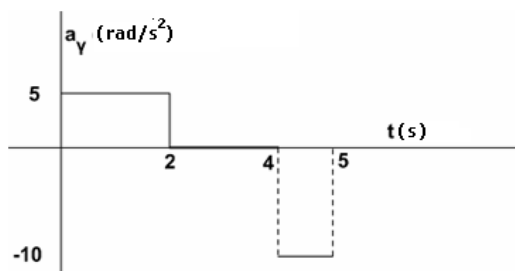
Λύση

α) Από τη σχέση $a_\gamma = \frac{d\omega}{dt}$ βρίσκουμε τη γωνιακή επιτάχυνση υπολογίζοντας τη κλίση της καμπύλης στο διάγραμμα ω - t :

- για το χρονικό διάστημα από 0-2s: $a_\gamma = \frac{d\omega}{dt} = \frac{10-0\text{ rad}}{2-0\text{ s}} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$
- για το χρονικό διάστημα από 2-4s: $a_\gamma = \frac{10-10\text{ rad}}{4-2\text{ s}} = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$
- για το χρονικό διάστημα από 4-5s: $a_\gamma = \frac{0-10\text{ rad}}{5-4\text{ s}} = -10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$

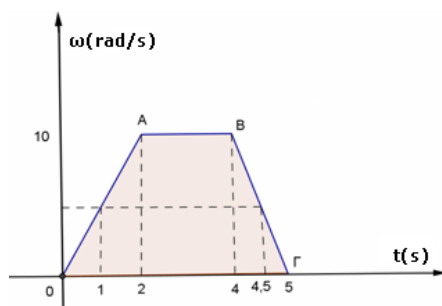
β) το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται παρακάτω

(στις επιμέρους κινήσεις η γωνιακή επιτάχυνση a_γ είναι σταθερή)



γ) Η συνολική γωνία που έχει διαγράψει ο δίσκος θα δίνεται από το εμβαδόν της περιοχής (ΟΑΒΓΟ). Επομένως θα πρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδόν του τραπεζίου για το οποίο εύκολα βρίσκουμε ότι:

$$\theta = \frac{1}{2}(5+2)10 \text{ rad} , \text{ οπότε } \theta = 35 \text{ rad}$$



δ) Η ταχύτητα του Α (στροφική) δίνεται από την σχέση $v = \omega \cdot r$ άρα πρέπει να βρούμε την γωνιακή ταχύτητα ω του δίσκου τις δυο χρονικές στιγμές:

Τη χρονική στιγμή $t = 1\text{s}$ έχουμε $a_\gamma = 5 \text{ rad/s}^2$. Άρα $\omega = a_\gamma \cdot t = 5 \text{ rad/s}$

$$\text{Έτσι } v = \omega \cdot r = 1 \text{ m/s}$$

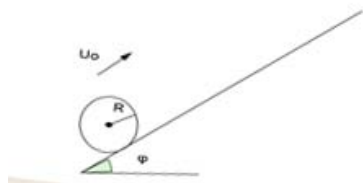
Τη χρονική στιγμή $t = 4,5\text{s}$ έχουμε $a_\gamma = 10 \text{ rad/s}^2$.

$$a_\gamma = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow -10 = \frac{\omega - 10}{4,5 - 4} \Rightarrow \omega = 5 \text{ rad/s}$$

$$\text{Έτσι } v = \omega \cdot r = 1 \text{ m/s}$$

Άσκηση 2.

Από τη βάση ενός κεκλιμένου επιπέδου κλίσης $\varphi = \frac{\pi}{6}$ εκτοξεύεται προς τα πάνω τροχός ακτίνας $R = 0,2\text{m}$ με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10\text{ m/s}$.



Ο τροχός φτάνει στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου που βρίσκεται σε ύψος h από το έδαφος, σταματά στιγμιαία και μετά αρχίζει να κατεβαίνει το κεκλιμένο επίπεδο.

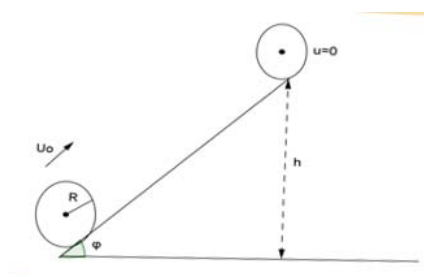
Θεωρούμε ότι η επιβράδυνση του τροχού κατά την άνοδο είναι ίση κατά μέτρο με την επιτάχυνση που απέκτησε ο τροχός κατά την κάθοδό του και ισχύει:

$$|\alpha_{\text{cm}}(\text{άνοδου})| = \alpha_{\text{cm}}(\text{καθόδου}) = 2\text{m/s}^2. \text{ Να βρεθούν:}$$

- α) Ο χρόνος ανόδου.
- β) Το μέγιστο ύψος h από το έδαφος που φτάνει ο τροχός.
- γ) Τη γωνία που θα διαγράψει μια ακτίνα R του τροχού κατά την κάθοδό του.
- δ) Το διάγραμμα του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας σε συνάρτηση με τον χρόνο $(\omega - t)$, για όλη την κίνηση.

Λύση

α) Κατά την άνοδο ισχύουν:



$$s = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2 \quad (1)$$

$$v_1 = v_0 - \alpha_{\text{cm}} t \quad (2)$$

Στην εξίσωση (2) για $u=0$ (γιατί ο τροχός στο υψηλότερο σημείο σταματά στιγμιαία) έχουμε:

$$0 = v_0 - \alpha_{cm} t \Rightarrow \alpha_{cm} t = v_0 \Rightarrow$$

$$t = \frac{v_0}{\alpha_{cm}} = \frac{10}{2} s = 5s.$$

$$\beta) (1) \Rightarrow s = (10 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2) m = 25m$$

$$\text{Αλλά } h = s \cdot \eta_{\mu\phi} \Rightarrow h = 25 \cdot \frac{1}{2} m = 12,5m$$

γ) Κατά την κάθοδο ο τροχός εκτελεί μια σύνθετη κίνηση που αποτελείται από μια ομαλά επιταχυνόμενη μεταφορική και μια ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση και ισχύουν οι εξισώσεις (το χρονικό διάστημα Δt που εμφανίζεται στις παρακάτω εξισώσεις μετριέται από την στιγμή που ξεκίνησε η κάθοδος του τροχού)

$$\omega = a_{\gamma} \Delta t (3)$$

$$\theta = \frac{1}{2} a_{\gamma} \cdot \Delta t^2 (4)$$

$$s_2 = \frac{1}{2} \alpha_{cm} \cdot \Delta t^2 (5)$$

όπου s_2 το διάστημα που διανύει ο τροχός κατεβαίνοντας

$$\text{και } a_{\gamma_{\text{ρω}}} = \frac{\alpha_{cm}}{R} = \frac{2}{0,2} \frac{\text{rad}}{s^2} = 10 \text{ rad} / s^2$$

Από την (5) και επειδή $s_2 = s$ έχουμε:

$$s_2 = s \Rightarrow s = \frac{1}{2} \alpha_{cm} \Delta t^2 \Rightarrow \Delta t^2 = \frac{25 \cdot 2}{\alpha_{cm}} \Rightarrow$$

$$\Delta t = \sqrt{\frac{25 \cdot 2}{\alpha_{cm}}} \Rightarrow \Delta t = \sqrt{\frac{25 \cdot 2}{2}} s \Rightarrow \Delta t = \sqrt{25} s = 5s$$

$$(3) \Rightarrow \omega = a_{\gamma} \cdot \Delta t \Rightarrow$$

$$\omega = 10 \cdot 5 \text{ rad} / s = 50 \text{ rad} / s$$

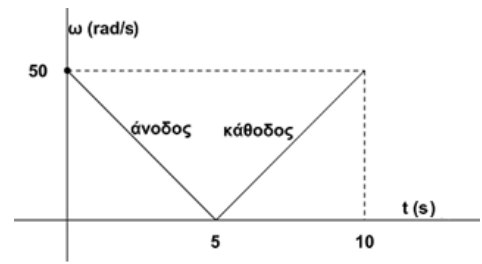
$$(4) \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \cdot a_{\gamma} \cdot \Delta t^2 \Rightarrow \theta = \frac{1}{2} \cdot 10 \cdot 5^2 \text{ rad} = 125 \text{ rad}$$

δ) Βρίσκουμε την αρχική και τελική γωνιακή ταχύτητα:

$$\omega_0 = \frac{v_0}{R} = \frac{10}{0,2} \text{ rad/s} = 50 \text{ rad/s}$$

$$\omega_{\text{τελ}} = 50 \text{ rad/s}$$

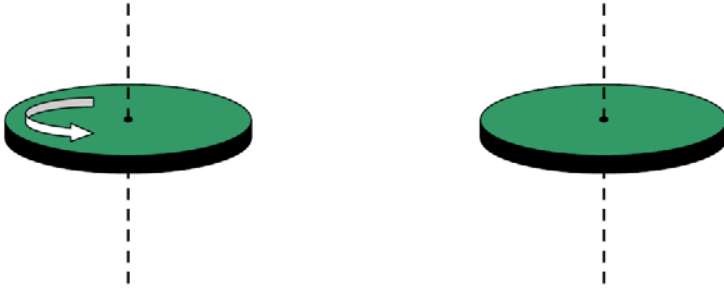
και παρατηρούμε ότι στα πρώτα 5s κίνηση είναι ομαλά επιβραδυνόμενη ενώ στα υπόλοιπα 5s ομαλά επιταχυνόμενη. Επομένως το διάγραμμα του μέτρου της γωνιακής ταχύτητας είναι αυτό που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.



Άσκηση 3.

Ο ομογενής και ισοπαχής δίσκος του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, που περνά από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος. Τη στιγμή $t_0=0$ ξεκινά να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Τη στιγμή $t_A=4\text{s}$, ο δίσκος αρχίζει να

επιβραδύνεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$, μέχρι να σταματήσει.



α) Στο πρώτο σχήμα να σχεδιαστεί το διάνυσμα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}_1$ και το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{a}_{\gamma 1}$ του δίσκου κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της επιταχυνόμενης κίνησής του.

β) Στο δεύτερο σχήμα να σχεδιαστούν τα διανύσματα της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}_2$ και της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{a}_{\gamma 2}$ του δίσκου κάποια στιγμή κατά τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησής του.

Θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής:

γ) Να γραφούν οι χρονικές εξισώσεις $\omega = f(t)$ της γωνιακής ταχύτητας για όλη τη διάρκεια της κίνησης.

δ) Να γίνει η γραφική παράσταση $\omega-t$ για τη συνολική κίνηση.

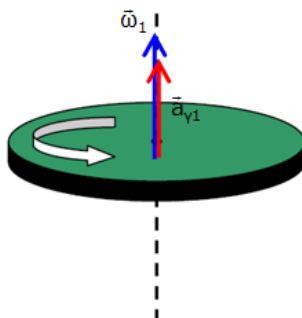
ε) Να γραφεί η χρονική εξίσωση $\theta = f(t)$ της γωνίας στροφής στην επιταχυνόμενη κίνηση.

στ) Να υπολογιστεί η γωνία στροφής $\Delta\theta$, κατά τη διάρκεια του 2^{ου} δευτερολέπτου της επιβραδυνόμενης κίνησης.

ζ) Να βρεθεί ο συνολικός αριθμός των περιστροφών N , που εκτέλεσε ο τροχός από $t_0=0$ μέχρι να σταματήσει.

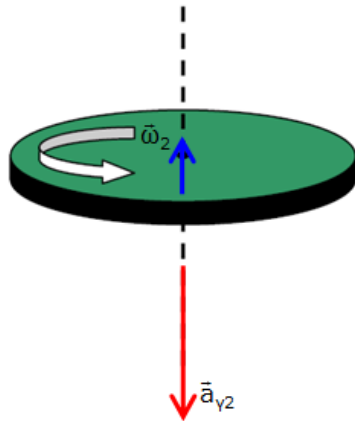
Λύση

α)



Επειδή ο δίσκος περιστρέφεται αριστερόστροφα, με χρήση του κανόνα του δεξιού χεριού, βρίσκουμε ότι η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας είναι εκείνη του σχήματος. Επειδή η κίνηση του δίσκου είναι επιταχυνόμενη, ισχύει ότι: $\vec{a}_\gamma \uparrow \uparrow \vec{\omega}$. Επομένως, η γωνιακή επιτάχυνση θα έχει την κατεύθυνση του σχήματος.

β)



Στην επιβραδυνόμενη κίνηση η κατεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας παραμένει η ίδια με αυτήν της επιταχυνόμενης κίνησης, επειδή η φορά περιστροφής παραμένει ίδια.

Επειδή η κίνηση του δίσκου είναι επιβραδυνόμενη, ισχύει ότι: $\vec{a}_\gamma \uparrow \downarrow \vec{\omega}$.

Επομένως, η γωνιακή επιτάχυνση θα έχει την κατεύθυνση του σχήματος.

γ) Από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης $a_\gamma = \frac{d\omega}{dt}$, για $a_\gamma = \text{σταθ.}$ έχουμε: $a_\gamma = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Επομένως:

$$a_{\gamma 1} = +2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow 2 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow 2 = \frac{\omega - 0}{t - 0} \Rightarrow \omega = 2t \text{ (S.I.)}, 0 \leq t < 4 \text{ s} \quad (1)$$

Η γωνιακή ταχύτητα που αποκτά ο δίσκος την $t_A = 4 \text{ s}$ αποτελεί την αρχική γωνιακή ταχύτητα με την οποία ξεκινά η επιβραδυνόμενη κίνηση.

Με αντικατάσταση στην (1) προκύπτει $\omega_A = +8 \text{ rad/s}$. Επομένως:

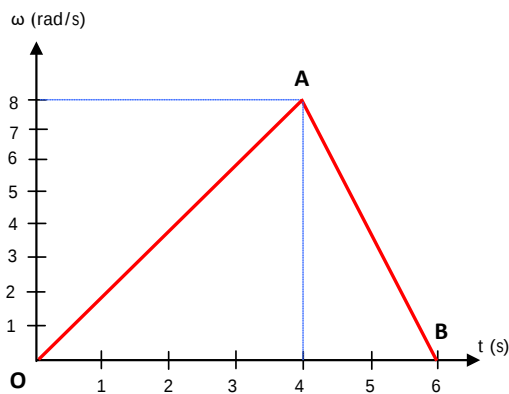
$$a_{\gamma 2} = -4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow -4 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow -4 = \frac{\omega - 8}{t - 4} \Rightarrow \omega = -4t + 24 \text{ (S.I.)} \quad (2)$$

Αντικαθιστώντας στην σχέση (2) $\omega = 0 \text{ rad/s}$ βρίσκουμε τη χρονική στιγμή που ο δίσκος σταματά. Προκύπτει $t = 6 \text{ s}$. Άρα το πεδίο ορισμού για τη σχέση (2) είναι $4 \text{ s} \leq t \leq 6 \text{ s}$.

δ) Οι εξισώσεις του ερωτήματος 3 είναι πρώτου βαθμού ως προς t , επομένως, οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις είναι ευθύγραμμα τμήματα. Για το σχεδιασμό καθενός ευθυγράμμου τμήματος, απαιτείται η γνώση δύο σημείων στο διάγραμμα ω - t . Τα σημεία αυτά έχουν ήδη βρεθεί στο ερώτημα 3:

- για $t = 0 \text{ s} \rightarrow \omega_0 = 0 \text{ rad/s}$ (σημείο Ο)
- για $t = 4 \text{ s} \rightarrow \omega_A = +8 \text{ rad/s}$ (σημείο Α)
- για $t = 6 \text{ s} \rightarrow \omega_B = 0 \text{ rad/s}$ (σημείο Β)

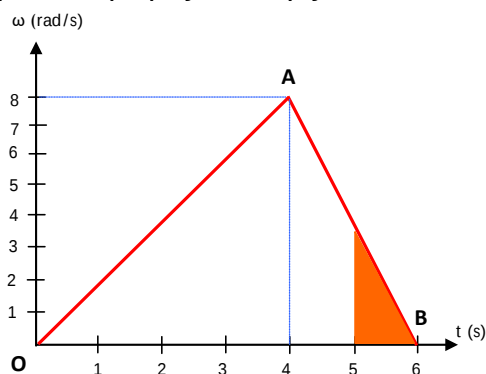
Με χρήση αυτών των σημείων, σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση του σχήματος:



ε) Από τη σχέση $x_{cm} = v_{cm,0}t + \frac{1}{2}a_{cm}t^2$, με αντιστοίχιση των μεγεθών της μεταφορικής και της στροφικής κίνησης, εξάγεται η σχέση:

$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2}a_{\gamma 1}t^2$. Αντικαθιστώντας τα μεγέθη ω_0 και $a_{\gamma 1}$ που μας δίνονται στην εκφώνηση προκύπτει $\theta = t^2$ (S.I.), $0 \leq t < 4$ s

στ) Το δεύτερο δευτερόλεπτο της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι από $t=5$ s ως $t'=6$ s. Η γωνία στροφής υπολογίζεται από το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου:



Από τη σχέση (2) του ερωτήματος 3, για $t=5$ s εξάγεται ότι $\omega_5 = +4$ rad/s. Επομένως:

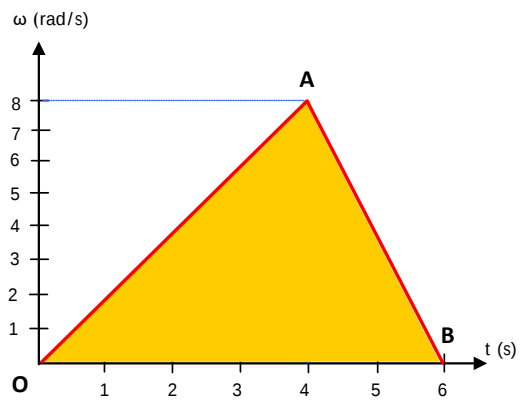
$$\Delta\theta = \text{Εμβ}_{\text{τρίγ}} \left(= \frac{\beta \cdot v}{2} \right) \Rightarrow \Delta\theta = \frac{1 \cdot 4}{2} \text{ rad} \Rightarrow \Delta\theta = 2 \text{ rad}$$

ζ) Θα χρησιμοποιήσουμε τη σχέση

$$N = \frac{\Delta\theta_{\text{ολ}}}{2\pi}$$

όπου $\Delta\theta_{\text{ολ}}$ = συνολική γωνία στροφής

Η συνολική γωνία στροφής βρίσκεται από το εμβαδόν του σκιασμένου χωρίου του παρακάτω σχήματος:



$$\Delta\theta_{\text{ολ}} = E\mu\beta_{\text{τριγ}} (= \frac{\beta \cdot \upsilon}{2}) \Rightarrow \Delta\theta_{\text{ολ}} = \frac{6 \cdot 8}{2} \text{ rad} \Rightarrow \Delta\theta_{\text{ολ}} = 24 \text{ rad}$$

Επομένως:

$$N = \frac{\Delta\theta_{\text{ολ}}}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{12}{\pi} \text{ περιστροφές.}$$

Άσκηση 4.

Οι τροχοί ενός ποδηλάτου έχουν ακτίνα $R = 40 \text{ cm}$.

Α. Το ποδήλατο ανηφορίζει με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v_{\text{cm}} = 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ σε πλαγιά και οι τροχοί του κυλίνουν χωρίς να ολισθαίνουν.

1. Να βρεθεί το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής κάθε τροχού.
2. Να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας του ανώτερου σημείου από το έδαφος κάθε τροχού.

Β. Το ποδήλατο φτάνει σε κατηφόρα και αρχίζει να επιταχύνεται. Η γωνιακή επιτάχυνση κάθε τροχού έχει μέτρο $a_{\gamma} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

3. Να βρεθεί το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας α_{cm} του ποδηλάτου.

Γ. Κατά τη διάρκεια όλης της πορείας του ποδηλάτου (ανηφόρα + κατηφόρα) κάθε τροχός έχει διαγράψει $N = \frac{2000}{\pi}$ περιστροφές.

4. Να βρεθεί το μήκος της τροχιάς που κάλυψε το ποδήλατο.

Λύση

Μετατροπή στο SI:

$$R = 40 \text{ cm} \Rightarrow R = 0,4 \text{ m}$$

1. Η κοινή γωνιακή ταχύτητα ω των δύο τροχών υπολογίζεται ως εξής:

$$v_{\text{cm}} = \omega R \Rightarrow 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}} = \omega \cdot 0,4 \text{ m} \Rightarrow \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

2. Η κοινή ταχύτητα $v_{\text{αν.σ}}$ των ανωτέρων σημείων των δύο τροχών υπολογίζεται από τον τύπο:

$$v_{\text{αν.σ}} = 2v_{\text{cm}} \Rightarrow v_{\text{αν.σ}} = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

3. Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του ποδηλάτου υπολογίζεται από τον τύπο:

$$\alpha_{\text{cm}} = a_{\gamma} R \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = 2 \cdot 0,4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

4. Αρχικά θα υπολογίσουμε τη συνολική γωνία στροφής $\Delta\theta$:

$$N = \frac{2000}{\pi} = \frac{\Delta\theta}{2\pi} \Rightarrow \Delta\theta = 2\pi N = 4000 \text{ rad}$$

Στη συνέχεια, υπολογίζουμε το μήκος της τροχιάς που κάλυψε το ποδήλατο από τον τύπο:

$$\Delta x = \Delta\theta \cdot R \Rightarrow \Delta x = 4000 \cdot 0,4\text{m} \Rightarrow \Delta x = 1600 \text{ m}$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα τρακτέρ έχει τροχούς με διαμέτρους $\delta_1=1\text{m}$ και $\delta_2=0,5\text{m}$ και αρχικά κινείται με ταχύτητα $u_0=10\text{m/s}$. Ο οδηγός πατάει φρένο για κάποιο λόγο και οι τροχοί αρχίζουν να επιβραδύνονται. Αν γνωρίζουμε ότι η επιτάχυνση του τρακτέρ είναι σταθερή και ίση με $\alpha_{\text{cm}}=-2\text{m/s}^2$, να βρεθούν:



- α) Η αρχική γωνιακή ταχύτητα του κάθε τροχού καθώς και η γωνιακή επιτάχυνση που θα αποκτήσει κάθε τροχός.
- β) Το συνολικό διάστημα μέχρι το τρακτέρ να σταματήσει.
- γ) Μετά από μετατόπιση $S=16\text{m}$ από τη στιγμή που άρχισε να επιβραδύνεται το τρακτέρ, από το ψηλότερο σημείο του μεγαλύτερου τροχού ξεκολλάει ένα κομμάτι λάσπης μάζας m .
 - i) Με τι ταχύτητα ξεκολλάει αυτό το κομμάτι μάζας m ;
 - ii) Η συνολική εφαπτομενική επιτάχυνση που έχει το κομμάτι λάσπης ελάχιστα πριν ξεκολλήσει.

Λύση

α) Ο κάθε τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, άρα ισχύουν οι γενικές εξισώσεις για τον καθένα:

$$u_{\text{cm}} = u_0 + \alpha_{\text{cm}} t \quad (1)$$

$$s = u_0 \cdot t + \frac{1}{2} \cdot \alpha_{\text{cm}} \cdot t^2 \quad (2)$$

$$\omega = \omega_0 + a_{\gamma} t \quad (3)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} a_{\gamma} t^2 \quad (4)$$

$$u_{\text{cm}} = \omega R \quad (5)$$

$$\alpha_{\text{cm}} = a_{\gamma} R \quad (6)$$

Οι τροχοί έχουν ίδια μεταφορική ταχύτητα οπότε θα έχουν και την ίδια μεταφορική επιτάχυνση

$$v_{cm(1)} = v_{cm(2)} \Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt}(1) = \frac{dv_{cm}}{dt}(2) \Rightarrow$$

$$\alpha_{cm(1)} = \alpha_{cm(2)} = 2 \text{ m/s}^2$$

$$\alpha_{cm(1)} = a_{\gamma(1)} \cdot R_1 \Rightarrow$$

$$a_{\gamma(1)} = \frac{\alpha_{cm(1)}}{R_1} = \frac{2}{0,5} \text{ rad/s}^2 = 4 \text{ rad/s}^2$$

$$a_{\gamma(2)} = \frac{\alpha_{cm(2)}}{R_2} = \frac{2}{0,25} \text{ rad/s}^2 = 8 \text{ rad/s}^2$$

Η αρχική γωνιακή ταχύτητα του κάθε τροχού βρίσκεται από τη σχέση $v_{cm} = \omega \cdot R$ άρα

$$\omega_1 = \frac{v_{cm}}{R_1} = \frac{10}{0,5} \text{ rad/s} = 20 \text{ rad/s}$$

$$\omega_2 = \frac{v_{cm}}{R_2} = \frac{10}{0,25} \text{ rad/s} = 40 \text{ rad/s}$$

β) Αφού το τρακτέρ σταματάει, $v_{cm} = 0$

$$(1) \Rightarrow 0 = v_0 - \alpha_{cm} \cdot t \Rightarrow v_0 = \alpha_{cm} \cdot t \Rightarrow t = \frac{v_0}{\alpha_{cm}} = 5 \text{ s}$$

$$(2) \Rightarrow s = (10 \cdot 5 - \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 5^2) \text{ m} = 25 \text{ m}$$

Δηλαδή βρήκαμε τον συνολικό χρόνο και το συνολικό διάστημα της επιβραδυνόμενης κίνησης.

γ) i) Στην εξίσωση (2) θέτω $s = 16 \text{ m}$ και παρατηρώ ότι είναι εξίσωση 2^{ου} βαθμού ως προς τον χρόνο, άρα:

$$(2) \Rightarrow s = v_0 t - \frac{1}{2} \alpha_{cm} t^2 \Rightarrow$$

$$16 = 10t - t^2 \Rightarrow t^2 - 10t + 16 = 0 \Rightarrow$$

$$\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = 100 - 64 = 36$$

$$t_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{10 \pm \sqrt{36}}{2} = \frac{10 \pm 6}{2} \begin{cases} t = 8 \text{ s} \\ t = 2 \text{ s} \end{cases}$$

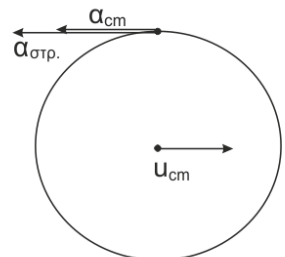
Η $t = 8 \text{ s}$ απορρίπτεται γιατί το σώμα σταματάει την $t = 5 \text{ s}$, άρα δεκτή είναι η $t = 2 \text{ s}$.

Θέτουμε το χρόνο αυτό στην εξίσωση (1) και έχουμε

$$v_{cm} = v_0 - \alpha_{cm} \cdot t \Rightarrow v_{cm} = (10 - 2 \cdot 2) \text{ m/s} = 6 \text{ m/s}$$

και

$$v_{\lambda\alpha\sigma\pi\eta\varsigma} = 2v_{cm} = 12 \text{ m/s}$$



ii) Για την εφαπτομενική επιτάχυνση του κομματιού λάσπης θα χρησιμοποιήσουμε αρχή επαλληλίας. (στο σχήμα οι δυο επιμέρους επιταχύνσεις έχουν σχεδιαστεί να έχουν διαφορετικά μέτρα ενώ στην πραγματικότητα είναι ίσες)

$$\vec{\alpha}_{\lambda\alpha\sigma\pi\eta\varsigma} = \vec{\alpha}_{\text{cm}} + \vec{\alpha}_{\sigma\tau\rho}$$

Όμως $\alpha_{\sigma\tau\rho} = a_{\gamma} R = -2\text{m/s}^2$, έτσι

$$\alpha_{\lambda\alpha\sigma\pi\eta\varsigma} = -2\text{m/s}^2 + (-2\text{m/s}^2) \Rightarrow \alpha_{\lambda\alpha\sigma\pi\eta\varsigma} = -4\text{m/s}^2$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 3/01/2012

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 1: ΚΙΝΗΣΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

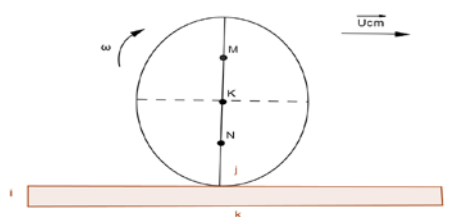
Ο δίσκος του σχήματος εκτελεί κύλιση χωρίς ολίσθηση με σταθερή ταχύτητα u_{cm} . Δύο σημεία, Μ και Ν, απέχουν ίδια απόσταση από το κέντρο Κ και έχουν ταχύτητες που ικανοποιούν τη σχέση $u_M = 5 \cdot u_N$.

Η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

α) $u_{cm} = \frac{u_M}{2}$

β) $u_{cm} = 3u_N$

γ) $u_{cm} = \frac{u_M + u_N}{5}$



Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η β.

Από την αρχή της επαλληλίας για τις ταχύτητες των δυο μορίων έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} u_M &= u_{cm} + u_{\sigma\tau\rho} = u_{cm} + \omega r \\ u_N &= u_{cm} - u_{\sigma\tau\rho} = u_{cm} - \omega r \end{aligned} \right\} \xrightarrow{(+)} 2u_{cm} = u_N + u_M \Rightarrow u_{cm} = \frac{u_M + u_N}{2}$$
$$u_{cm} = \frac{5u_N + u_N}{2} = \frac{6u_N}{2} \Rightarrow u_{cm} = 3u_N$$

Ερώτηση 2.

Μία οριζόντια ράβδος AB μήκους l εκτελεί στροφική κίνηση με σταθερή γωνιακή ταχύτητα ίση με ω γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το άκρο της A. Το μέσο M της ράβδου έχει κεντρομόλο επιτάχυνση ίση με:

α) $\alpha_{\kappa} = \omega^2 l$.

β) $\alpha_{\kappa} = \omega^2 \frac{l}{2}$.

γ) $\alpha_{\kappa} = \omega^2 \frac{l}{4}$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

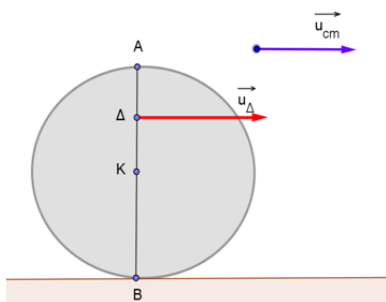
Σωστή απάντηση η β.

Στην παρακάτω λύση η ταχύτητα λόγω περιστροφής του μέσου της ράβδου (δηλ η γραμμική ταχύτητα του M) συμβολίζεται με $u_{\gamma\rho}$.

$$\alpha_{\kappa} = \frac{u_{\gamma\rho}^2}{R} = \frac{\left(\omega \frac{l}{2}\right)^2}{\frac{l}{2}} = \frac{\omega^2 l}{2}$$

Ερώτηση 3.

Τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια χρονική στιγμή το σημείο Δ βρίσκεται στην κατακόρυφη διάμετρο και απέχει από το κέντρο Κ απόσταση $x=R/2$ (βρίσκεται πάνω από το Κ)



Εάν η ταχύτητα του Δ είναι u_{Δ} , η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι:

α) $u_{cm} = \frac{3}{2} u_{\Delta}$

β) $u_{cm} = \frac{2}{3} u_{\Delta}$

γ) $u_{cm} = \frac{u_{\Delta}}{2}$

Ποιο από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

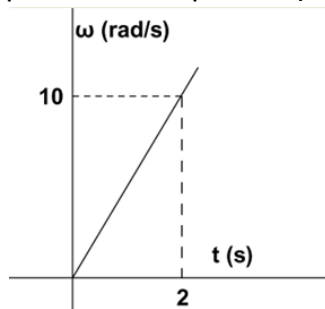
Σωστή απάντηση η β.

Από την αρχή της επαλληλίας για την ταχύτητα του Δ έχουμε.

$$u_{\Delta} = u_{cm} + u_{\sigma\tau\rho} \Rightarrow u_{\Delta} = u_{cm} + \omega \cdot \frac{R}{2} \Rightarrow u_{\Delta} = u_{cm} + \frac{u_{cm}}{2} \Rightarrow u_{\Delta} = \frac{3}{2} u_{cm} \Rightarrow u_{cm} = \frac{2}{3} u_{\Delta}$$

Ερώτηση 4.

Δίσκος ακτίνας $R=0,2\text{m}$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα.



A) η ταχύτητα του κέντρου μάζας την χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$ είναι:

α) $v_{\text{cm}} = 50\text{m/s}$.

β) $v_{\text{cm}} = 2\text{m/s}$.

γ) $v_{\text{cm}} = 5\text{m/s}$.

Β) Η γωνιακή επιτάχυνση του σώματος είναι:

α) $\alpha_{\gamma} = 1\text{m/s}^2$

β) $\alpha_{\gamma} = 5\text{m/s}^2$

γ) $\alpha_{\gamma} = 2\text{m/s}^2$

Γ) Το διάστημα που έχει διανύσει ο δίσκος μέχρι την χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$ είναι:

α) $S = 2\text{m}$.

β) $S = 4\text{m}$.

γ) $S = 50\text{m}$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστές απαντήσεις:

A. β.

B. β.

Γ. α.

Α) Αφού ο τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει έχουμε:

$$v_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow v_{cm} = 0,2 \cdot 10 \text{ m/s} = 2 \text{ m/s} . \text{ Επομένως η σωστή απάντηση είναι η β.}$$

Β) Από την κλίση στο διάγραμμα ω - t βρίσκουμε ότι:

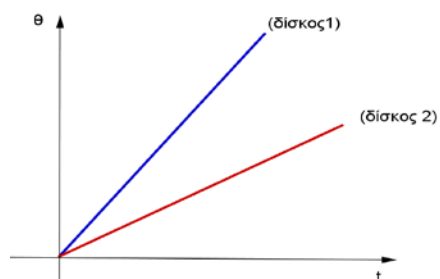
$$a_{\gamma} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} \Rightarrow a_{\gamma} = \frac{10 - 0 \text{ rad}}{2 - 0} \frac{1}{s^2} \Rightarrow a_{\gamma} = 5 \frac{\text{rad}}{s^2} . \text{ Επομένως σωστή απάντηση είναι η β.}$$

Γ) Επειδή ο τροχός εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση (και μεταφορικά αλλά και περιστροφικά) ισχύει: $s = \frac{1}{2} \cdot a_{cm} \cdot t^2$.

$$\text{Επομένως } s = \frac{1}{2} \cdot a_{\gamma} \cdot R \cdot t^2 \Rightarrow s = \frac{1}{2} 5 \cdot 0,2 \cdot 2^2 \text{ m} = 2 \text{ m} , \text{ δηλαδή σωστή απάντηση είναι η α.}$$

Ερώτηση 5.

Δυο ομογενείς δίσκοι στρέφονται γύρω από σταθερό άξονα περιστροφής που περνά από το κέντρο τους. Στο διάγραμμα φαίνεται πως μεταβάλλεται η γωνία που διαγράφει κάθε



δίσκος σε συνάρτηση με τον χρόνο.

- α) οι δυο δίσκοι έχουν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση (μη μηδενική).
- β) οι δίσκοι εκτελούν επιταχυνόμενη κίνηση με διαφορετικές γωνιακές επιταχύνσεις.
- γ) οι δυο δίσκοι εκτελούν ομαλή στροφική κίνηση και η γωνιακή ταχύτητα του πρώτου κάθε χρονική στιγμή είναι μεγαλύτερη από την γωνιακή ταχύτητα του δεύτερου την ίδια χρονική στιγμή.
- δ) σε ίσους χρόνους ο δίσκος 2 θα εκτελέσει περισσότερες περιστροφές από τον δίσκο 1.

Να χαρακτηριστεί κάθε πρόταση σαν σωστή ή λανθασμένη και να δικαιολογηθεί ο χαρακτηρισμός της κάθε πρότασης.

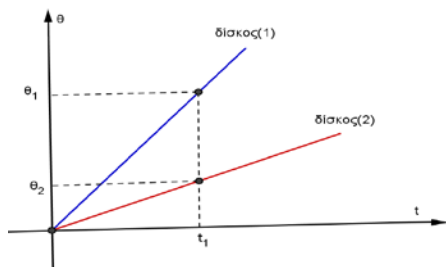
Λύση

Σωστή είναι η απάντηση γ.

Επειδή η γωνία θ μεταβάλλεται γραμμικά με τον χρόνο και οι δυο δίσκοι εκτελούν ομαλή περιστροφική κίνηση .

Θα έχουν λοιπόν σταθερές γωνιακές ταχύτητες και μηδενικές γωνιακές επιταχύνσεις.

(Επομένως οι δυο πρώτες προτάσεις είναι λανθασμένες.)



Θα ισχύει επίσης ότι: $\omega = \theta / t$

Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι κάποια χρονική στιγμή t_1 οι δίσκοι έχει διαγράψει γωνίες θ_1 και θ_2

Από το διάγραμμα φαίνεται ότι $\theta_1 > \theta_2$ (1) (επομένως και η πρόταση δ είναι και αυτή λανθασμένη).

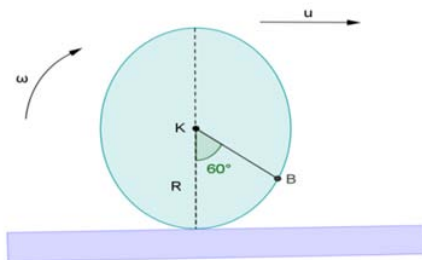
Ας συγκρίνουμε τώρα τις γωνιακές ταχύτητες

$$\omega_1 = \frac{\theta_1}{t_1} \text{ και } \omega_2 = \frac{\theta_2}{t_1}. \text{ Από την (1) έχουμε ότι } \omega_1 > \omega_2.$$

Άρα σωστή είναι μόνο η πρόταση γ.

Ερώτηση 6.

Τροχός κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με ταχύτητα u_{cm} . Το B βρίσκεται στην περιφέρεια του τροχού και η επιβατική του ακτίνα σχηματίζει με την κατακόρυφη διάμετρο γωνία 60° (όπως στο σχήμα).



Το μέτρο της ταχύτητας του B είναι:

α) $u_B = u_{cm}$.

β) $u_B = u_{cm}\sqrt{2}$.

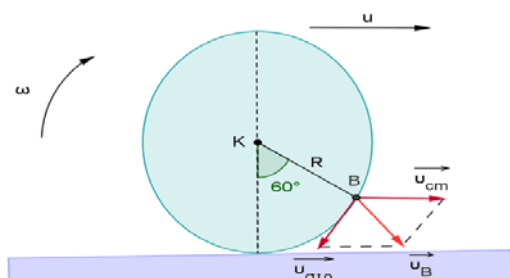
γ) $u_B = \frac{u_{cm}}{2}$.

δ) $u_B = \frac{3u_{cm}}{2}$.

Ποιό από τα παραπάνω είναι το σωστό; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή είναι η απάντηση α.



Για να βρεθεί το μέτρο της ταχύτητας οποιουδήποτε σημείου Σ του τροχού, εφαρμόζεται ο τύπος:

$$v_{(B)} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\sigma\tau\rho}^2 + 2 \cdot v_{cm} \cdot v_{\sigma\tau\rho} \cdot \cos\varphi}$$

όπου φ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων $\vec{v}_{cm}$ και $\vec{v}_{\sigma\tau\rho}$.

Οπότε για το σημείο B έχουμε (η γωνία φ για το σημείο B είναι $\varphi=120^\circ$)

$$v_{(B)} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{\sigma\tau\rho}^2 + 2 \cdot v_{cm} \cdot v_{\sigma\tau\rho} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$v_{(B)} = \sqrt{v_{cm}^2 + v_{cm}^2 + 2 \cdot v_{cm} \cdot v_{cm} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$v_{(B)} = \sqrt{2v_{cm}^2 + 2 \cdot v_{cm}^2 \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi}$$

$$v_{(B)} = \sqrt{2v_{cm}^2 + 2 \cdot v_{cm}^2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right)}$$

$$v_{(B)} = \sqrt{v_{cm}^2} \Rightarrow v_{(B)} = v_{cm}$$

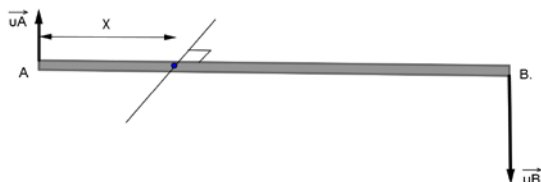
Άρα σωστή είναι η απάντηση α.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Μια ράβδος AB περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα γύρω από έναν σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από ένα σημείο πάνω στη ράβδο.

Το άκρο A έχει γραμμική ταχύτητα που έχει μέτρο $u_A = 10\text{m/s}$ ενώ το άκρο B έχει γραμμική ταχύτητα μέτρου $u_B = 30\text{m/s}$.



Αν το μήκος της ράβδου είναι $l = 40\text{cm}$ να βρεθούν:

- α) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου.
- β) Η απόσταση που απέχει το άκρο A της ράβδου από τον άξονα περιστροφής.
- γ) Η γωνία στροφής της ράβδου σε χρόνο $\Delta t = 2\text{ s}$.
- δ) Ο αριθμός των περιστροφών της ράβδου στον παραπάνω χρόνο.

Λύση

α) Αν ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής της ράβδου γύρω από τον συγκεκριμένο άξονα έχουμε

$$u_A = \omega \cdot r_A = \omega \cdot x \quad (1)$$

$$u_B = \omega \cdot r_B = \omega \cdot (L - x) \quad (2)$$

με πρόσθεση κατά μέλη καταλήγουμε

$$u_A + u_B = \omega \cdot L \Rightarrow \omega = 100 \text{ rad/s}$$

β) Στη σχέση (1) αντικαθιστώντας την τιμή του ω προκύπτει:

$$10 = 100 \cdot x \Rightarrow x = 0,1\text{m}$$

γ) Η ράβδος εκτελεί ομαλή περιστροφική κίνηση και θα ισχύει: $\theta = \omega \cdot t$, άρα $\theta = 200 \text{ rad}$

δ) Ο αριθμός των περιστροφών της ράβδου δίνεται από την σχέση

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow \theta = \frac{100}{\pi} \text{ rad}$$

Άσκηση 2.

Ένας τροχός που αρχικά ηρεμεί αρχίζει να περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή επιτάχυνση γύρω από σταθερό άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο του και διέρχεται από το κέντρο του. Μετά από $t=10\text{s}$ ο τροχός έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega=40\text{ rad/s}$.



- α) Να βρεθεί η γωνιακή του επιτάχυνση.
- β) Να γίνει το διάγραμμα $\omega-t$ για τον τροχό έως την $t=10\text{ s}$.
- γ) Να βρεθεί η γωνία που διαγράφει ο τροχός από το 3° έως το 7° s της κίνησης του.
- δ) Να βρεθεί ο αριθμός των περιστροφών του τροχού από την $t=0$ έως την $t=10\text{ s}$.

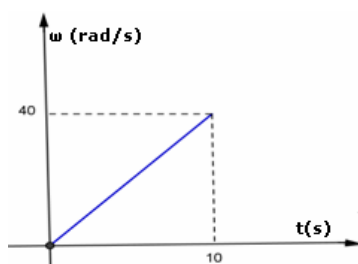
Λύση

α) Ο τροχός εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση όποτε θα ισχύουν οι σχέσεις:

$$\omega = a_{\gamma} \cdot t \quad (1) \quad \text{και} \quad \theta = \frac{1}{2} \cdot a_{\gamma} \cdot t^2 \quad (2).$$

$$\text{Λύνοντας την (1) έχουμε } a_{\gamma} = \frac{\omega}{t} \Rightarrow a_{\gamma} = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) Η γωνιακή ταχύτητα στην ομαλά επιταχυνόμενη περιστροφική κίνηση είναι ανάλογη με τον χρόνο όποτε το διάγραμμα θα είναι το επόμενο.



γ) Από τη σχέση (2) βρίσκουμε:

$$\text{Για } t=3\text{s}: \theta_1 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 3^2 \text{ rad} = 18 \text{ rad}$$

$$\text{Για } t=7\text{s}: \theta_2 = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 7^2 \text{ rad} = 98 \text{ rad}$$

Αφαιρώντας βρίσκουμε ότι η ζητούμενη γωνία είναι $\theta = (98 - 18) \text{ rad} = 80 \text{ rad}$.

δ) Βρίσκουμε από τη σχέση (2) την συνολική γωνία που διαγράφηκε στα 10 s:

$$\theta_{ολ} = \frac{1}{2} \cdot 4 \cdot 10^2 \text{ rad} = 200 \text{ rad}$$

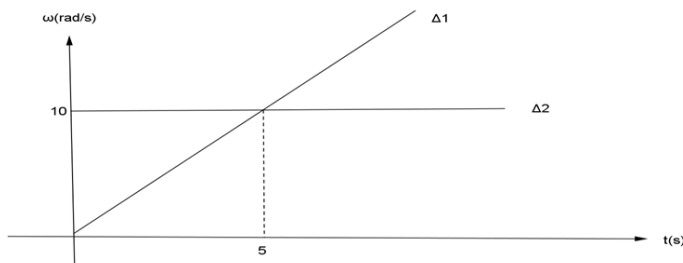
Οι στροφές υπολογίζονται από τη σχέση:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{200}{2\pi} \text{ στροφές} \Rightarrow N = \frac{100}{\pi} \text{ στροφές}$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Δύο δίσκοι οριζόντιοι Δ_1 και Δ_2 εκτελούν περιστροφική κίνηση γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας τους. Οι δίσκοι περιστρέφονται με γωνιακή ταχύτητα που μεταβάλλεται με τον χρόνο όπως φαίνεται στο σχήμα.



Ζητείται:

- Η γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά κάθε δίσκος.
- Την $t=5s$ πόσες περιστροφές έχει κάνει ο δίσκος Δ_2 περισσότερες από τον δίσκο Δ_1 ;
- Ποιά χρονική στιγμή οι 2 δίσκοι έχουν τον ίδιο αριθμό περιστροφών;
- Αν οι 2 τροχοί έχουν ακτίνες $R_2=R$, $R_1=2R$, να βρεθεί ποια στιγμή τα σημεία της περιφέρειας τους θα έχουν ίσες κατά μέτρο ταχύτητες.

Λύση

α) Από το διάγραμμα παρατηρώ ότι ο δίσκος 1 εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση (η γωνιακή του ταχύτητα μεταβάλλεται γραμμικά) ενώ ο δίσκος 2 εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.

$$\text{Επομένως } a_{\gamma(1)} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_{\text{τελ}} - \omega_{\text{αρχ}}}{t_{\text{τελ}} - t_{\text{αρχ}}} = \left(\frac{10-0}{5-0} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}^2} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

$$\text{Ενώ } a_{\gamma(2)} = 0$$

β) Από το εμβαδόν υπολογίζω τη γωνία που διαγράφει κάθε δίσκος σε χρόνο 5 s:

$$\theta_1 = \text{εμβαδον τριγώνου} = \frac{5 \cdot 10}{2} \text{ rad} = 25 \text{ rad}$$

$$\theta_2 = \text{εμβαδον ορθογωνίου} = 5 \cdot 10 \text{ rad} = 50 \text{ rad}$$

$$\text{και } N_1 = \frac{\theta_1}{2\pi} = \frac{25 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad/στροφή}} = \frac{12,5}{\pi} \text{ στροφές και}$$

$$N_2 = \frac{\theta_2}{2\pi} = \frac{50 \text{ rad}}{2\pi \text{ rad/στροφή}} = \frac{25}{\pi} \text{ στροφές}$$

Άρα ο δίσκος Δ_2 έχει κάνει $12,5/\pi$ περισσότερες περιστροφές από τον Δ_1 .

γ) Για να έχουν κάνει τον ίδιο αριθμό περιστροφών, θα πρέπει να έχουν περιστραφεί κατά την ίδια γωνία

$\theta_1 = \theta_2 \Rightarrow \omega t = \frac{1}{2} a_\gamma \cdot t^2 \Rightarrow t = \frac{2\omega}{a_\gamma} = \frac{2 \cdot 10}{2} \text{ s} = 10 \text{ s}$ δηλαδή μετά από χρόνο 10 s θα έχουν διαγράψει τον ίδιο αριθμό στροφών.

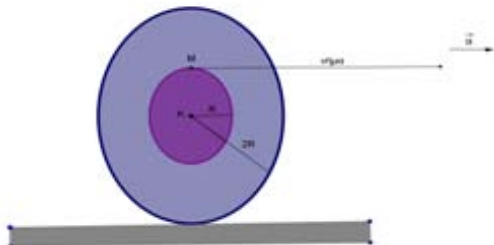
δ) Τα σημεία της περιφέρειας έχουν ταχύτητες που δίνονται από την σχέση $v_{\text{στρ}} = \omega \cdot R$ οπότε για τις ταχύτητες των σημείων της περιφέρειας των δίσκων ισχύει $v_1 = v_2$ άρα

$$\omega_1 \cdot R_1 = \omega_2 \cdot R_2 \Rightarrow \omega_1 \cdot 2R = \omega_2 \cdot R \Rightarrow 2\omega_1 = \omega_2 \Rightarrow 2 \cdot a_\gamma \cdot t = \omega_2 \Rightarrow$$

$$t = \frac{\omega_2}{2 \cdot a_\gamma} \Rightarrow t = 2,5 \text{ s}$$

Πρόβλημα 2.

Ένα στερεό αποτελείται από 2 κατακόρυφους ομοαξονικούς κυλίνδρους κολλημένους μεταξύ τους που έχουν ακτίνες R και $2R$. Το στερεό μπορεί να περιστρέφεται γύρω από τον κοινό οριζόντιο άξονα των 2 κυλίνδρων σαν ένα σώμα. Στην περιφέρεια του κυλίνδρου ακτίνας R έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τραβάμε το νήμα οριζόντια με επιτάχυνση $a=3 \text{ m/s}^2$ ώστε το νήμα να ξετυλίγεται και το στερεό να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.



Ζητείται:

- Η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του στερεού.
- Όταν έχει ξετυλιχθεί μήκος νήματος $l=5\text{m}$, πόσο έχει μετακινηθεί το κέντρο μάζας του στερεού.
- Πόση είναι η γωνιακή ταχύτητα του στερεού εκείνη τη στιγμή (αν δίνεται ότι η ακτίνα του μικρού κυλίνδρου είναι $R=0,1\text{m}$).
- Να βρεθεί η ταχύτητα του υψηλότερου σημείου του στερεού εκείνη τη στιγμή.

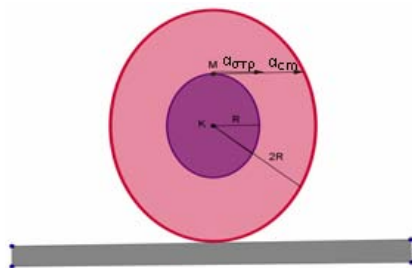
Λύση

α) Το σημείο M του κυλίνδρου ακτίνας R είναι σε επαφή με το νήμα οπότε κάθε στιγμή το M θα έχει ίδια επιτάχυνση και ίδια ταχύτητα με τα σημεία του νήματος τα οποία έχουν επιτάχυνση $a=3 \text{ m/s}^2$.

Το M έχει δυο εφαπτομενικές επιταχύνσεις. Την επιτάχυνση a_{cm} (λόγω μεταφορικής κίνησης) και την επιτάχυνση $a_{στρ}$ (λόγω στροφικής κίνησης).

(Η κεντρομόλος επιτάχυνση του M , παρόλο που υπάρχει δεν έχει σχεδιαστεί)

Από την αρχή της επαλληλίας για τις επιταχύνσεις έχουμε:



$$a_M = a_{στρ} + a_{cm} \Rightarrow a_M = a_{\gamma} \cdot R + a_{\gamma} \cdot 2R \Rightarrow a_M = 3a_{\gamma} \cdot R$$

Αλλά επειδή ισχύει η σχέση $a_{cm}=a_{\gamma} \cdot 2R$ έχουμε (το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει):

$$\alpha_M = \frac{3}{2}\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2}{3}\alpha_M$$

Επομένως $\alpha_{cm} = 2 \text{ m/s}^2$.

β) από την αρχή επαλληλίας για την ταχύτητα του Μ έχουμε:

$$u_M = u_{\sigma\tau\rho} + u_{cm} \Rightarrow u_M = \omega \cdot R + \omega \cdot 2R \Rightarrow u_M = 3\omega \cdot R$$

Επειδή ισχύει η σχέση $u_{cm} = \omega \cdot 2R$ θα έχουμε (το στερεό κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει)

$$u_M = \frac{3}{2}u_{cm}$$

Παρατηρούμε ότι κάθε στιγμή η ταχύτητα του Μ άρα και του νήματος είναι 1,5 φορά μεγαλύτερη από την ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Επομένως το άκρο του νήματος θα διαγράφει απόσταση κατά 1,5 φορά μεγαλύτερη από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου.

$$S_m = \frac{3}{2}S_{cm}$$

Όμως η μετατόπιση του άκρου του νήματος είναι το άθροισμα της μετατόπισης του κέντρου μάζας (S_{cm}) και του μήκους του σχοινιού που έχει ξετυλιχθεί (l):

$$S_m = S_{cm} + l$$

Οπότε:

$$\frac{3}{2}S_{cm} = S_{cm} + l \Rightarrow \frac{1}{2}S_{cm} = l \Rightarrow S_{cm} = 2l \Rightarrow S_{cm} = 10\text{m}$$

γ) Το στερεό εκτελεί ομαλά μεταβαλλόμενη μεταφορική κίνηση και ομαλά μεταβαλλόμενη περιστροφική κίνηση και από την σχέση $S_{cm} = \frac{1}{2}\alpha_{cm} \cdot t^2$ βρίσκουμε ότι ο

χρόνος που χρειάστηκε για να κάνει το κέντρο μάζας απόσταση 10m είναι $t = \sqrt{10}\text{s}$ άρα η ταχύτητα του κέντρου μάζας εκείνη την στιγμή είναι:

$$u_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t \Rightarrow u_{cm} = 2 \cdot \sqrt{10}\text{m/s}$$

Από τη σχέση $u_{cm} = \omega \cdot 2R$ βρίσκουμε ότι $\omega = \frac{2\sqrt{10} \text{ m/s}}{2 \cdot 0,1 \text{ m}} = 10\sqrt{10} \text{ rad/s}$

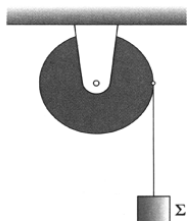
δ) το ψηλότερο σημείο του στερεού έχει ταχύτητα διπλάσια από την ταχύτητα του κέντρου μάζας άρα:

$$u = 4\sqrt{10}\text{m/s}.$$

Πρόβλημα 3.

Η τροχαλία του σχήματος έχει ακτίνα $R=20\text{cm}$ και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα χωρίς τριβές. Από το αυλάκι της τροχαλίας είναι δεμένο με αβαρές μη εκτατό νήμα ένα σώμα Σ . Αφήνουμε ελεύθερο το σώμα και αυτό κατεβαίνοντας αποκτά επιτάχυνση $a=1\text{m/s}^2$ ενώ η τροχαλία εκτελεί στροφική κίνηση.

Θεωρούμε ότι το νήμα δεν γλιστράει στο αυλάκι της τροχαλίας.

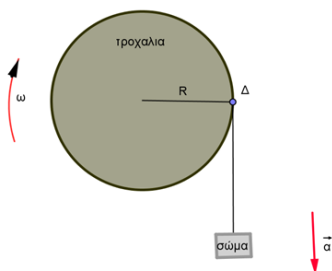


Ζητείται:

- α) Να συγκριθούν η ταχύτητα πτώσης του Σ και η ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας.
- β) Η γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας 2s αφού αφήσουμε το σώμα ελεύθερο.
- γ) Όταν το σώμα έχει κατέβει κατά $h=8\text{m}$, πόσες στροφές θα έχει εκτελέσει η τροχαλία.
- δ) Τη χρονική στιγμή $t=4\text{s}$ κόβουμε το νήμα και το σώμα πλέον πέφτει με επιτάχυνση $g=10\text{m/s}^2$. Να βρεθεί η γωνία που διέγραψε η τροχαλία από τη στιγμή που κόψαμε το νήμα έως τη στιγμή που το σώμα απέχει από την τροχαλία $\Delta X=36\text{m}$.

Λύση

α) Το σημείο Δ είναι το σημείο επαφής μεταξύ του σχοινιού και της τροχαλίας (θεωρούμε ότι ανήκει στην τροχαλία) και επειδή το νήμα δε γλιστρά θα έχει ίδια ταχύτητα με το σώμα. Οπότε η ταχύτητα του σώματος Σ κάθε στιγμή θα είναι ίση με την ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας.



$$v_{\text{σώματος}} = v_{\Delta} = \omega \cdot R$$

β) Παίρνοντας το ρυθμό μεταβολής της παραπάνω σχέσης έχουμε:

$$\frac{dv_{\text{σώματος}}}{dt} = \frac{d(\omega \cdot R)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_{\text{σώματος}}}{dt} = R \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_{\text{σώματος}} = R \cdot a_{\gamma\omega\nu}$$

$$\text{Επομένως } a_{\gamma\omega\nu} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Η τροχαλία εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση επομένως

$$\omega = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

γ) Επειδή το σώμα εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση βρίσκουμε το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε να περάσει για να πέσει το σώμα κατά $h = 8\text{m}$

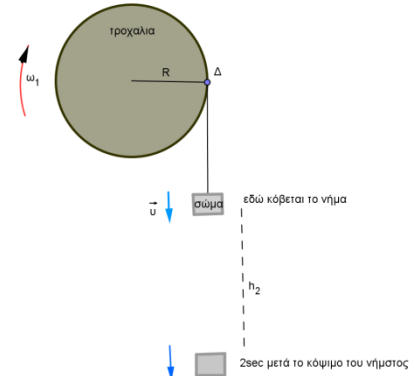
$$h = \frac{1}{2} \alpha \cdot t^2 \Rightarrow t = 4\text{s}$$

Η γωνία που έχει διαγράψει η τροχαλία έως τότε είναι

$$\theta = \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 \Rightarrow \theta = 40\text{rad}$$

Και οι στροφές είναι:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{20}{\pi} \text{ στροφές}$$



δ) Από το προηγούμενο ερώτημα βλέπουμε ότι την $t=4\text{s}$ το σώμα έχει κατέβει κατά 8m και έχει αποκτήσει ταχύτητα $u = a \cdot t = 4\text{m/s}$. Στη συνέχεια και αφού κόψουμε το νήμα το σώμα εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με $a=g$ και $u_0=4\text{m/s}$ μετατοπιζόμενο κατακόρυφα κατά $h_2 = (36-8)\text{m} = 28\text{m}$.

Στο ίδιο χρονικό διάστημα t_2 η τροχαλία εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.

Το ύψος που διανύει στην κατακόρυφη κίνηση του το σώμα δίνεται από την σχέση:

$$h_2 = u_0 \cdot t_2 + \frac{1}{2} \cdot g \cdot t_2^2 \text{ και λύνοντας το τριώνυμο (αποκλείοντας αρνητικές ρίζες)}$$

Βρίσκουμε ότι $t_2=2\text{s}$.

Ο χρόνος που βρήκαμε είναι ο χρόνος που χρειάζεται το σώμα για να διανύσει τα επιπλέον 28m αφού κόψαμε το νήμα και μετά.

Η γωνιακή ταχύτητα που έχει αποκτήσει η τροχαλία την στιγμή που κόψαμε το νήμα είναι:

$$\omega_1 = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η γωνία που έχει διαγράψει η τροχαλία από την στιγμή που κόψαμε το νήμα και μετά είναι

$$\theta_2 = \omega_1 \cdot t_2 \Rightarrow \theta = 40\text{rad}$$

Οι στροφές που έκανε η τροχαλία είναι:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{20}{\pi} \text{ στροφές}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 29/12/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

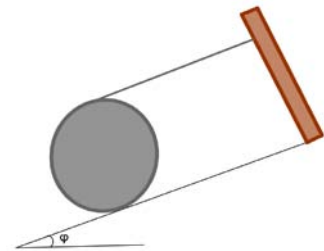
ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ο δίσκος ισορροπεί με τη βοήθεια ενός νήματος παράλληλου στο κεκλιμένο επίπεδο. Αν το βάρος του δίσκου είναι $w=10$ N και η γωνία του κεκλιμένου επιπέδου είναι $\varphi=30^\circ$, να βρεθούν:



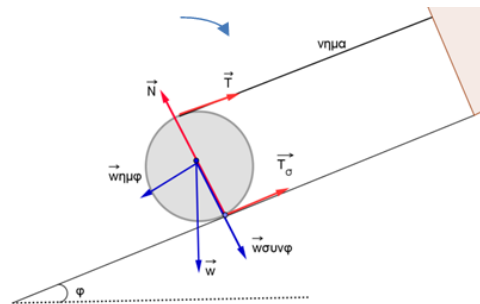
α) η συνισταμένη ροπή των δυνάμεων που δέχεται ο δίσκος ως προς το κέντρο του K.

β) η δύναμη που δέχεται ο τροχός από το νήμα.

γ) η στατική τριβή στον δίσκο καθώς και το μέτρο της δύναμης που ασκεί το κεκλιμένο επίπεδο στο δίσκο.

Λύση

Στο δίσκο ασκούνται τρεις δυνάμεις: το βάρος w , που αναλύεται σε δυο συνιστώσες $w \cdot \sin \varphi$ και σε $w \cdot \cos \varphi$, η τάση του νήματος T η οποία είναι παράλληλη στο κεκλιμένο επίπεδο και η δύναμη του επιπέδου η οποία αναλύεται σε δύο συνιστώσες την κάθετη δύναμη N από το επίπεδο στο σώμα και την στατική τριβή T_s . Όλες οι δυνάμεις φαίνονται στο σχήμα (εκτός της δύναμης του επιπέδου η οποία δεν σχεδιάστηκε για να μη φορτωθεί με δυνάμεις το σχήμα. Ο σχεδιασμός της δεν είναι απαραίτητος στο ερώτημα αυτό.)



α) Αφού το στερεό ισορροπεί ισχύει:

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2)$$

$$\sum \tau = 0 \quad (3)$$

Η εξίσωση (3) ισχύει ως προς οποιοδήποτε σημείο, άρα θα ισχύει και ως προς το Κ.

β) Από τη σχέση (3) έχουμε: $\sum \tau = 0 \Rightarrow T \cdot R - T_{\sigma} \cdot R = 0 \Leftrightarrow T \cdot R = T_{\sigma} \cdot R \Leftrightarrow T = T_{\sigma} \quad (4)$

Από την (1) έχουμε:

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T + T_{\sigma} = w \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow$$

$$2T = w \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow T = 2,5\text{N}$$

γ) Από τη σχέση (4) προκύπτει πως $T_{\sigma} = 2,5\text{ N}$.

Η δύναμη του επιπέδου είναι η συνισταμένη δυο κάθετων μεταξύ τους δυνάμεων της Ν και της Τ. Από την εξίσωση $\sum F_y = 0$ υπολογίζουμε την κάθετη δύναμη Ν του επιπέδου

στο σώμα: $N = w \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N = 10 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{ N} \Rightarrow N = 5\sqrt{3}\text{N}$

Η δύναμη του επιπέδου είναι:

$$A = \sqrt{N^2 + T_{\sigma}^2} \Rightarrow A = \sqrt{81,25}\text{N}$$

Άσκηση 2.

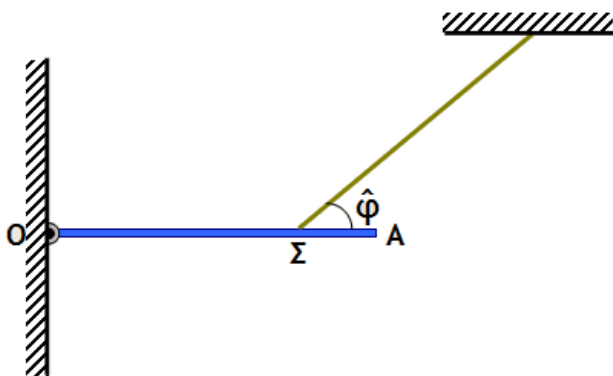
Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει μήκος $L = 4\text{ m}$, μάζα $M = 30\text{ kg}$ και είναι αρθρωμένη στο άκρο της O . Η ράβδος ισορροπεί με τη βοήθεια νήματος, το οποίο είναι δεμένο σε σημείο Σ της ράβδου και σχηματίζει με τη ράβδο γωνία $\hat{\varphi} = 30^\circ$. Η απόσταση $(O\Sigma)$ είναι ίση με 3 m . Να βρεθούν:

α) το μέτρο της τάσης $\vec{N}$ του νήματος.

β) το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}$ που ασκεί η άρθρωση στη ράβδο.

γ) το μέτρο και η κατεύθυνση της δύναμης $\vec{F}'$ που θα ασκήσει η άρθρωση στη ράβδο, αν το νήμα δεθεί σε σημείο K της ράβδου, τέτοιο, ώστε η απόσταση (OK) να είναι ίση με $\frac{4}{3}\text{ m}$ και το νήμα να σχηματίζει την ίδια γωνία $\hat{\varphi}$ με τη ράβδο.

Δίνεται: $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.



Λύση

Για την επίλυση της άσκησης (2), θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

α) θα επιλέξουμε κατάλληλους νόμους.

β) θα κάνουμε το σχήμα.

γ) θα γράψουμε δεδομένα – ζητούμενα.

δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.

ε) θα εξειδικεύσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.

στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και

ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

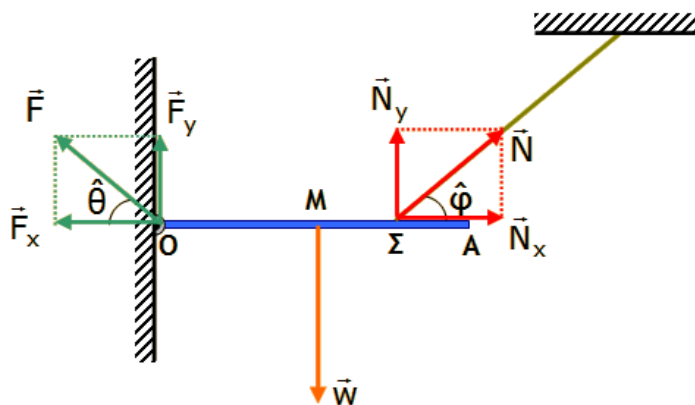
Λέγοντας στην άσκηση ότι η ράβδος ισορροπεί, εννοούμε ότι παραμένει ακίνητη, δηλαδή δεν εκτελεί μεταφορική ή στροφική κίνηση. Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι συνθήκες:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad \begin{cases} \Sigma \vec{F}_x = 0 & (1) \\ \Sigma \vec{F}_y = 0 & (2) \end{cases}$$

και

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \quad (3)$$

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στη ράβδο:



- Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται από την άρθρωση (O) στη ράβδο. Η δύναμη $\vec{F}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες $\vec{F}_x$ και $\vec{F}_y$.
- Η δύναμη $\vec{N}$ ασκείται από το νήμα στη ράβδο. Η δύναμη $\vec{N}$ αναλύεται σε δύο συνιστώσες $\vec{N}_x$ και $\vec{N}_y$.
- Η δύναμη $\vec{w}$ ασκείται από τη Γη στη ράβδο.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$L = 4 \text{ m}$ $M = 30 \text{ kg}$ $\hat{\phi} = 30^\circ$ $(OS) = 3 \text{ m}$ $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $\gamma) (OK) = \frac{4}{3} \text{ m}$	α) $N =$; β) $\vec{F} =$; γ) $\vec{F}' =$;

α) Για τη χρήση της σχέσης (3), θέτουμε θετική την αριστερόστροφη φορά και χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές. Επειδή $\Sigma\tau = 0$, οι ροπές μπορούν να υπολογιστούν ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε να υπολογίσουμε τις ροπές ως προς το σημείο Ο, ώστε να μηδενιστεί η ροπή της άγνωστης δύναμης $\vec{F}$. Έχουμε:

Ως προς το σημείο Ο:

$$\tau_w = -w \cdot (OM) = -w \cdot \frac{L}{2}$$

$$\tau_{N_x} = 0$$

$$\tau_{N_y} = +N_y \cdot (O\Sigma)$$

$$\tau_F = 0$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $\Sigma\tau = 0$ έχουμε:

$$\tau_w + \tau_{N_x} + \tau_{N_y} + \tau_F = 0 \Rightarrow -w \cdot \frac{L}{2} + 0 + N_y \cdot (O\Sigma) + 0 = 0 \Rightarrow N_y = \frac{wL}{2(O\Sigma)}$$

Επειδή $w = M \cdot g = 300 \text{ N}$, με αντικατάσταση βρίσκουμε ότι:

$$N_y = 200 \text{ N}$$

Από την ανάλυση της τάσης του νήματος προκύπτει:

$$N_y = N \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow N = \frac{N_y}{\eta\mu 30} \Rightarrow$$

$$\boxed{N = 400 \text{ N}}$$

$$N_x = N \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Rightarrow N_x = 400 \cdot \sigma\upsilon\nu 30 \text{ N} \Rightarrow N_x = 200\sqrt{3} \text{ N}$$

β) Από τις (1) και (2), για τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο, έχουμε:

$$(1) \Rightarrow F_x = N_x \Rightarrow F_x = 200\sqrt{3} \text{ N}$$

$$(2) \Rightarrow F_y + N_y = w \Rightarrow F_y = 100 \text{ N}$$

Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος υπολογίζουμε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$:

$$F^2 = F_x^2 + F_y^2 \Rightarrow F^2 = (200\sqrt{3} \text{ N})^2 + (100 \text{ N})^2 \Rightarrow F^2 = 100^2 (4\sqrt{3}^2 + 1) \text{ N}^2 \Rightarrow$$

$$F^2 = 100^2 \cdot 13 \text{ N}^2 \Rightarrow$$

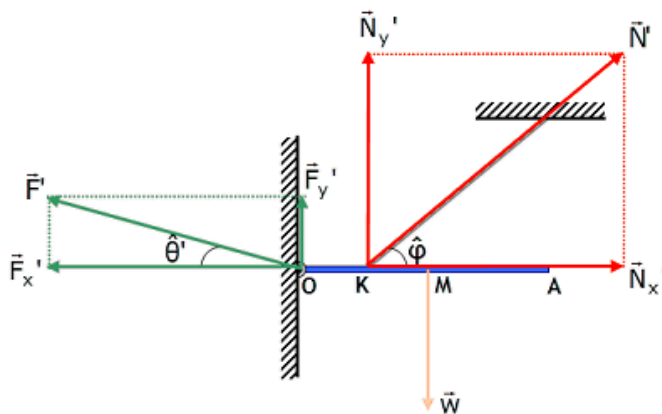
$$\boxed{F = 100 \cdot \sqrt{13} \text{ N}}$$

Η γωνία $\hat{\theta}$ που σχηματίζει η $\vec{F}$ με την $\vec{F}_x$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon\phi\hat{\theta} = \frac{F_y}{F_x} \Rightarrow \varepsilon\phi\hat{\theta} = \frac{100 \text{ N}}{200\sqrt{3} \text{ N}} \Rightarrow$$

$$\varepsilon\phi\hat{\theta} = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

γ) Επανασχεδιάζουμε το σύστημα, ώστε το νήμα να ασκεί τάση στο σημείο Κ της ράβδου, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Θα χρησιμοποιήσουμε πάλι τη σχέση (3), για να υπολογίσουμε τις ροπές ως προς το σημείο O. Έχουμε:

Ως προς το σημείο O:

$$\tau_w = -w \cdot (OM) = -w \cdot 2 = -2w$$

$$\tau_{N_x}' = 0$$

$$\tau_{N_y}' = +N_y' \cdot (OK) = +N_y' \cdot \frac{4}{3}$$

$$\tau_F' = 0$$

Με αντικατάσταση στη σχέση $\Sigma\tau = 0$ έχουμε:

$$\tau_w + \tau_{N_x}' + \tau_{N_y}' + \tau_F' = 0 \Rightarrow -2w + 0 + N_y' \cdot \frac{4}{3} + 0 = 0 \Rightarrow N_y' = 450 \text{ N}$$

Από την ανάλυση της τάσης του νήματος προκύπτει:

$$N_y' = N' \cdot \eta\mu\phi \Rightarrow N' = \frac{N_y'}{\eta\mu 30} \Rightarrow N' = 900 \text{ N}$$

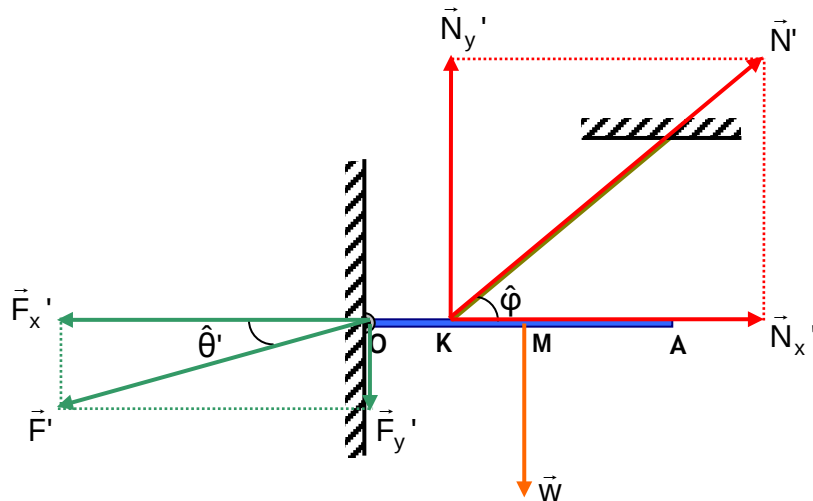
$$N_x' = N' \cdot \sigma\upsilon\nu\phi \Rightarrow N_x' = 900 \cdot \sigma\upsilon\nu 30 \text{ N} \Rightarrow N_x' = 450\sqrt{3} \text{ N}$$

Από τις (1) και (2), για τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο, έχουμε:

$$(1) \Rightarrow F_x' = N_x' \Rightarrow F_x' = 450\sqrt{3} \text{ N}$$

$$(2) \Rightarrow F_y' + N_y' = w \Rightarrow F_y' = -150 \text{ N}$$

Το αρνητικό πρόσημο στο μέτρο της F_y' σημαίνει ότι η F_y' έχει μέτρο $F_y' = 150 \text{ N}$ και αντίθετη κατεύθυνση. Δηλαδή, οι σωστές κατευθύνσεις των δυνάμεων είναι οι εξής:



Με χρήση του Πυθαγορείου Θεωρήματος υπολογίζουμε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}'$:

$$(F')^2 = (F_x')^2 + (F_y')^2 \Rightarrow (F')^2 = (450\sqrt{3} \text{ N})^2 + (150 \text{ N})^2 \Rightarrow (F')^2 = 150^2 (9\sqrt{3}^2 + 1) \text{ N}^2 \Rightarrow$$

$$(F')^2 = 150^2 \cdot 28 \text{ N}^2 \Rightarrow$$

$$\boxed{F' = 150\sqrt{28} \text{ N}}$$

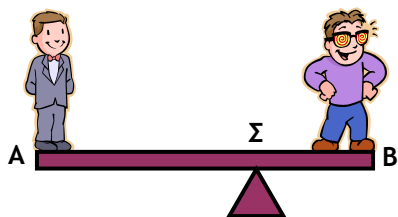
Η γωνία $\hat{\theta}'$ που σχηματίζει η $\vec{F}'$ με την $\vec{F}_x'$ υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon\phi\hat{\theta}' = \frac{F_y'}{F_x'} \Rightarrow \varepsilon\phi\hat{\theta}' = \frac{150 \text{ N}}{450\sqrt{3} \text{ N}} \Rightarrow$$

$$\boxed{\varepsilon\phi\hat{\theta}' = \frac{\sqrt{3}}{9}}$$

Άσκηση 3.

Στα άκρα Α και Β της αβαρούς τραμπάλας του σχήματος βρίσκονται δύο παιδιά. Το παιδί που βρίσκεται στο άκρο Α έχει βάρος μέτρου $w_A = 200 \text{ N}$, ενώ το άλλο παιδί έχει βάρος μέτρου $w_B = 800 \text{ N}$.



Το μήκος της τραμπάλας είναι $L = 2 \text{ m}$.

α) Να βρεθεί σε πόση απόσταση από το άκρο Α πρέπει να τοποθετηθεί στήριγμα (Σ), ώστε η τραμπάλα να ισορροπεί.

β) Να βρεθεί η δύναμη στήριξης $\vec{F}$ που ασκεί το στήριγμα (Σ) στην τραμπάλα.

γ) Αν το παιδί που βρίσκεται στο άκρο Α σταθεί πιο κοντά στο στήριγμα (Σ), προς ποια μεριά θα ανατραπεί η τραμπάλα;

Λύση

Για την επίλυση της άσκησης (1) θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

α) θα επιλέξουμε κατάλληλους νόμους.

β) θα κάνουμε το σχήμα.

γ) θα γράψουμε δεδομένα – ζητούμενα.

δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.

ε)θα εξειδικεύσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.

στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και

ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

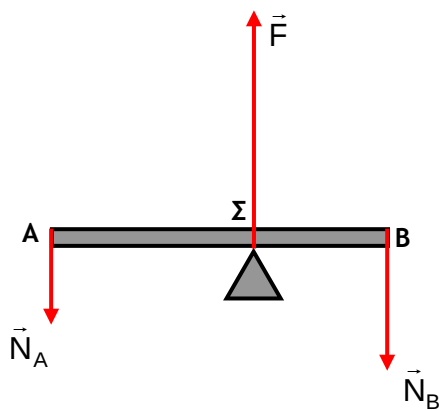
Λέγοντας στην άσκηση ότι η τραμπάλα ισορροπεί, εννοούμε ότι παραμένει ακίνητη, δηλαδή δεν εκτελεί μεταφορική ή στροφική κίνηση. Για να ισορροπεί η τραμπάλα πρέπει να ικανοποιούνται ταυτόχρονα οι συνθήκες:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad (1)$$

και

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \quad (2)$$

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στην τραμπάλα:



- Οι δυνάμεις $\vec{N}_A$, $\vec{N}_B$ ασκούνται από τα παιδιά στην τραμπάλα.
- Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται από το στήριγμα (Σ) στην τραμπάλα.

Αφού η τραμπάλα ισορροπεί ακίνητη, τα παιδιά που στέκονται πάνω της θα ισορροπούν ακίνητα. Για κάθε παιδί που ισορροπεί ικανοποιείται η συνθήκη:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \quad (3)$$

Στο σχήμα φαίνονται οι δυνάμεις που ασκούνται στα παιδιά:



- Οι δυνάμεις $\vec{N}_A'$, $\vec{N}_B'$ ασκούνται από την τραμπάλα στα παιδιά.
- Οι δυνάμεις $\vec{W}_A$, $\vec{W}_B$ ασκούνται από τη Γη στα παιδιά.

Από τον 3^ο Νόμο Newton (Αρχή Δράσης - Αντίδρασης) έχουμε:

$$\vec{N}_A = -\vec{N}_A' \Rightarrow N_A = N_A' \quad (4)$$

$$\vec{N}_B = -\vec{N}_B' \Rightarrow N_B = N_B' \quad (5)$$

Δεδομένα	Ζητούμενα
$w_A = 200 \text{ N}$ $w_B = 800 \text{ N}$ $L = 2 \text{ m}$ γ) παιδί Α πιο κοντά στο Σ	α) $(A\Sigma) = x = ?$ β) $\vec{F} = ?$ γ) φορά ανατροπής=?

α) Για τη χρήση της σχέσης (2), θέτουμε θετική την αριστερόστροφη φορά και χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές. Επειδή $\Sigma\tau = 0$, οι ροπές μπορούν να υπολογιστούν ως προς οποιοδήποτε σημείο. Επιλέγουμε να υπολογίσουμε τις ροπές ως προς το σημείο Σ, ώστε να μηδενιστεί η ροπή της άγνωστης δύναμης $\vec{F}$. Έχουμε:

Ως προς το σημείο Σ:

$$\tau_A = +N_A \cdot (A\Sigma)$$

$$\tau_B = -N_B \cdot (B\Sigma)$$

$$\tau_F = 0$$

Θέτουμε $(A\Sigma) = x$, $(B\Sigma) = L - x$. Με αντικατάσταση στη σχέση $\Sigma\tau = 0$ έχουμε:

$$\tau_A + \tau_B + \tau_F = 0 \Rightarrow N_A \cdot x - N_B \cdot (L - x) + 0 = 0 \Rightarrow N_A \cdot x = N_B \cdot (L - x) \quad (6)$$

Από την (3), για τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στα παιδιά, έχουμε:

$$N_A' = w_A \text{ και}$$

$$N_B' = w_B$$

Με χρήση των (4) και (5), έχουμε:

$$N_A = w_A \text{ και}$$

$$N_B = w_B$$

Με αντικατάσταση στην (6), έχουμε:

$$w_A \cdot x = w_B \cdot (L - x) \Rightarrow w_A \cdot x = w_B \cdot L - w_B \cdot x \Rightarrow w_A \cdot x + w_B \cdot x = w_B \cdot L$$

Επιλύοντας ως προς x, έχουμε:

$$x = \frac{w_B \cdot L}{w_A + w_B}$$

Κάνοντας αντικατάσταση και πράξεις:

$$x = 1,6 \text{ m}$$

β) Από την (1), για τα μέτρα των δυνάμεων που ασκούνται στην τραμπάλα, έχουμε:

$$F = N_A + N_B$$

Όμως δείξαμε ότι:

$$N_A = w_A \quad \text{και}$$

$$N_B = w_B$$

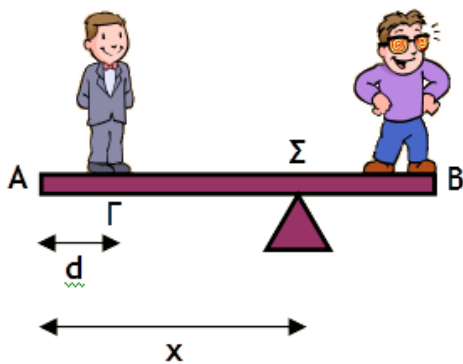
Επομένως:

$$F = w_A + w_B$$

Κάνοντας αντικατάσταση και πράξεις:

$$F = 1000\text{N}$$

γ) Έστω ότι το παιδί στο άκρο Α πλησιάζει κατά απόσταση d το στήριγμα (Σ) και φτάνει στο σημείο Γ του σχήματος:



Θέτουμε $(\Gamma\Sigma) = (A\Sigma) - d = x - d$ και $(B\Sigma) = L - x$.

Ως προς το σημείο Σ :

$$\tau_A = +N_A \cdot (x - d)$$

$$\tau_B = -N_B \cdot (L - x)$$

$$\tau_F = 0$$

Για τη συνολική ροπή έχουμε:

$$\Sigma\tau = \tau_A + \tau_B + \tau_F = N_A \cdot (x - d) - N_B \cdot (L - x)$$

Όμως δείξαμε ότι:

$$N_A = w_A \quad \text{και}$$

$$N_B = w_B$$

Επομένως:

$$\Sigma \tau = w_A \cdot (x - d) - w_B \cdot (L - x) = w_A \cdot x - w_A \cdot d - w_B \cdot (L - x)$$

Επειδή όμως, όπως δείξαμε:

$$w_A \cdot x = w_B \cdot (L - x)$$

έχουμε:

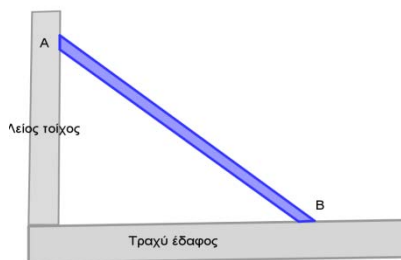
$$\Sigma \tau = -w_A \cdot d < 0$$

Επειδή $\Sigma \tau < 0$ η τραμπάλα θα ανατραπεί δεξιόστροφα.

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Μια ράβδος ομογενής AB μήκους L και βάρους $w=100\text{N}$ ισορροπεί όπως φαίνεται στο



σχήμα στηριζόμενη στο άκρο της A σε λείο τοίχο και στο άκρο της B σε τραχύ έδαφος.

Δίνεται ότι η ελάχιστη γωνία για την οποία η ράβδος δεν ολισθαίνει είναι $\varphi=45^\circ$ και ότι $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

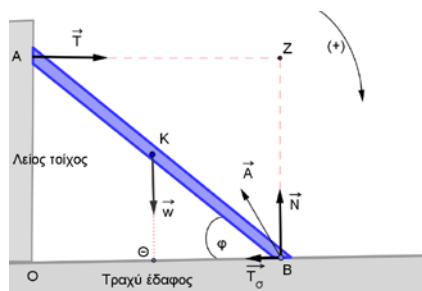
Ζητείται:

α) Η κάθετη δύναμη που ασκεί το έδαφος στη ράβδο.

β) Ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου-εδάφους καθώς και τη δύναμη που ασκεί ο λείος τοίχος στη ράβδο.

γ) Το μέτρο της συνολικής δύναμης του εδάφους.

Λύση



Η ράβδος δέχεται 3 δυνάμεις όπως στο σχήμα. Το βάρος της w , την κάθετη δύναμη από τον τοίχο T και την δύναμη από το έδαφος A . Επειδή ο τοίχος είναι λείος η T είναι κάθετη στον τοίχο και η A έχει τυχαία κατεύθυνση επειδή το έδαφος είναι τραχύ.

Η δύναμη από το έδαφος A αναλύεται στην κάθετη δύναμη N και στην στατική τριβή T_s .

(ένας καλός τρόπος για να σχεδιάζουμε τις διευθύνσεις των δυνάμεων είναι να έχουμε υπόψη τον κανόνα που λέει ότι “... όταν ένα σώμα ισορροπεί υπό την επίδραση τριών δυνάμεων οι φορείς τους περνάνε από το ίδιο σημείο”.)

α) Επειδή η ράβδος ισορροπεί θα ισχύει.

$$\sum F_x = 0 \quad (1)$$

$$\sum F_y = 0 \quad (2)$$

$\sum \tau = 0$ (3) ως προς το σημείο Β (Η επιλογή του σημείου γίνεται με τέτοιο τρόπο ώστε από εκείνο το σημείο να περνά μια άγνωστη δύναμη).

Από την (2) έχουμε ότι $w = N \Rightarrow N = 100\text{N}$

β) Από την (3) έχουμε:

(θεωρούμε αυθαίρετα θετική φορά την δεξιόστροφη φορά του σχήματος)

$$T(AO) - w \frac{(OB)}{2} = 0 \Leftrightarrow$$

$$T \cdot L \cdot \eta\mu\varphi = w \cdot \frac{L}{2} \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi \Leftrightarrow$$

$$T = \frac{w}{2 \cdot \epsilon\varphi\varphi} \Leftrightarrow$$

$$T = 50\text{N}$$

Από τη σχέση (1) έχουμε ότι $T = T_\sigma$, άρα $T_\sigma = 50\text{N}$

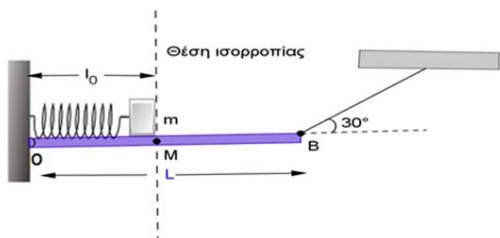
Επειδή η ράβδος οριακά δεν ολισθαίνει, η στατική τριβή θα είναι ίση με την οριακή τριβή:

$$T_\sigma = T_{op} = \mu_\sigma N, \text{ οπότε: } \mu_\sigma = \frac{T_\sigma}{N} \Rightarrow \frac{50}{100} \Rightarrow \mu_\sigma = 0,5.$$

γ) Η αντίδραση του εδάφους είναι η συνισταμένη των δυνάμεων T και N οπότε έχουμε:

$$A = \sqrt{N^2 + T_\sigma^2} \Leftrightarrow A = 50\sqrt{5}\text{N}$$

Πρόβλημα 2.



Η ράβδος OB είναι ομογενής έχει βάρος $w=10\text{N}$ και έχει μήκος $L=2\text{m}$. Το ένα άκρο της O στηρίζεται σε τοίχο με άρθρωση, ενώ στο άλλο έχουμε δέσει νήμα το οποίο σχηματίζει γωνία $\varphi=30^\circ$ με το οριζόντιο επίπεδο. Πάνω στη ράβδο βρίσκεται οριζόντιο ελατήριο σταθεράς $K=100\frac{\text{N}}{\text{m}}$ που στο ένα άκρο του έχουμε δέσει σώμα μάζας $m=1\text{kg}$ που

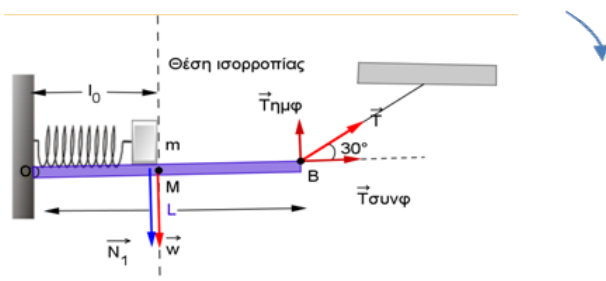
ισορροπεί ακίνητο. Το φυσικό μήκος του ελατηρίου είναι $\ell_0 = \frac{L}{2} = 1\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t=0$ εκτοξεύεται το σώμα με ταχύτητα $u=5\text{m/s}$ προς τα δεξιά, οπότε το σώμα ξεκινάει να εκτελεί γραμμική αρμονική ταλάντωση. (Υπόδειξη: Ως θετική φορά θεωρείστε τη κατεύθυνση προς τα δεξιά.)

Να βρεθούν:

- α) Η τάση του νήματος πριν την εκτόξευση του σώματος.
- β) Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος.
- γ) Η τάση του νήματος τη χρονική στιγμή $t=0,15\cdot\pi\text{ s}$.
- δ) Το μέτρο της δύναμης που δέχεται το σώμα από την άρθρωση τη χρονική στιγμή $t=0,15\cdot\pi\text{ s}$.

Λύση

α) Παίρνουμε ισορροπία ροπών ως προς το O επειδή από εκείνο το σημείο περνά άγνωστη δύναμη και έχουμε (για καλύτερη κατανόηση των δυνάμεων που ασκούνται στη ράβδο μπορεί κάποιος να κοιτάξει στο παρακάτω σχήμα):



Η δύναμη N_1 είναι ίση με το βάρος του σώματος ($N_1=W=mg=10\text{N}$).

$$\sum \tau = 0 \text{ οπότε } w \cdot \frac{L}{2} + N_1 \cdot \frac{L}{2} - T \eta \mu \varphi \cdot L = 0$$

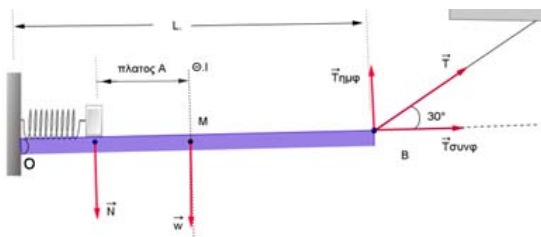
Από τη σχέση αυτή προκύπτει ότι $T = 20 \text{ N}$.

β) Αρχικά το σώμα είναι στη θέση ισορροπίας από όπου εκτοξεύεται προς τα δεξιά. Άρα η ταχύτητα εκτόξευσης είναι η μέγιστη ταχύτητα ταλάντωσης. Το πλάτος της ταλάντωσης του σώματος υπολογίζεται λοιπόν από τη σχέση:

$v_{\max} = A \cdot \omega$, οπότε εύκολα βρίσκουμε ότι $A = 0,5 \text{ m}$.

$$\text{όπου } \omega = \frac{2\pi}{T} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \text{ και } T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0,2\pi \text{ s}$$

γ)



Επειδή η αρμονική ταλάντωση γίνεται χωρίς αρχική φάση, η απομάκρυνση δίνεται από τη σχέση:

$$x = A \cdot \eta \mu \omega t \Rightarrow x = 0,5 \eta \mu 10t (\text{SI})$$

Θέτοντας όπου $t = 0,15 \cdot \pi \text{ s}$ βρίσκουμε ότι $x = -0,5 \text{ m}$. Δηλαδή εκείνη τη στιγμή το σώμα είναι στην αριστερή ακραία θέση της ταλάντωσης του. Στο σχήμα φαίνεται η ακριβής θέση του σώματος και οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος εκείνη τη στιγμή (δεν έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στην ράβδο από την άρθρωση επειδή δεν είναι χρήσιμες για την επίλυση αυτού του ερωτήματος).

Από ισορροπία των ροπών ως προς το O έχουμε:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow$$

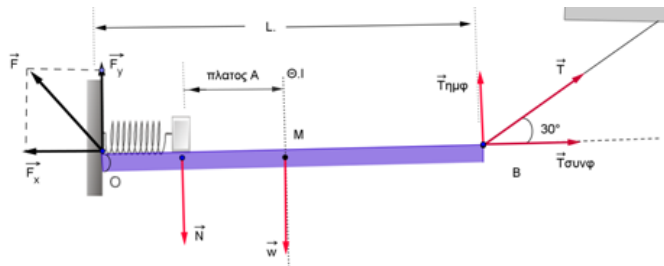
$$N \left(\frac{L}{2} - A \right) + w \frac{L}{2} - T \eta \mu \varphi \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$N \left(\frac{L}{2} - A \right) + w \frac{L}{2} = T \eta \mu \varphi \cdot L \Rightarrow$$

$$10 \cdot 0,5 + 10 \cdot 1 = T \cdot \frac{1}{2} \cdot 2 \Rightarrow$$

$$T = 15\text{N}$$

δ)



Επειδή δε γνωρίζουμε τη διεύθυνση της δύναμης από την άρθρωση, την αναλύουμε σε δύο συνιστώσες, μία οριζόντια και μία κατακόρυφο και υπολογίζουμε τις συνιστώσες αυτές F_x και F_y :

$$\sum F_x = 0 \Rightarrow T \cdot \sigma\upsilon\upsilon\eta\phi = F_x \Rightarrow F_x = 15 \frac{\sqrt{3}}{2} \text{N και}$$

$$\sum F_y = 0 \Rightarrow F_y + T\eta\mu\phi = w + N \Rightarrow F_y = 12,5\text{N}$$

Επομένως η δύναμη F θα είναι ίση με

$$F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2} \Rightarrow F = 5\sqrt{3}\text{N}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 18/7/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

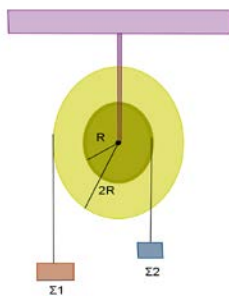
ΕΝΟΤΗΤΑ 2: ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Για να ισορροπεί η διπλή τροχαλία του σχήματος θα πρέπει ο λόγος $\frac{m_1}{m_2}$ να είναι ίσος με:



α) $\frac{m_1}{m_2} = 2$

β) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$

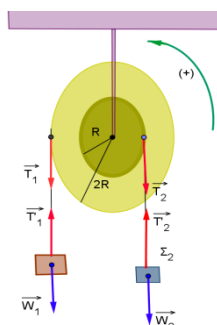
γ) $\frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{3}$

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η β.

Στην τροχαλία έχουν σχεδιαστεί μόνο οι δυνάμεις που προκαλούν ροπή. Για τις δυνάμεις αυτές ισχύει $T_1 = W_1$ και $T_2 = W_2$. Παίρνουμε ισορροπία ροπών ως προς το κέντρο της



τροχαλίας.

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow T_1 \cdot 2R - T_2 \cdot R = 0 \Rightarrow$$

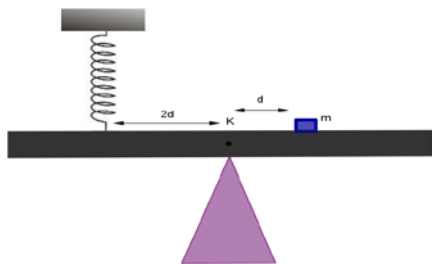
$$w_1 \cdot 2R = w_2 \cdot R \Rightarrow 2m_1 g R = m_2 g R \Rightarrow$$

$$2m_1 = m_2 \Rightarrow \frac{m_1}{m_2} = \frac{1}{2}$$

Επομένως σωστή απάντηση είναι η β.

Ερώτηση 2.

Η ράβδος AB ισορροπεί στηριζόμενη στο υποστήριγμα που διέρχεται από το μέσο της Κ. Σε απόσταση d από το Κ προς τα δεξιά υπάρχει σώμα μάζας m που είναι τοποθετημένο



πάνω στη ράβδο. Σε απόσταση $2d$ προς τα αριστερά από το Κ υπάρχει ελατήριο το οποίο συγκρατεί την ράβδο σε οριζόντια θέση.

1) Το ελατήριο είναι:

- α) σε επιμήκυνση.
- β) στο φυσικό του μήκος.
- γ) σε συσπίρωση.

Ποιά απάντηση είναι σωστή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

2) Αν $K = 100 \text{ N/m}$, $m = 10 \text{ kg}$ και $g = 10 \text{ m/s}^2$, η παραμόρφωση του ελατηρίου είναι:

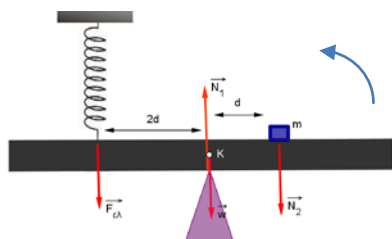
- α) $\Delta \ell = 0,5 \text{ m}$.
- β) $\Delta \ell = 0$.
- γ) $\Delta \ell = 1 \text{ m}$.

Ποιά απάντηση είναι σωστή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

- 1) Σωστή απάντηση η γ.
- 2) Σωστή απάντηση η α.

1) Η ράβδος ισορροπεί και δέχεται 4 δυνάμεις όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.



Οι δυνάμεις N_1 και w έχουν ροπές ως προς το K ίσες με 0. Η N_2 , η οποία είναι ίση με το βάρος του σώματος, τείνει να στρέψει τη ράβδο δεξιόστροφα (ομόρροπα με τους δείκτες του ρολογιού). Για να ισορροπεί η ράβδος πρέπει το ελατήριο να “σπρώχνει” τη ράβδο με μία δύναμη $F_{ελ}$, η οποία τείνει να την περιστρέψει αριστερόστροφα όπως στο σχήμα.

Άρα, το ελατήριο είναι σε συσπείρωση.

2) Από την ισορροπία ροπών ως προς το K έχουμε:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow F_{ελ} \cdot 2d - N_2 \cdot d = 0 \Rightarrow$$

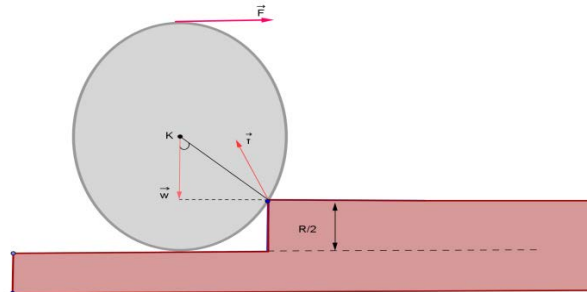
$$F_{ελ} \cdot 2d = N_2 \cdot d = 0 \Rightarrow F_{ελ} = \frac{N_2}{2} = 50\text{N}$$

$$F_{ελ} = k \cdot \Delta \ell \Rightarrow \Delta \ell = 0,5\text{m}$$

Επομένως η σωστή απάντηση είναι η α.

Ερώτηση 3.

Η ελάχιστη τιμή της οριζόντιας δύναμης F που πρέπει να ασκήσουμε στο υψηλότερο σημείο του τροχού (όπως φαίνεται στο σχήμα) ώστε να καταφέρει να υπερπηδήσει το εμπόδιο που έχει ύψος $h = \frac{R}{2}$ είναι:



α) $F = W \frac{\sqrt{2}}{2}$.

β) $F = \frac{W}{2}$.

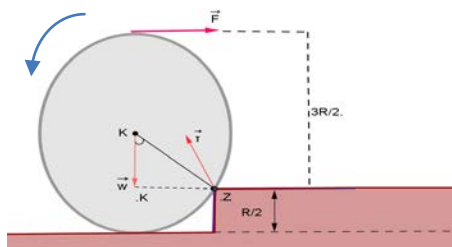
γ) $F = W \frac{\sqrt{3}}{3}$.

Ποιά απάντηση είναι σωστή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Τη στιγμή που ο κύλινδρος είναι έτοιμος (τείνει) να υπερπηδήσει το εμπόδιο οι δυνάμεις που δέχεται φαίνονται στο παρακάτω σχήμα. (Η δύναμη από το έδαφος, που είναι δύναμη επαφής, δεν έχει σχεδιαστεί γιατί τη στιγμή που ο κύλινδρος χάνει την επαφή του με το έδαφος η δύναμη αυτή μηδενίζεται).



Από την ισορροπία ροπών ως προς το Z έχουμε:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow w \cdot (KZ) - F \cdot \left(R + \frac{R}{2}\right) = 0 \Rightarrow$$

$$w \cdot (KZ) = F \cdot \frac{3R}{2} \Rightarrow F = \frac{2w \cdot (KZ)}{3R} \Rightarrow$$

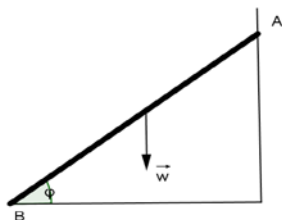
$$F = \frac{2w \frac{R\sqrt{3}}{2}}{3R} \Rightarrow F = \frac{2w \frac{\sqrt{3}}{2}}{3} \Rightarrow F = \frac{w\sqrt{3}}{3}$$

Η απόσταση (KZ) προκύπτει από τη σχέση: $(KZ)^2 + \left(\frac{R}{2}\right)^2 = R^2 \Rightarrow (KZ) = \frac{\sqrt{3}R}{2}$

Επομένως η σωστή απάντηση είναι η γ.

Ερώτηση 4.

Η ράβδος AB είναι ομογενής, έχει βάρος w και ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα.



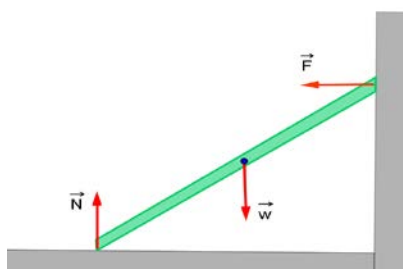
- α) Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει ο τοίχος και το δάπεδο να είναι λεία.
- β) Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει να είναι λείος ο τοίχος και το δάπεδο να έχει τριβή.
- γ) Για να ισορροπεί η ράβδος θα πρέπει να είναι λείο το δάπεδο και ο τοίχος να έχει τριβή.

Να χαρακτηριστεί κάθε πρόταση σαν σωστή ή λανθασμένη δικαιολογώντας την επιλογή σας.

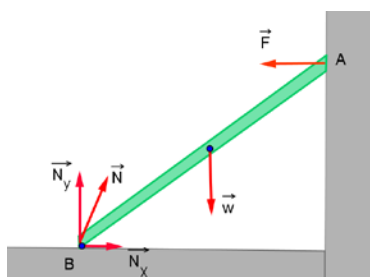
Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

α) Στην περίπτωση (α) (λείος τοίχος και λείο έδαφος) οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος φαίνονται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι στον οριζόντιο άξονα υπάρχει μόνο μια δύναμη (η F) οπότε η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα αυτό δεν θα είναι μηδέν και επομένως το σώμα δεν μπορεί να ισορροπεί.

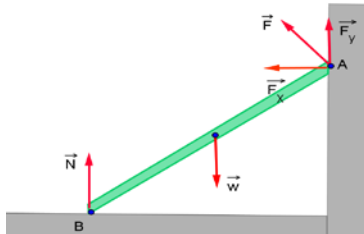


β) Στην περίπτωση (β) (λείος τοίχος και τραχύ έδαφος) οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος φαίνονται στο σχήμα. (Η δύναμη N από το έδαφος σχεδιάζεται να έχει τυχαία κατεύθυνση και όχι κάθετη όπως στην προηγούμενη περίπτωση). Παρατηρούμε ότι τόσο στον οριζόντιο άξονα όσο και στον κατακόρυφο υπάρχουν δυο αντίρροπες δυνάμεις, οπότε η συνισταμένη των δυνάμεων σε κάθε άξονα μπορεί να είναι μηδέν και επομένως



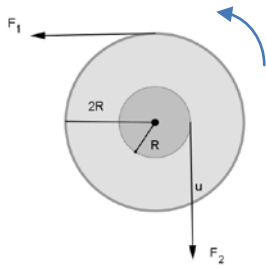
το σώμα μπορεί να ισορροπεί.

γ) Στην περίπτωση (γ) (τραχύς τοίχος και λείο έδαφος) οι δυνάμεις που δέχεται η ράβδος φαίνονται στο σχήμα. Παρατηρούμε ότι στον οριζόντιο άξονα υπάρχει μόνο μια δύναμη (η F_x) όποτε η συνισταμένη των δυνάμεων στον άξονα αυτό δεν θα είναι μηδέν και επομένως το σώμα και πάλι δεν μπορεί να ισορροπεί.



Ερώτηση 5.

Οι δύο ομόκεντροι δίσκοι του διπλανού σχήματος μπορούν να περιστρέφονται γύρω από



σταθερό άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους. Οι δίσκοι είναι κολλημένοι και μπορούν να περιστρέφονται σαν ένα σώμα. Ασκούμε στους δίσκους τις δυνάμεις F_1 και F_2 που φαίνονται στο σχήμα και τελικά παρατηρούμε ότι το σύστημα περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

Για τις δυνάμεις F_1 και F_2 ισχύει:

α) $F_1 = 2F_2$.

β) $F_2 = 2F_1$.

γ) $F_1 = F_2$.

Ποια απάντηση είναι σωστή; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση η β.

Επειδή η γωνιακή ταχύτητα είναι σταθερή, από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς το κοινό κέντρο των δυο δίσκων έχουμε:

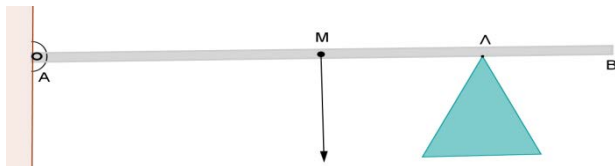
$$\begin{aligned}\sum \tau = 0 &\Rightarrow F_1 \cdot 2R - F_2 \cdot R = 0 \Rightarrow \\ F_1 \cdot 2R &= F_2 \cdot R \Rightarrow F_2 = 2F_1\end{aligned}$$

Άρα σωστή απάντηση είναι η β.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

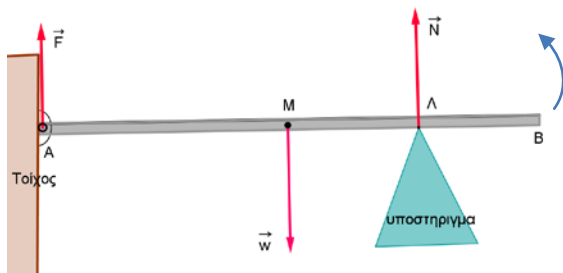
Ομογενής ράβδος AB μήκους $L = 4\text{m}$ και βάρους $w = 100\text{N}$ ισορροπεί οριζόντια στηριζόμενη σε κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση και στο σημείο της Λ σε υποστήριγμα $\left(M\Lambda = \frac{L}{4}\right)$. Η ράβδος ισορροπεί οριζόντια.



- α) Να βρεθεί η δύναμη N που δέχεται η ράβδος από το υποστήριγμα.
- β) Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση
- γ) Μετακινούμε το υποστήριγμα και το τοποθετούμε στο Z , το οποίο είναι το μέσο του AM . Πόση είναι πλέον η δύναμη που ασκεί το υποστήριγμα στη ράβδο;

Λύση

α) Στη ράβδο ασκούνται 3 δυνάμεις το βάρος της W , η δύναμη F από την άρθρωση και η δύναμη N από το υποστήριγμα, οι οποίες είναι σχεδιασμένες στο επόμενο σχήμα.



Επειδή η F είναι άγνωστη εφαρμόζουμε ισορροπία ροπών ως προς το σημείο A και βρίσκουμε:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow N \cdot (A\Lambda) - w \cdot (AM) = 0 \Rightarrow$$

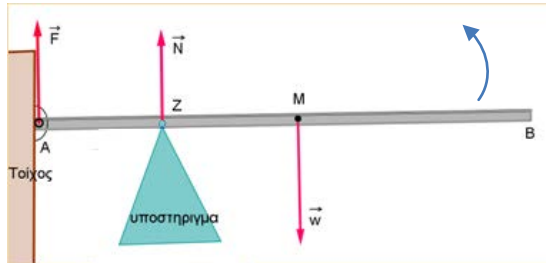
$$N \cdot (A\Lambda) = w \cdot (AM) \Rightarrow$$

$$N = \frac{w \cdot (AM)}{(A\Lambda)} \Rightarrow N = \frac{200}{3} \text{ N}$$

β) Από τη συνθήκη ισορροπίας των δυνάμεων βρίσκουμε ότι:

$$N + F - w = 0 \Rightarrow F = \frac{100}{3} N$$

γ)



Από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς το A έχουμε ότι:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow N \cdot (AZ) - w \cdot (AM) = 0 \Rightarrow$$

$$N \cdot (AZ) = w \cdot (AM) \Rightarrow$$

$$N = \frac{w \cdot (AM)}{(AZ)} \Rightarrow N = 200N$$

Από την ισορροπία δυνάμεων βρίσκουμε ότι $N + F - w = 0 \Rightarrow F = -100N$. Το (-) σημαίνει ότι η κατεύθυνση της δύναμης της άρθρωσης είναι αντίθετη από αυτή που έχει σχεδιαστεί στο σχήμα.

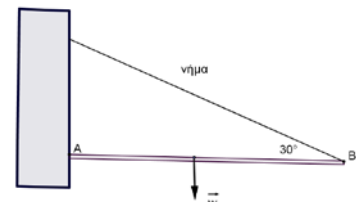
Άσκηση 2.

Η ράβδος AB του διπλανού σχήματος είναι ομογενής, έχει μήκος l και βάρος $w=100\text{N}$ και ισορροπεί οριζόντια.

α) Να υπολογισθεί η τάση του νήματος.

β) Στο σημείο A η ράβδος εφάπτεται στον τοίχο. Αν η τριβή που δέχεται η ράβδος είναι μέγιστη δυνατή ώστε να

ισορροπεί, να βρεθεί ο συντελεστής στατικής τριβής μεταξύ ράβδου και τοίχου.

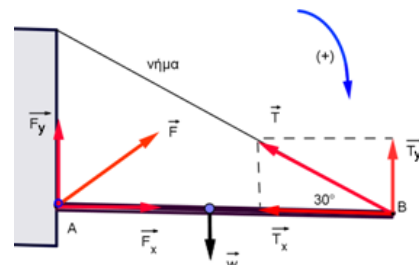


Λύση

α) Στη ράβδο ασκούνται 3 δυνάμεις: το βάρος της (w), η δύναμη από την άρθρωση (F) και η τάση του νήματος (T), οι οποίες είναι σχεδιασμένες στο σχήμα. Επειδή η F είναι άγνωστη παίρνουμε ισορροπία των ροπών ως προς το A.

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow w \cdot \frac{l}{2} - T \cdot \eta\mu 30^\circ \cdot l = 0 \Rightarrow$$

$$w \cdot \frac{l}{2} = T \cdot \frac{1}{2} \cdot l \Rightarrow w = T \quad \text{Δηλαδή } T = 100\text{N}.$$



β) Από την ανάλυση της T έχουμε:

$$T_x = T \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi = T \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = 50\sqrt{3}\text{N} \quad \text{και}$$

$$T_y = T \cdot \eta\mu\varphi = 100 \cdot \frac{1}{2} \text{N} = 50\text{N}$$

Από την ισορροπία δυνάμεων για τον άξονα $x'x$ έχουμε

$$\Sigma F_x = 0 \Rightarrow F_x - T_x = 0 \Rightarrow F_x = T_x = 50\sqrt{3}\text{N} \quad (1)$$

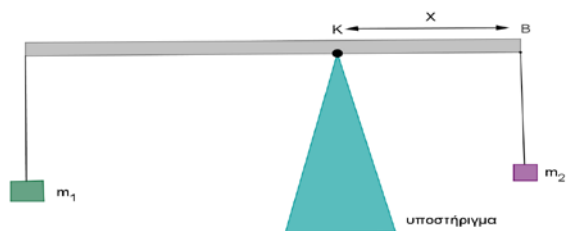
Ενώ για τον άξονα $y'y$:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F_y + T_y - w = 0 \Rightarrow F_y = w - T_y = 50\text{N} \quad (2)$$

$$\text{Από τις (1) και (2) } \mu = \frac{F_y}{F_x} = \frac{50\text{N}}{50\sqrt{3}\text{N}} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

Άσκηση 3.

Στα άκρα A και B της ομογενούς ράβδου μήκους $L = 1\text{m}$ έχουμε κρεμάσει 2 σώματα με



μάζες $m_1 = 3\text{kg}$ και $m_2 = 1\text{kg}$. Δίνεται $g = 10\text{m/s}^2$.

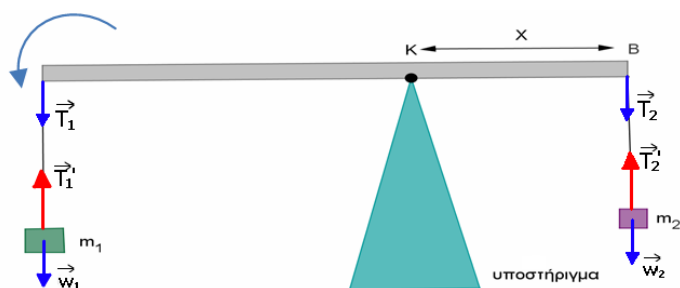
α) Αν η ράβδος είναι αβαρής, πού πρέπει να τοποθετήσουμε το υποστήριγμα έτσι ώστε το σύστημα των τριών σωμάτων να ισορροπεί;

β) Αν η ράβδος έχει βάρος $w = 60\text{N}$, πού πρέπει να τοποθετήσουμε το υποστήριγμα ώστε το σύστημα να ισορροπεί;

γ) Αφαιρούμε το m_1 και από τη ράβδο κρέμεται μόνο το m_2 . Πού πρέπει να τοποθετήσουμε το υποστήριγμα για να ισορροπεί η ράβδος; Πόση είναι η δύναμη που ασκεί το υποστήριγμα στην ράβδο;

Λύση

α)



Επειδή τα νήματα είναι αβαρή και τα σώματα ισορροπούν θα ισχύει ότι: $T_1 = T'_1 = w_1$ και $T_2 = T'_2 = w_2$.

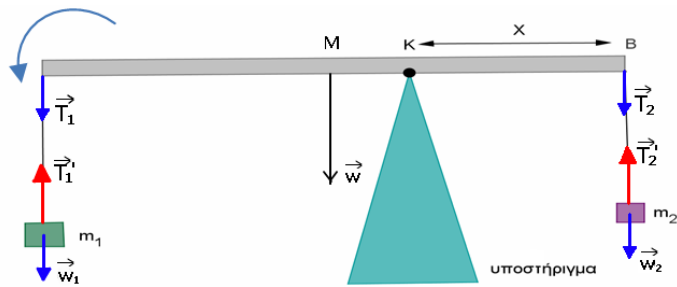
Από την ισορροπία ροπών έχουμε

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow$$

$$w_1(L - x) - w_2 \cdot x = 0 \Rightarrow w_1(L - x) = w_2 \cdot x \Rightarrow$$

$$30(1 - x) = 10x \Rightarrow x = \frac{3}{4}\text{m}$$

Β)

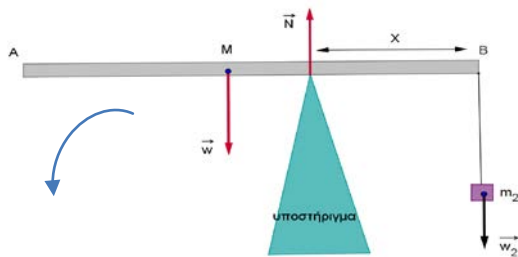


Αν έχει και η ράβδος βάρος απλά στην προηγούμενη εξίσωση θα μπει και μια ακόμη ροπή (η ροπή του βάρους):

$$w_1(L-x) - w_2 \cdot x + w\left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow w_1(L-x) + w\left(\frac{L}{2} - x\right) = w_2 \cdot x \Rightarrow$$

$$30(1-x) + 60(0,5-x) = 10x \Rightarrow 30 - 30x + 30 - 60x = 10x \Rightarrow x = 0,6\text{m}$$

γ) Από την ισορροπία ροπών βρίσκουμε ότι:



$$w\left(\frac{L}{2} - x\right) - w_2 \cdot x = 0 \Rightarrow w\left(\frac{L}{2} - x\right) = w_2 \cdot x \Rightarrow$$

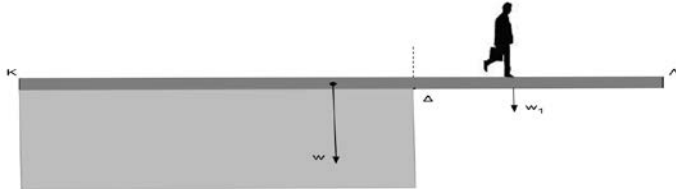
$$60(0,5-x) = 10x \Rightarrow 30 - 60x = 10x \Rightarrow x = \frac{3}{7}\text{m}$$

Από την ισορροπία των δυνάμεων βρίσκουμε:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - w - w_2 = 0 \Rightarrow N = w + w_2 \Rightarrow N = (60+10)\text{N} \Rightarrow N = 70\text{N}$$

Άσκηση 4.

Μια ομογενής σανίδα ΚΛ μήκους $L = 10\text{m}$ και βάρους $W = 1200\text{N}$ τοποθετείται πάνω σε μια επιφάνεια ώστε το τμήμα ΔΛ μήκους $L = 4\text{m}$ να προεξέχει της επιφάνειας. Ένας άνθρωπος βάρους $w_1 = 800\text{N}$ ξεκινάει από το άκρο Κ και κινείται πάνω στη σανίδα με κατεύθυνση προς το Λ.



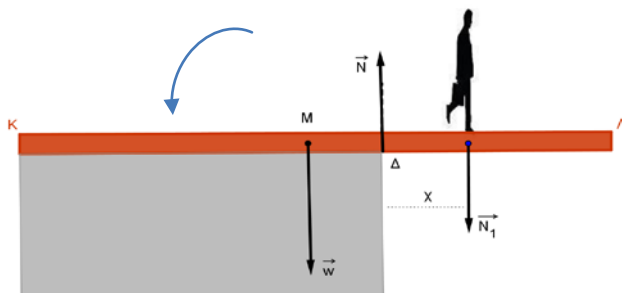
α) Μέχρι ποιά απόσταση x από το σημείο Δ μπορεί να περπατήσει ώστε να μην ανατραπεί η σανίδα;

β) Πόσο είναι η μέτρο της αντίδρασης N εκείνη την στιγμή;

Λύση

α) Έστω ότι ο άνθρωπος έχει περπατήσει απόσταση x από το Δ και η σανίδα είναι έτοιμη να ανατραπεί. Σε αυτή τη κατάσταση θεωρούμε ότι η σανίδα ακουμπά στο έδαφος μόνο στο σημείο Δ οπότε η αντίδραση του εδάφους N έχει σημείο εφαρμογής το Δ όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα:

- Καθώς ο άνθρωπος κινείται το σημείο εφαρμογής της N αλλάζει συνέχεια θέση μετατοπιζόμενο προς τα δεξιά.
- Η δύναμη N_1 που ασκεί ο άνθρωπος στη σανίδα ισούται με το βάρος του $N_1 = w_1 = 800\text{N}$, διότι ο άνθρωπος ισορροπεί στον y -άξονα.



Από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς το Δ έχουμε:

$$\Sigma \tau = 0$$

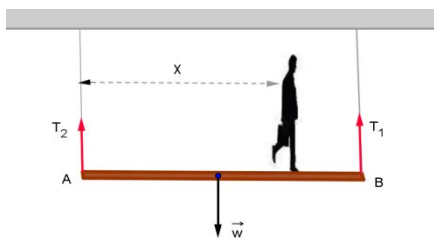
$$w(M\Delta) - N_1 \cdot x = 0 \Rightarrow w(M\Delta) = N_1 \cdot x \Rightarrow$$

$$x = \frac{w(M\Delta)}{N_1} \Rightarrow x = \frac{1200 \cdot 1}{800} \text{m} \Rightarrow x = 1,5\text{m}$$

β) Από ισορροπία δυνάμεων που ασκούνται στην σανίδα έχουμε $N = w + N_1$ οπότε $N = 2000$ N.

Άσκηση 5.

Ένας μηχανικός βάρους $w_1 = 800\text{N}$ βρίσκεται πάνω σε μια οριζόντια ομογενή σανίδα AB, μήκους $L = 10\text{m}$ και βάρους $w = 500\text{N}$. Η σανίδα κρέμεται από δύο κατακόρυφα σχοινιά που είναι δεμένα στα άκρα A και B. Όλο το σύστημα ισορροπεί οριζόντιο όπως



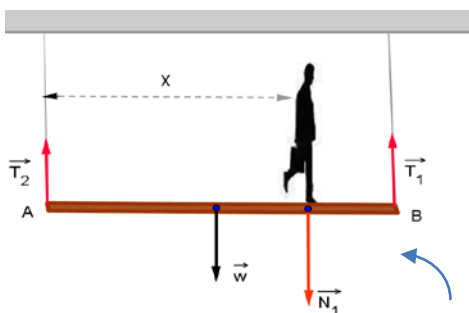
φαίνεται στο σχήμα.

α) Να βρεθούν τα μέτρα των τάσεων T_1 και T_2 των δύο σχοινιών αν $x = 8\text{m}$.

β) Ποιά είναι η μέγιστη και ποιά η ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάση T_1 ;

γ) Για ποιά τιμή της απόστασης x , το μέτρο της τάσης T_1 είναι ίσο με το μέτρο της τάσης T_2 ;

Λύση



α) Στη σανίδα ασκούνται οι δυνάμεις: οι τάσεις των νημάτων (T_1 και T_2), το βάρος της σανίδας w και η δύναμη από τον άνθρωπο που είναι ίση με το βάρος του ($N_1 = w_1$).

Από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς το άκρο A της ράβδου έχουμε:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 \cdot L - w \cdot \frac{L}{2} - N_1 \cdot x = 0 \Rightarrow$$

$$T_1 = \frac{w}{2} + N_1 \frac{x}{L} \quad (1) \Rightarrow T_1 = \frac{500}{2} + \frac{800}{10}x \Rightarrow T_1 = 250 + 80x \quad (3)$$

και για $x = 8\text{m}$ είναι $T_1 = 890\text{N}$.

Από την ισορροπία δυνάμεων έχουμε: $\sum F_y = 0 \Rightarrow T_1 + T_2 = N_1 + w \Rightarrow T_2 = 410\text{N}$

β) Η ελάχιστη τιμή του μέτρου της τάσης T_1 παρουσιάζεται όταν ο άνθρωπος βρίσκεται στο Α, ενώ η μέγιστη όταν βρίσκεται στο Β.

Η μεταβολή της τάσης T_1 σε συνάρτηση με την απόσταση x δίνεται από τη σχέση (1).

Επομένως αν θέσουμε $x = 0$ η σχέση (1) μας δίνει $T_1 = 250\text{ N (min)}$,

ενώ αν θέσουμε $x = 10\text{m}$ τότε η σχέση (1) μας δίνει $T_1 = 1050\text{ N (max)}$.

γ) Θα πρέπει να βρούμε μια σχέση που να συνδέει τις δυο δυνάμεις T_1 και T_2 .

Από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς το μέσο της ράβδου:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow$$

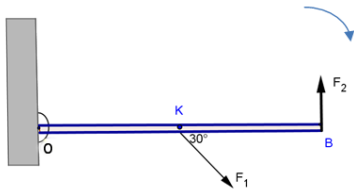
$$-T_2 \cdot \frac{L}{2} - N_1 \cdot (x - \frac{L}{2}) + T_1 \cdot \frac{L}{2} = 0 \text{ και επειδή } T_1 = T_2 \Rightarrow$$

$$x - \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2} \Rightarrow x = 5\text{m},$$

δηλαδή ο άνθρωπος βρίσκεται στο μέσο της σανίδας.

Άσκηση 6.

Στο μέσο K της αβαρούς ράβδου OB μήκους ℓ ασκούμε δύναμη $F_1=50\text{ N}$ η οποία έχει την



κατεύθυνση που φαίνεται στο σχήμα. Στο σημείο O υπάρχει άρθρωση. Να βρεθεί η δύναμη F_2 που πρέπει να ασκείται στο άκρο B της ράβδου έτσι ώστε η ράβδος να ισορροπεί οριζόντια.

Λύση

Αφού η ράβδος ισορροπεί οριζόντια ισχύει:

$$\Sigma \tau = 0 \quad (\text{ως προς το O}) \Rightarrow$$

$$F_1 \eta \mu \varphi \cdot \frac{\ell}{2} - F_2 \cdot \ell = 0 \Rightarrow (\text{θεωρούμε θετική ροπή την ροπή της } F_1)$$

$$F_1 \eta \mu 30^\circ \cdot \frac{\ell}{2} = F_2 \cdot \ell \Rightarrow F_1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{\ell}{2} = F_2 \cdot \ell \Rightarrow$$

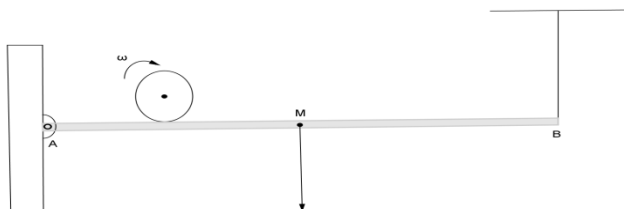
$$F_1 \cdot \frac{\ell}{4} = F_2 \cdot \ell \Rightarrow F_2 = \frac{50}{4} \text{ N} \Rightarrow$$

$$F_2 = 12,5 \text{ N}$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Η ομογενής ράβδος του σχήματος έχει βάρος $w_1 = 10\text{N}$ και μήκος $\ell = 4\text{m}$. Το ένα της άκρο αρθρώνεται σε κατακόρυφο τοίχο και το άλλο της άκρο κρέμεται από κατακόρυφο



σχοινί με αποτέλεσμα να ισορροπεί οριζόντια.

α) Να βρεθεί η τάση του νήματος.

β) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η ράβδος από την άρθρωση.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$, από το άκρο Α ξεκινάει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη ράβδο ένας κύλινδρος βάρους $w_2 = 10\text{N}$ με επιτάχυνση $a_{\text{cm}} = 1\text{m/s}^2$.

Ζητείται:

γ) Η τάση του νήματος τη χρονική στιγμή $t = \sqrt{3}\text{ s}$.

δ) Η γωνιακή ταχύτητα και η θέση του κυλίνδρου, όταν η τάση του νήματος γίνει $T = 10\text{N}$. (Δίνεται η ακτίνα του κυλίνδρου $R = 0,1\text{m}$).

Λύση

Τώρα δεν υπάρχει ο κύλινδρος οπότε η ράβδος δέχεται 3 δυνάμεις το βάρος της (W) την δύναμη από την άρθρωση (F) και την τάση του νήματος (T).

α) Από την ισορροπία ροπών ως προς το Α έχουμε:

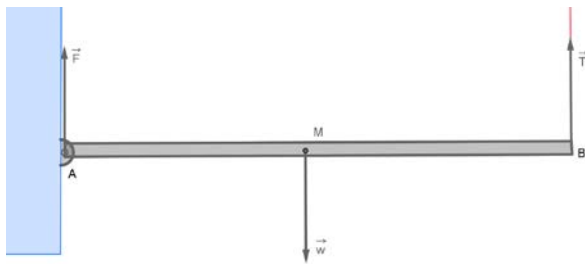
$$\sum \tau = 0 \Rightarrow T \cdot (AB) - w \cdot (AM) = 0 \Rightarrow$$

$$T \cdot (AB) = w \cdot (AM) \Rightarrow$$

$$T = \frac{w \cdot (AM)}{(AB)} \Rightarrow T = 5\text{N}$$

β) Από την ισορροπία δυνάμεων έχουμε:

$$\sum F = 0 \Rightarrow T + F - w = 0 \Rightarrow F = 5\text{N}$$

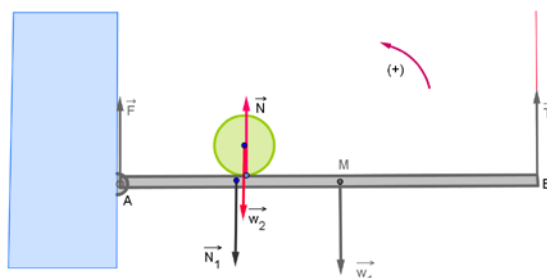


γ) Τη χρονική στιγμή $t = \sqrt{3}\text{ s}$ ο κύλινδρος έχει διανύσει:

$$s = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2 \Rightarrow s = \frac{3}{2}\text{m}$$

Επομένως ο κύλινδρος έχει φτάσει στην θέση που φαίνεται στο σχήμα. Στην περίπτωση αυτή όμως η ράβδος δέχεται μια ακόμα δύναμη την N_1 η οποία είναι η αντίδραση της δύναμης N που δέχεται ο κύλινδρος από την ράβδο.

Επειδή ο κύλινδρος ισορροπεί θα ισχύει για τον κύλινδρο $N = w_2 = 10\text{N}$. Άρα και $N_1 = 10\text{N}$.



Από ισορροπία των ροπών για την ράβδο ως προς το A έχουμε:

$$\sum \tau = 0 \Rightarrow T \cdot (AB) - w_1 \cdot (AM) - N_1 \cdot s = 0 \Rightarrow$$

$$T \cdot (AB) = w_1 \cdot (AM) + N_1 \cdot s \Rightarrow$$

$$T = \frac{w_1 \cdot (AM) + N_1 \cdot s}{(AB)} \Rightarrow T = \frac{35}{4}\text{N}$$

δ) Πάλι από τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς το A υπολογίζουμε την απόσταση που έχει διαγράψει ο κύλινδρος.

$$\begin{aligned}\sum \tau &= 0 \Rightarrow T \cdot (AB) - w_1 \cdot (AM) - N_1 \cdot s' = 0 \Rightarrow \\ T \cdot (AB) - w_1 \cdot (AM) &= N_1 \cdot s' \Rightarrow \\ s' &= \frac{T \cdot (AB) - w_1 \cdot (AM)}{N_1} \Rightarrow s' = 2\text{m}\end{aligned}$$

Άρα ο κύλινδρος βρίσκεται στο μέσο της ράβδου.

Υπολογίζουμε πόσος χρόνος χρειάστηκε για να καλύψει ο κύλινδρος την απόσταση των 2m :

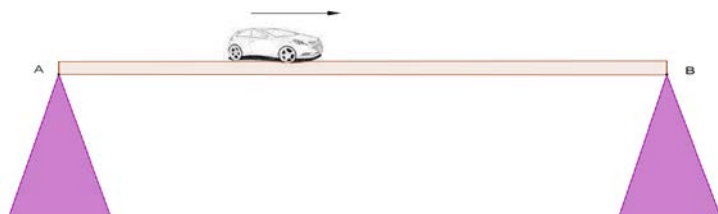
$$s' = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2s'}{\alpha_{\text{cm}}}} \Rightarrow t = 2\text{s}$$

Η γωνιακή του ταχύτητα υπολογίζεται ως εξής:

$$u_{\text{cm}} = \omega \cdot R \Rightarrow \omega = \frac{u_{\text{cm}}}{R} = \frac{\alpha_{\text{cm}} \cdot t}{R} = 20 \text{ rad/s}$$

Πρόβλημα 2.

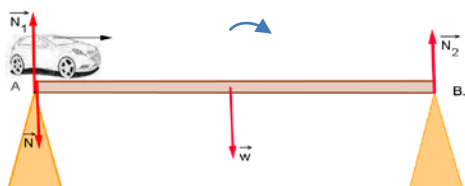
Μια οριζόντια γέφυρα έχει μήκος $L = 8\text{m}$ και βάρος $w = 40000\text{ N}$. Η γέφυρα στηρίζεται σε δυο υποστηρίγματα στα άκρα της Α και Β. Ένα όχημα βάρους $w_1 = 10000\text{N}$ κινείται στη γέφυρα με $v = 1\text{m/s}$. Θεωρούμε ως αρχική χρονική στιγμή $t = 0$ τη στιγμή που το όχημα φθάνει στο άκρο Α της γέφυρας.



- α) Να βρεθεί η δύναμη που δέχεται η γέφυρα από το υποστήριγμα Α τη χρονική στιγμή $t = 0$.
- β) Ποιά η θέση του αυτοκινήτου ώστε η ράβδος να δέχεται ίσες δυνάμεις από τα υποστηρίγματα;
- γ) Να γίνει το διάγραμμα της δύναμης που δέχεται η ράβδος από το υποστήριγμα Α σε συνάρτηση με τον χρόνο.

Λύση

Στη γέφυρα ασκούνται 4 δυνάμεις: το βάρος της στο μέσο, οι δυο δυνάμεις από τα υποστηρίγματα στα δυο άκρα και η αντίδραση του βάρους του αυτοκινήτου που είναι ίση



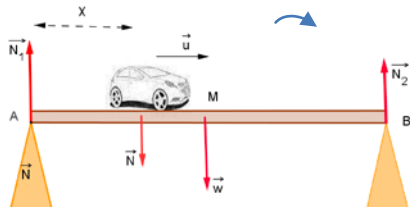
με το βάρος του αυτοκινήτου, δηλαδή $N = w_1 = 10000\text{ N}$.

α) Ως προς το σημείο Β ισχύει: $\sum T = 0 \Rightarrow$

$$N_1 L - w \cdot \frac{L}{2} - N \cdot L = 0 \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{w}{2} + N \Rightarrow N_1 = 30000\text{ N}$$

β) Θα βρούμε μια σχέση που να συνδέει τις δυο δυνάμεις που δέχεται η ράβδος από τα υποστηρίγματα όταν το αυτοκίνητο είναι σε κάποια τυχαία θέση που απέχει από το άκρο Α απόσταση ίση με x .



Παίρνουμε τη συνθήκη ισορροπίας των ροπών ως προς το μέσο της γέφυρας και έχουμε:

$\sum T = 0$ ως προς το σημείο M. Άρα:

$$N_1 \cdot \frac{L}{2} - N \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) - N_2 \cdot \frac{L}{2} = 0 \text{ αλλά επειδή } N_1 = N_2 \text{ θα έχουμε τελικά:}$$

$$N \cdot \left(\frac{L}{2} - x\right) = 0 \Rightarrow \frac{L}{2} - x = 0 \Rightarrow x = \frac{L}{2}, \text{ οπότε } x = 4\text{m}.$$

γ) Θα βρούμε μια σχέση που να συνδέει την δύναμη N_1 που δέχεται η ράβδος από το υποστήριγμα με την απόσταση x που έχει διανύσει το αυτοκίνητο πάνω στην γέφυρα:

$\sum \tau = 0$ ως προς το B:

$$N_1 \cdot L - w \cdot \frac{L}{2} - N(L - x) = 0$$

$$N_1 \cdot L = w \cdot \frac{L}{2} + N(L - x) \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{w \cdot \frac{L}{2} + N(L - x)}{L} \Leftrightarrow$$

$$N_1 = \frac{160000 + 10000(8 - x)}{8} \Rightarrow$$

$$N_1 = \frac{160000 + 80000 - 10000x}{8} \Rightarrow$$

$$N_1 = 20000 + 10000 - 1250x \Rightarrow N_1 = 30000 - 1250x \text{ (S.I.)}$$

Επειδή το αυτοκίνητο κινείται ομαλά ισχύει η σχέση $x = v \cdot t$, όπου $v = 1\text{m/s}$.

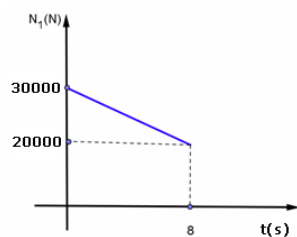
Επομένως, η προηγούμενη σχέση είναι ισοδύναμη με τη $N_1 = 30000 - 1250t$ (S.I.) (1)

Η σχέση αυτή είναι η σχέση που συνδέει τη δύναμη N_1 με τον χρόνο και της οποίας θέλουμε να κάνουμε την γραφική παράσταση.

Ο χρόνος για να περάσει το αυτοκίνητο την γέφυρα υπολογίζεται από την σχέση $x = v \cdot t \Rightarrow t = 8s$

Από τη σχέση (1) βρίσκουμε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της δύναμης N_1 θέτοντας $t = 0$ και $t = 8s$ παίρνουμε:

$$N_{1(\min)} = 20000N \text{ και } N_{1(\max)} = 30000N .$$



Το ζητούμενο διάγραμμα φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

Ημερομηνία τροποποίησης: 20/03/2012

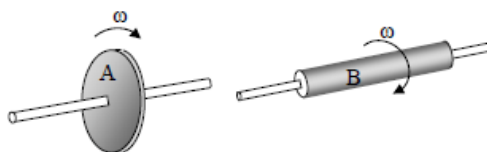
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ - ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ
ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ο κύλινδρος και ο δίσκος του σχήματος, έχουν την ίδια μάζα και περιστρέφονται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα ω . Ποιό σώμα θα σταματήσει πιο δύσκολα;

- α) Το Α.
- β) Το Β.
- γ) Και τα δύο το ίδιο.



Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας ενός στερεού εκφράζει την αδράνεια – αντίδραση στη στροφική του κίνηση, δηλαδή πόσο δύσκολα μεταβάλλεται η στροφική του κατάσταση κίνησης.

Επίσης γνωρίζουμε από τη θεωρία ότι η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς κάποιο άξονα, υπολογίζεται από τη σχέση: $I = \sum m r^2$, όπου r είναι η απόσταση των στοιχειωδών μαζών του από τον άξονα περιστροφής. Έτσι, η ροπή αδράνειας ενός στερεού εξαρτάται από την κατανομή της μάζας του ως προς τον άξονα περιστροφής του και συγκεκριμένα, όσο πιο απομακρυσμένα είναι τα υλικά σημεία του από τον άξονα περιστροφής τόσο πιο μεγάλη είναι η ροπή αδράνειάς του.

Έτσι στην περίπτωση μας, ο δίσκος, που θα σταματήσει πιο δύσκολα είναι αυτός, που έχει τη μεγαλύτερη ροπή αδράνειας και αυτός είναι ο δίσκος Α, που έχει την πιο «απλωμένη» μάζα ως προς τον άξονα περιστροφής.

Ερώτηση 2.

Οριζόντιος ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από ακλόνητο κατακόρυφο άξονα $y'y$ που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σε αυτόν. Πάνω στο δίσκο είναι στερεωμένο ένα υλικό σημείο μάζας m σε απόσταση x ($x < R$) από τον άξονα περιστροφής. Αν το υλικό σημείο μεταφερθεί και τοποθετηθεί στο άκρο του δίσκου, η ροπή αδράνειας του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής $y'y$:

α) μειώνεται.

β) μένει η ίδια.

γ) αυξάνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας ενός συστήματος είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας των σωμάτων, που αποτελούν το σύστημα. Έτσι το σύστημα δίσκου - υλικού σημείου θα έχει ροπή αδράνειας: $I_{ολ} = I_{\delta} + mr^2$, όπου r είναι η απόσταση του υλικού σημείου από τον άξονα περιστροφής.

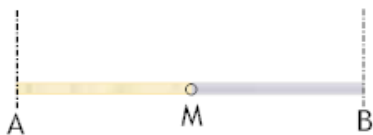
Στην αρχική κατάσταση, το υλικό σημείο είναι σε απόσταση x , οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι ίση με: $I_{ολ} = I_{\delta} + mx^2$.

Στην τελική κατάσταση, το υλικό σημείο είναι σε απόσταση R , οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι ίση με: $I'_{ολ} = I_{\delta} + mR^2$.

Επειδή, με βάση την εκφώνηση, το x είναι μικρότερο του R , συγκρίνοντας την αρχική και τελική τιμή της ροπής αδράνειας του συστήματος, προκύπτει ότι: $I'_{ολ} > I_{ολ}$, συνεπώς η ροπή αδράνειας του συστήματος αυξάνεται.

Ερώτηση 3.

Στο παρακάτω σχήμα φαίνεται μια οριζόντια λεπτή ράβδος, που αποτελείται από δύο τμήματα, ίσου μήκους, κολλημένα στο μέσο M της ράβδου. Το αριστερό είναι ξύλινο ενώ το δεξιό σιδερένιο. Η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται είτε από το άκρο A είτε από το B. Για να θέσουμε πιο εύκολα σε περιστροφή τη ράβδο πρέπει να την στρέψουμε, γύρω από τον άξονα, που διέρχεται από το:



α) A.

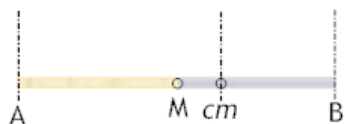
β) B.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Από το Θεώρημα Steiner ($I_p = I_{cm} + Md^2$), αντιλαμβανόμαστε ότι όσο πιο κοντά είναι ο άξονας περιστροφής στο κέντρο μάζας (μικρότερο d), τόσο πιο μικρή είναι η ροπή αδράνειάς του και τόσο πιο εύκολα θα τίθεται σε περιστροφή.

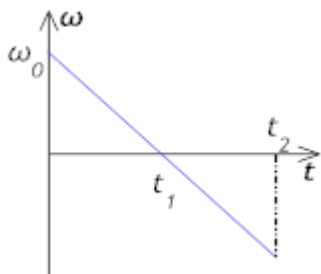


Επειδή η ράβδος δεν είναι ομογενής, το κέντρο μάζας της δεν θα είναι στο μέσον της M, αλλά σε κάποιο σημείο του τμήματος με την μεγαλύτερη πυκνότητα, δηλαδή κάπου δεξιότερα του μέσου M, στην περιοχή του σιδερένιου τμήματος.

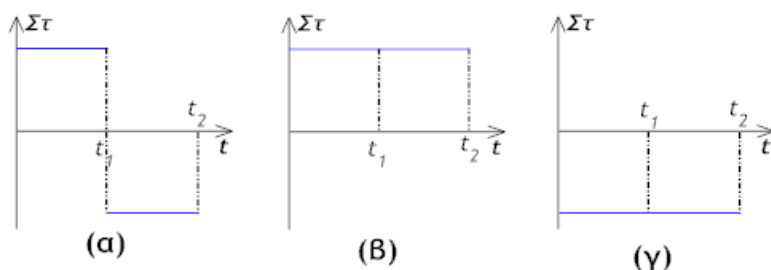
Έτσι το άκρο B θα βρίσκεται πιο κοντά στο κέντρο μάζας cm, συνεπώς η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα διερχόμενο από το B θα είναι μικρότερη, κατά συνέπεια πιο εύκολη η περιστροφή της ράβδου.

Ερώτηση 4.

Ένας οριζόντιος δίσκος, στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 γύρω από σταθερό άξονα, που διέρχεται από το κέντρο του και είναι κάθετος σ' αυτόν. Στο δίσκο ασκείται ροπή δύναμης μέτρου τ_F , οπότε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος.



Η σωστή γραφική παράσταση της ροπής τ_F σε συνάρτηση με το χρόνο t είναι το:



Να επιλέξετε το σωστό διάγραμμα και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Γνωρίζουμε ότι η κλίση του διαγράμματος γωνιακής συχνότητας ω - χρόνου t , είναι ίση με την γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\gamma}$, διότι: $a_{\gamma\omega\gamma} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$.

Από το διάγραμμα βλέπουμε ότι: 1^{ov}) η κλίση είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια από 0 έως t_2 και 2^{ov}) η κλίση είναι αρνητική, διότι η συνάρτηση είναι φθίνουσα. Κατά συνέπεια η γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\gamma}$ είναι σταθερή και αρνητική.

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης $\Sigma\tau = I \cdot a_{\gamma\omega\gamma} \Rightarrow \tau_F = I \cdot a_{\gamma\omega\gamma}$, προκύπτει ότι η ροπή τ_F είναι ανάλογη της γωνιακής επιτάχυνσης. Συνεπώς η ροπή τ_F έχει σταθερή και αρνητική τιμή σε όλη τη διάρκεια από 0 έως t_2 .

Συνεπώς το σωστό διάγραμμα είναι το γ.

Ερώτηση 5.

Ένας ομογενής τροχός, με μικρό αριθμό ακτίνων και ένας ομογενής δίσκος, ίδιας ακτίνας R , μπορούν να περιστρέφονται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο, ακλόνητο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους και είναι κάθετος στο επίπεδο του καθενός. Η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς τον άξονα περιστροφής του (I_1) είναι μεγαλύτερη της ροπής αδράνειας του δίσκου ως προς το δικό του άξονα περιστροφής (I_2). Αρχικά τα δύο σώματα είναι ακίνητα και τη χρονική στιγμή $t=0$ αρχίζουμε να ασκούμε ταυτόχρονα στην περιφέρεια κάθε σώματος ίδια οριζόντια, εφαπτομενική, σταθερή κατά μέτρο δύναμη F . Θεωρήστε αμελητέες οποιεσδήποτε άλλες επιδράσεις ροπών. Για το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού ($a_{\gamma\omega\nu}^{(1)}$) και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου ($a_{\gamma\omega\nu}^{(2)}$) ισχύει η σχέση:

α) $a_{\gamma\omega\nu}^{(1)} > a_{\gamma\omega\nu}^{(2)}$.

β) $a_{\gamma\omega\nu}^{(1)} < a_{\gamma\omega\nu}^{(2)}$.

γ) $a_{\gamma\omega\nu}^{(1)} = a_{\gamma\omega\nu}^{(2)}$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Με βάση το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης, η γωνιακή επιτάχυνση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I} \quad (1).$$

Η μοναδική ροπή δύναμης είναι η ροπή της F , άρα:

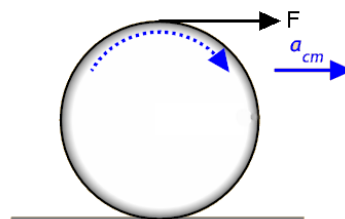
$\Sigma\tau = \tau_F$. Επειδή η F έχει σταθερό μέτρο και είναι συνεχώς εφαπτόμενη στην περιφέρεια, ακτίνας R , η ροπή της και στις δύο περιπτώσεις θα είναι ίδια και ίση με:

$$\Sigma\tau_1 = \Sigma\tau_2 = \tau_F = F \cdot R \quad (2).$$

Από τις (1) και (2) προκύπτει: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{F \cdot R}{I}$. Με βάση την σχέση αυτή προκύπτει ότι η

γωνιακή επιτάχυνση είναι αντιστρόφως ανάλογη της ροπής αδράνειας, εφόσον ο αριθμητής - ροπή δύναμης F , είναι σταθερός. Συνεπώς, επειδή σύμφωνα με την εκφώνηση, ο τροχός έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας (I_1) από αυτή του δίσκου (I_2),

θα αποκτήσει μικρότερη γωνιακή επιτάχυνση: $a_{\gamma\omega\nu}^{(1)} < a_{\gamma\omega\nu}^{(2)}$.



Ερώτηση 6.

Ένας ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο δάπεδο με τη βοήθεια οριζόντιας σταθερής δύναμης F η οποία ασκείται στο κέντρο μάζας του. Ο δίσκος κινείται επιταχυνόμενος ομαλά προς τα δεξιά. Η φορά της στατικής τριβής, που δέχεται, από το οριζόντιο δάπεδο, έχει φορά:

α) ίδια με την F .

β) αντίθετη από την F .

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

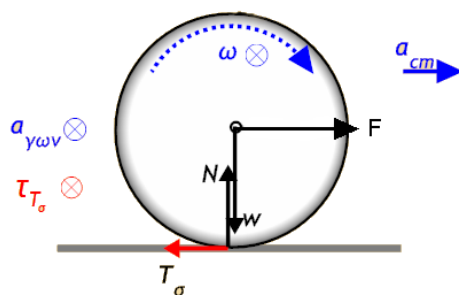
Στο δίσκο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: η οριζόντια δύναμη F και το κατακόρυφο βάρος w από τη γη στον άξονα, που περνούν από το κέντρο μάζας του, η κάθετη αντίδραση N του δαπέδου και η οριζόντια στατική τριβή T_σ , στο σημείο επαφής δίσκου - δαπέδου.

Παρατηρούμε ότι οι φορείς των F και w διέρχονται από τον άξονα περιστροφής, ενώ ο φορέας της N , διέρχεται και αυτός από τον άξονα περιστροφής. Συνεπώς η ροπή τους ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδενική: $\tau_F = \tau_w = \tau_N = 0$. Συνεπώς η μόνη ροπή δύναμης στο δίσκο είναι αυτή της στατικής τριβής, δηλαδή $\Sigma\tau = \tau_{T_\sigma}$ (1).

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης, όταν γραφεί σε διανυσματική μορφή: $\Sigma\vec{\tau} = I \cdot \vec{a}_{\gamma\omega\nu}$, προκύπτει ότι η συνολική ροπή $\Sigma\vec{\tau}$ είναι ομόρροπη με τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$.

Συνεπώς και με βάση την (1), και η ροπή $\vec{\tau}_{T_\sigma}$ της στατικής τριβής, θα είναι ομόρροπη της γωνιακής επιτάχυνσης $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$, η οποία στο σχήμα έχει φορά προς τα μέσα, διότι η κίνηση είναι επιταχυνόμενη, άρα η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$, είναι ομόρροπη της γωνιακής ταχύτητας $\vec{\omega}$.

Για να συμβεί αυτό, πρέπει η φορά της στατικής τριβής στο σχήμα, να είναι προς τα αριστερά, δηλαδή η φορά της είναι αντίθετη από αυτήν της F .



ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

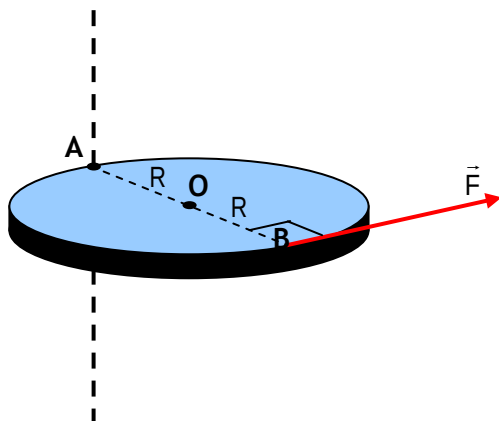
Ένας ομογενής και ισοπαχής δίσκος μάζας $M = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,1 \text{ m}$ μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα, ο οποίος είναι κάθετος στο επίπεδό του και περνά από ένα σημείο A της περιφέρειάς του. Στο αντιδιαμετρικό σημείο B ασκείται μια δύναμη σταθερού μέτρου $F = 3 \text{ N}$, η οποία είναι συνεχώς εφαπτόμενη στο δίσκο και η διεύθυνσή της είναι επάνω στο επίπεδο που ορίζει ο δίσκος.

α) Να βρείτε το μέτρο της ροπής που προκαλεί η δύναμη και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της.

β) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ με την οποία στρέφεται ο δίσκος και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της.

Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας ομογενούς δίσκου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, είναι $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$.



Λύση

Για την επίλυση του παραδείγματος 1, θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

α) θα επιλέξουμε κατάλληλους ορισμούς, νόμους, μαθηματικές σχέσεις.

β) θα γράψουμε δεδομένα – ζητούμενα.

γ) θα κάνουμε το σχήμα.

δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.

ε) θα εξειδικεύσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.

στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και

ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

Επειδή ο δίσκος είναι ομογενής και ισοπαχής, το κέντρο μάζας του συμπίπτει με το κέντρο συμμετρίας του.

Επειδή ο δίσκος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα υπό την επίδραση ροπής δύναμης, ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{\gamma} \quad (1)$$

Επειδή ο άξονας περιστροφής δε διέρχεται από το κέντρο μάζας αλλά είναι παράλληλος με τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας του στερεού, θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Steiner:

$$I = I_{\text{cm}} + Md^2 \quad (2)$$

Δεδομένα	Ζητούμενα
$M = 2 \text{ kg}$ $R = 0,1 \text{ m}$ $F = 3 \text{ N}$ $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} MR^2$	α. $\vec{\tau} = ?$ β. $I = ?$ γ. $\vec{a}_{\gamma} = ?$

α) Αφού η δύναμη έχει σταθερό μέτρο και είναι συνεχώς εφαπτόμενη στο δίσκο, θα ασκεί σταθερή ροπή, μέτρου:

$$\tau = F \cdot L \quad (3)$$

όπου L ο μοχλοβραχίονας της $\vec{F}$.

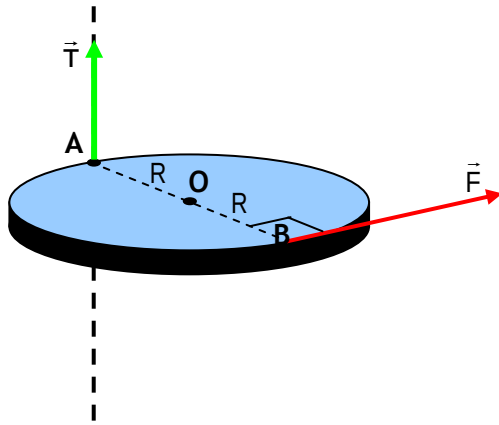
Από το σχήμα φαίνεται ότι:

$$L = 2R \quad (4)$$

Θεωρώντας θετική την αριστερόστροφη φορά, από τις (3) και (4) βρίσκουμε την αλγεβρική τιμή της ροπής που ασκείται στο δίσκο:

$$\tau = F \cdot 2R \Rightarrow \tau = +0,6 \text{ Nm} \quad (5)$$

Στο σχήμα φαίνεται η ροπή που ασκείται στο δίσκο:



β) Από τη (2) υπολογίζουμε τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς το σταθερό άξονα περιστροφής του. Επειδή η απόσταση του άξονα περιστροφής από τον παράλληλο άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του δίσκου είναι $d=R$, έχουμε:

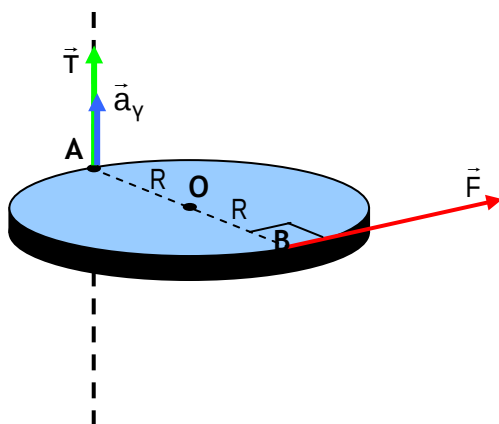
$$I = I_{\text{cm}} + Md^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}MR^2 + MR^2 \Rightarrow I = \frac{3}{2}MR^2 \Rightarrow I = 0,03 \text{ kgm}^2 \quad (6)$$

γ) Με αντικατάσταση των (5) και (6) στην (1) έχουμε:

$$0,6 \text{ N} \cdot \text{m} = 0,03 \text{ kgm} \cdot a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Επειδή $a_\gamma > 0$, η αλγεβρική τιμή συμπίπτει με το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης.

Επειδή η $\vec{\tau}$ είναι η μοναδική ροπή που ασκείται στο δίσκο, η γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_\gamma$ θα είναι ομόρροπη με την $\vec{\tau}$:



Άσκηση 2.

Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος μάζας $m = 2\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,1\text{m}$ περιστρέφεται αριστερόστροφα (δηλαδή με φορά αντίθετη των δεικτών του ρολογιού) χωρίς τριβές με γωνιακή συχνότητα $\omega_0 = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Από τη χρονική στιγμή $t=0$ και μετά ο δίσκος δέχεται εφαπτομενικά στην περιφέρειά του δύο σταθερές κατά μέτρο δυνάμεις F_1 αριστερόστροφα και F_2 δεξιόστροφα, που τα μέτρα τους ικανοποιούν τη σχέση $F_1 = 5F_2$ και οι οποίες προσδίδουν στο δίσκο γωνιακή επιτάχυνση μέτρου $a_{\gamma\omega\nu} = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$. Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}mR^2$. Να υπολογίσετε:

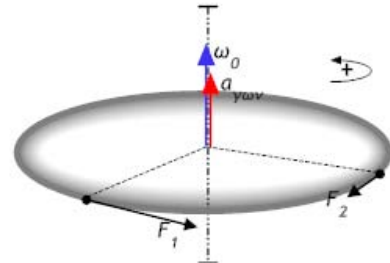
α) τα μέτρα των δύο δυνάμεων.

β) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας τη χρονική στιγμή $t_1 = 2\text{ s}$.

Τη χρονική στιγμή t_1 καταργούμε ακαριαία τη δύναμη F_1 , οπότε ο δίσκος σταματά τη χρονική στιγμή t_2 .

γ) Να υπολογίσετε τη νέα γωνιακή επιτάχυνση.

δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση γωνιακής ταχύτητας ω - χρόνου t σε βαθμολογημένους άξονες, από τη χρονική στιγμή $t=0$ έως τη χρονική στιγμή t_2 .



Λύση

α) Θα εφαρμόσουμε αρχικά το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για το δίσκο, ώστε να υπολογίσουμε τη συνισταμένη των ροπών $\Sigma\tau$:

$$\Sigma\tau = I_{\text{cm}} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \Sigma\tau = \frac{1}{2}mR^2 a_{\gamma\omega\nu} \text{ και αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε:}$$

$$\Sigma\tau = \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot 0,1^2 \cdot 40 \text{ N} \cdot \text{m} \Rightarrow \Sigma\tau = 0,4 \text{ N} \cdot \text{m}.$$

Θεωρώντας θετική φορά την αριστερόστροφη, έχουμε για τις αλγεβρικές τιμές των ροπών: $\Sigma\tau = \tau_{F_1} + \tau_{F_2} = F_1 R - F_2 R = (F_1 - F_2)R$.

Με βάση την εκφώνηση, ισχύει για τα μέτρα των δυνάμεων ότι: $F_1 = 5F_2$, οπότε:

$\Sigma\tau = (5F_2 - F_2)R = 4F_2R$, και λύνοντας ως προς F_2 βρίσκουμε:

$$F_2 = \frac{\Sigma\tau}{4R} \stackrel{\text{S.I.}}{\Rightarrow} F_2 = \frac{0,4}{4 \cdot 0,1} \text{ N} \Rightarrow F_2 = 1 \text{ N}. \text{ Και από την } F_1 = 5F_2 \Rightarrow F_1 = 5 \text{ N}.$$

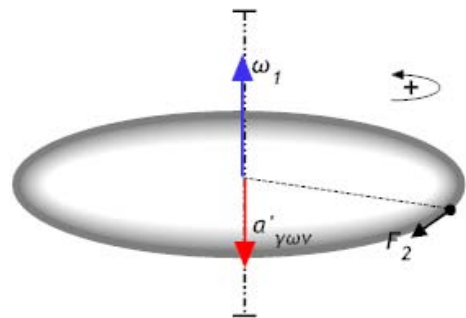
β) Εφόσον ο δίσκος έχει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, η κίνησή του είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική, οπότε για την γωνιακή ταχύτητα ισχύει η εξίσωση: $\omega = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} \cdot t$. Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα τη

$$\text{χρονική στιγμή } t_1: \omega_1 = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 \Rightarrow \omega_1 = (20 + 40 \cdot 2) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_1 = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

γ) Όταν καταργηθεί η F_1 , ο δίσκος δέχεται την δεξιόστροφη F_2 , η οποία τον επιβραδύνει.

Η νέα συνισταμένη των ροπών, λοιπόν, θα είναι: $\Sigma\tau' = \tau'_{F_2} = -F_2R = -0,1 \text{ N} \cdot \text{m}$.

Για να βρούμε τη νέα γωνιακή επιτάχυνση θα εφαρμόσουμε ξανά το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης:



$$\Sigma\tau' = I_{\text{cm}} \cdot a'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau'}{\frac{1}{2}mR^2} \Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu} = \frac{-0,1 \text{ rad}}{0,1^2 \text{ s}^2} \Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu} = -10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}. \text{ Το πρόσημο (-)}$$

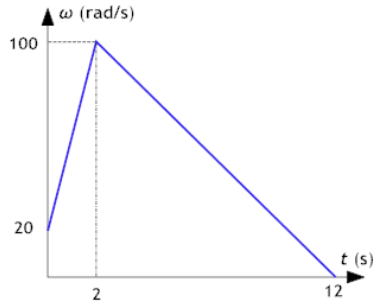
δείχνει ότι η νέα γωνιακή επιτάχυνση έχει αντίθετη φορά της αρχικής.

δ) Θα βρούμε αρχικά τη διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης μέχρι να σταματήσει, απ' την εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας, λαμβάνοντας υπόψη ότι η αρχική γωνιακή ταχύτητα της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι η γωνιακή ταχύτητα τη στιγμή t_1 : $\omega' = \omega_1 + a'_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t$.

$$\text{Όταν θα σταματήσει θα ισχύει: } 0 = \omega_1 + a'_{\gamma\omega\nu} \cdot \Delta t \Rightarrow \Delta t = -\frac{\omega_1}{a'_{\gamma\omega\nu}} \stackrel{\text{S.I.}}{\Rightarrow} \Delta t = -\frac{100}{-10} \text{ s} \Rightarrow \Delta t = 10 \text{ s}.$$

Όμως η διάρκεια της επιβραδυνόμενης κίνησης είναι από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή t_2 , που θα σταματήσει, οπότε: $\Delta t = t_2 - t_1 \Rightarrow t_2 = t_1 + \Delta t \Rightarrow t_2 = (2 + 10) \text{ s} \Rightarrow t_2 = 12 \text{ s}$.

Έτσι σχεδιάζουμε τη γραφική παράσταση, που φαίνεται στο παρακάτω διάγραμμα.



Άσκηση 3.

Μια ομογενής ράβδος AB, μάζας $M=0,6 \text{ kg}$ και μήκους $L=0,5 \text{ m}$, μπορεί να στρέφεται σε κατακόρυφο επίπεδο γύρω από έναν οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της A.

α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειάς της ως προς άξονα κάθετο στη ράβδο, που διέρχεται απ' το άκρο A.

Από την οριζόντια θέση αφήνουμε ελεύθερη τη ράβδο, να περιστραφεί γύρω απ' το άκρο A.

β) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνσή της $a_{\gamma\omega\nu}^{(0)}$ τη στιγμή που την αφήνουμε ελεύθερη.

γ) Να υπολογίσετε τη γωνιακή επιτάχυνσή της στη θέση όπου αυτή έχει στραφεί κατά γωνία φ , τέτοια ώστε $\sin\varphi = 0,5$.

δ) Να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας του σημείου K, που είναι το κέντρο μάζας cm της ράβδου, στη θέση όπου αυτή έχει στραφεί κατά γωνία φ , τέτοια ώστε $\sin\varphi = 0,5$.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στην ράβδο που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12} ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10 \text{ m/s}^2$.

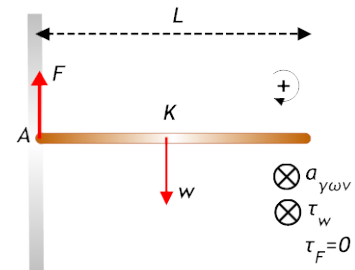
Λύση

α) Η ράβδος στρέφεται γύρω από άξονα, κάθετο σ' αυτήν, που περνά από το άκρο A (και όχι από το κέντρο μάζας της), οπότε η ροπή αδράνειας της ως προς αυτόν τον άξονα αυτόν θα υπολογιστεί από το Θεώρημα του Steiner: $I_A = I_{cm} + Md^2$, όπου d είναι η απόσταση του άκρου από το cm, δηλαδή $d = \frac{L}{2}$. Συνεπώς:

$$I_A = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} ML^2 + M \frac{L^2}{4} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right) ML^2 = \frac{4}{12} ML^2 \Rightarrow I_A = \frac{1}{3} ML^2 \quad (1),$$

και αντικαθιστώντας στο S.I.: $I_A = \frac{1}{3} 0,6 \cdot 0,5^2 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow I_A = 0,05 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

β) Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της w στο κέντρο μάζας της K και η δύναμη F από τον άξονα περιστροφής της.



Για να υπολογίσουμε τη γωνιακή επιτάχυνση, όταν η ράβδος βρίσκεται στην οριζόντια θέση (τη στιγμή που την αφήνουμε ελεύθερη), εφαρμόζουμε τον Θεμελιώδη Νόμο της

Στροφικής Κίνησης: $\Sigma \tau_A = I_A \cdot a_{γων}^{(0)}$, θεωρώντας θετική φορά την προς τα μέσα.

Η ροπή της F ως προς το A είναι μηδέν, καθώς ασκείται στον άξονα περιστροφής, επομένως ροπή θα έχει μόνο το βάρος της ράβδου: $\Sigma \tau_A = \tau_w = w \cdot \frac{L}{2}$ (ο μοχλοβραχίονας του βάρους είναι $\frac{L}{2}$).

Αντικαθιστώντας τώρα στον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης τις (1) και (2), έχουμε:

$$Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{3} ML^2 \cdot a_{γων}^{(0)} \Rightarrow a_{γων}^{(0)} = \frac{3g}{2L} \text{ και αντικαθιστώντας στο S.I.: } a_{γων}^{(0)} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 0,5} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow$$

$$a_{γων}^{(0)} = 30 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

γ) Στη θέση όπου η ράβδος έχει στραφεί κατά φ εφαρμόζουμε πάλι τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης. Η ροπή του βάρους είναι τώρα: $\Sigma \tau_A = \tau_w = w \cdot (AB)$.

Από το σχήμα βρίσκουμε ότι ο μοχλοβραχίονας (AB) είναι:

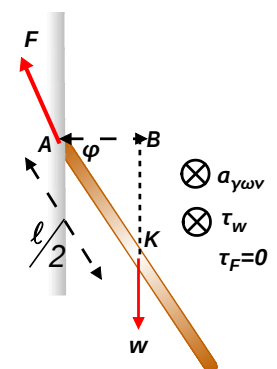
$$(AB) = (AK) \cdot \sin \varphi = \frac{L}{2} \sin \varphi, \text{ οπότε: } \Sigma \tau_A = \tau_w = w \cdot \frac{L}{2} \sin \varphi \quad (3).$$

Αντικαθιστώντας τώρα στον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης τις

$$(1) \text{ και } (3), \text{ έχουμε: } Mg \frac{L}{2} \sin \varphi = \frac{1}{3} ML^2 \cdot a_{γων} \Rightarrow a_{γων} = \frac{3g}{2L} \sin \varphi \quad (4).$$

Στην εκφώνηση δίνεται ότι $\sin \varphi = 0,5$, οπότε αντικαθιστώντας στην (4)

$$\text{στο S.I. προκύπτει ότι: } a_{γων} = \frac{3 \cdot 10}{2 \cdot 0,5} 0,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow a_{γων} = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$



δ) Ο ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας ενός σημείου, που απέχει r από τον άξονα περιστροφής, υπολογίζεται ως εξής:

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} = r \frac{d\omega}{dt}. \text{ Αλλά } \frac{d\omega}{dt} = a_{\gamma\omega\nu}, \text{ οπότε: } \frac{dv}{dt} = r \cdot a_{\gamma\omega\nu} \text{ (5).}$$

Αντικαθιστώντας στην (5) την απόσταση του σημείου Κ ($r_K = \frac{L}{2}$) και τη στιγμιαία γωνιακή επιτάχυνση στη θέση αυτή, που υπολογίστηκε στο (γ) ερώτημα, βρίσκουμε:

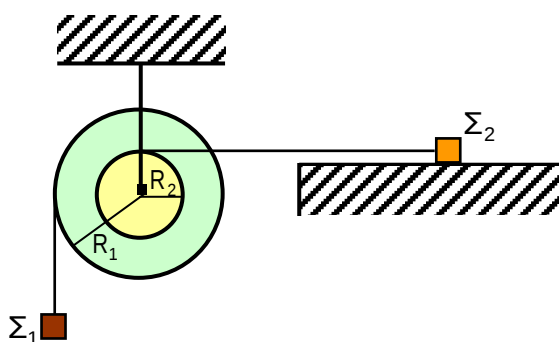
$$\frac{dv_K}{dt} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot \frac{L}{2} = 15 \cdot 0,25 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \frac{dv_K}{dt} = 3,75 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Σχόλιο: Το φυσικό μέγεθος που υπολογίστηκε στο ερώτημα δ “ρυθμός μεταβολής του μέτρου της γραμμικής ταχύτητας”, είναι αυτό που αναφέρεται στο Σχολικό σας Βιβλίο, στη σελίδα 121, 6^η γραμμή ως γραμμική επιτάχυνση και σε άλλα έγκυρα επιστημονικά κείμενα αναφέρεται ως επιτόρξια επιτάχυνση.

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα σύστημα διπλής τροχαλίας αποτελείται από δύο ομογενείς λεπτούς δίσκους A και B με ακτίνες $R_1 = 0,2 \text{ m}$ και $R_2 = 0,1 \text{ m}$ αντίστοιχα. Το σύστημα μπορεί να περιστρέφεται γύρω από οριζόντιο σταθερό άξονα, που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Ο άξονας αυτός, αποτελεί μέρος άρθρωσης, με την οποία το σύστημα είναι στερεωμένο ακλόνητα στην οροφή, όπως φαίνεται στο σχήμα. Γύρω από τους δίσκους είναι τυλιγμένα αβαρή νήματα, τα οποία δεν ολισθαίνουν πάνω στους δίσκους. Στις ελεύθερες άκρες των νημάτων των τροχαλιών A και B έχουν δεθεί σώματα Σ_1 , Σ_2 , με μάζες $m_1 = 2 \text{ kg}$ και $m_2 = 1 \text{ kg}$ αντίστοιχα. Το σώμα Σ_2 βρίσκεται πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί.



- Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στη διπλή τροχαλία και στα σώματα Σ_1 , Σ_2 .
- Να γράψετε και να εφαρμόσετε το θεμελιώδη νόμο στροφικής κίνησης για την τροχαλία και το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση των σωμάτων Σ_1 , Σ_2 (Δε ζητείται αριθμητική αντικατάσταση).
- Να βρείτε τις σχέσεις που συνδέουν τη γωνιακή επιτάχυνση της τροχαλίας με τις μεταφορικές επιταχύνσεις των σωμάτων Σ_1 , Σ_2 .
- Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης a_γ της διπλής τροχαλίας και να δείξετε την κατεύθυνσή της στο σχήμα.

Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι

$$I = 0,01 \text{ kgm}^2. \text{ Δίνεται: } g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

Λύση

Για την επίλυση του παραδείγματος, θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

- α) θα επιλέξουμε κατάλληλους ορισμούς, νόμους, μαθηματικές σχέσεις.
- β) θα γράψουμε δεδομένα – ζητούμενα.
- γ) θα κάνουμε το σχήμα.
- δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.
- ε) θα εξειδικεύσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.
- στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και
- ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

Επειδή η διπλή τροχαλία μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα υπό την επίδραση ροπών, ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{\gamma} \quad (1)$$

Επειδή η διπλή τροχαλία είναι ακλόνητα στερεωμένη μέσω άρθρωσης, δεν εκτελεί μεταφορική κίνηση, επομένως ισχύει ότι:

$$\Sigma F = 0 \begin{cases} \Sigma F_x = 0 & (2) \\ \Sigma F_y = 0 & (3) \end{cases}$$

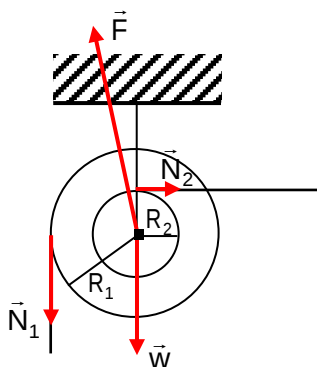
Για τη μεταφορική κίνηση των σωμάτων της άσκησης ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_1 = m_1 \cdot \alpha_1 \quad (4)$$

$$\Sigma F_2 = m_2 \cdot \alpha_2 \quad (5)$$

Δεδομένα	Ζητούμενα
$R_1 = 0,2 \text{ m}$ $R_2 = 0,1 \text{ m}$ $m_1 = 2 \text{ kg}$ $m_2 = 1 \text{ kg}$ $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ $I = 0,01 \text{ kgm}^2$	α. σχεδιασμός δυνάμεων β. αναγραφή νόμων γ. σχέσεις επιταχύνσεων δ. $\vec{a}_\gamma = ?$

α) Στη διπλή τροχαλία ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα:



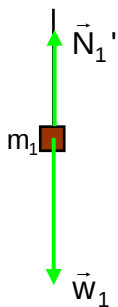
- Οι δυνάμεις $\vec{N}_1$, $\vec{N}_2$ ασκούνται από τα νήματα στη διπλή τροχαλία.
- Η δύναμη $\vec{w}$ ασκείται από τη Γη στη διπλή τροχαλία.

- Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται από την άρθρωση στη διπλή τροχαλία.

Η δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να σχεδιαστεί πλάγια, όπως φαίνεται στο σχήμα, διότι:

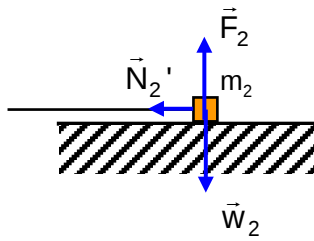
- Λόγω της (2), η δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να έχει οριζόντια συνιστώσα, τέτοια που να εξουδετερώνει τη δύναμη $\vec{N}_2$.
- Λόγω της (3), η δύναμη $\vec{F}$ πρέπει να έχει κατακόρυφη συνιστώσα, τέτοια που να εξουδετερώνει τις δυνάμεις $\vec{N}_1$ και $\vec{w}$.

Στο σώμα Σ_1 ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα:



- Η δύναμη $\vec{N}_1'$ ασκείται από το νήμα στο σώμα Σ_1 .
- Η δύναμη $\vec{w}_1$ ασκείται από τη Γη στο σώμα Σ_1 .

Στο σώμα Σ_2 ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα:



- Η δύναμη $\vec{N}_2'$ ασκείται από το νήμα στο σώμα Σ_2 .
- Η δύναμη $\vec{W}_2$ ασκείται από τη Γη στο σώμα Σ_2 .
- Η δύναμη $\vec{F}_2$ ασκείται από το έδαφος στο σώμα Σ_2 .

Επειδή για το σώμα Σ_2 ισχύει ότι $\Sigma \vec{F}_y = \vec{0}$, οι δυνάμεις $\vec{W}_2$, $\vec{F}_2$ εξουδετερώνονται, επομένως θα μελετήσουμε μόνο την επίδραση της $\vec{N}_2'$.

Επειδή τα νήματα είναι αβαρή έχουμε:

$$\vec{N}_1 = -\vec{N}_1' \Rightarrow N_1 = N_1' \quad (6)$$

$$\vec{N}_2 = -\vec{N}_2' \Rightarrow N_2 = N_2' \quad (7)$$

β) Για τη χρήση της σχέσης (1), θέτουμε θετική την αριστερόστροφη φορά και χρησιμοποιούμε αλγεβρικές τιμές. Οι ροπές υπολογίζονται ως προς το σταθερό άξονα περιστροφής στο κέντρο της διπλής τροχαλίας:

Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη στροφική κίνηση

$$\tau_1 = +N_1 \cdot R_1$$

$$\tau_2 = -N_2 \cdot R_2$$

$$\tau_w = 0$$

$$\tau_F = 0$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) έχουμε:

$$\tau_1 + \tau_2 + \tau_w + \tau_F = I \cdot a_\gamma \Rightarrow N_1 \cdot R_1 - N_2 \cdot R_2 = I \cdot a_\gamma \quad (8)$$

Θεμελιώδης νόμος της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση των m_1 και m_2

Από τη σχέση (4), θέτοντας θετική την προς τα κάτω φορά, έχουμε:

$$\Sigma F_1 = m_1 \cdot \alpha_1 \Rightarrow w_1 - N_1' = m_1 \cdot \alpha_1$$

και λόγω της (6):

$$w_1 - N_1 = m_1 \cdot \alpha_1 \quad (9)$$

Από τη σχέση (5), θέτοντας θετική την προς τ' αριστερά φορά, έχουμε:

$$\Sigma F_2 = m_2 \cdot \alpha_2 \Rightarrow N_2' = m_2 \cdot \alpha_2$$

και λόγω της (7):

$$N_2 = m_2 \cdot \alpha_2 \quad (10)$$

γ) Επειδή τα νήματα δεν ολισθαίνουν πάνω στους δίσκους, το τόξο ds κατά το οποίο έχει στραφεί η περιφέρεια ενός εκ των δύο δίσκων της διπλής τροχαλίας σε χρόνο dt , θα είναι ίσο με την απόσταση dx κατά την οποία έχει τυλιχθεί ή ξετυλιχθεί το αντίστοιχο νήμα, άρα και με την απόσταση dx κατά την οποία έχει μετατοπισθεί το αντίστοιχο σώμα. Επομένως:

$$dx = ds = d\theta \cdot R \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \Rightarrow v = \omega \cdot R \Rightarrow \frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \Rightarrow \alpha = a_\gamma \cdot R$$

Για καθένα από τα δύο σώματα, η σχέση αυτή γράφεται (S.I.):

$$\alpha_1 = a_\gamma \cdot R_1 \Rightarrow \alpha_1 = 0,2 \cdot a_\gamma \quad (11)$$

$$\alpha_2 = a_\gamma \cdot R_2 \Rightarrow \alpha_2 = 0,1 \cdot a_\gamma \quad (12)$$

δ) Θα λύσουμε το σύστημα των εξισώσεων: (8), (9), (10), (11) και (12). Από την (8), με αντικατάσταση τιμών, έχουμε (S.I.):

$$N_1 \cdot 0,2 - N_2 \cdot 0,1 + 0 + 0 = 0,01 \cdot a_\gamma \Rightarrow 0,2 \cdot N_1 - 0,1 \cdot N_2 = 0,01 \cdot a_\gamma \quad (13)$$

Από τις (9) και (11), με αντικατάσταση τιμών, έχουμε:

$$N_1 = m_1 g - m_1 \cdot \alpha_1 \Rightarrow N_1 = 20 - 2 \cdot 0,2 \cdot a_\gamma \Rightarrow N_1 = 20 - 0,4 \cdot a_\gamma \quad (14)$$

Από τις (10) και (12), με αντικατάσταση τιμών, έχουμε (S.I.):

$$N_2 = m_2 \cdot \alpha_2 \Rightarrow N_2 = 0,1 \cdot a_\gamma \quad (15)$$

Αντικαθιστώντας τις σχέσεις (14) και (15) στη (13) έχουμε (S.I.):

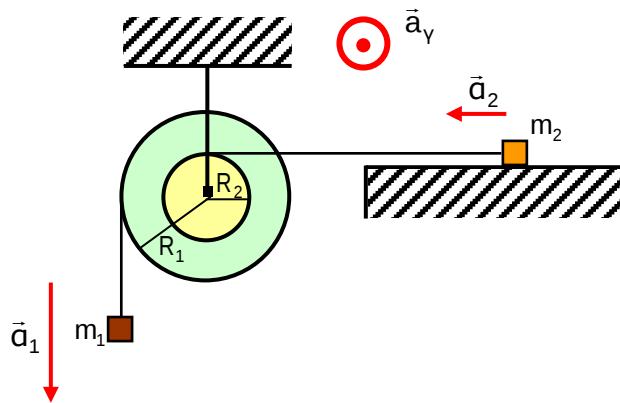
$$0,2 \cdot (20 - 0,4 \cdot a_\gamma) - 0,1 \cdot 0,1 \cdot a_\gamma = 0,01 \cdot a_\gamma \Rightarrow$$

$$4 - 0,08 \cdot a_\gamma - 0,01 \cdot a_\gamma = 0,01 \cdot a_\gamma \Rightarrow 4 - 0,09 \cdot a_\gamma = 0,01 \cdot a_\gamma \Rightarrow$$

$$4 = 0,1 \cdot a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = +40 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

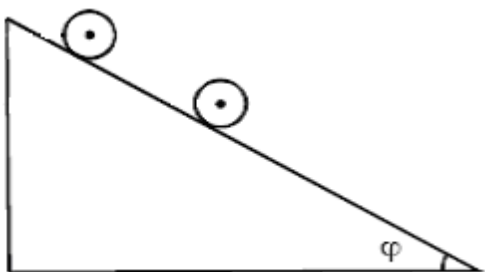
Το θετικό πρόσημο στην αλγεβρική τιμή της γωνιακής επιτάχυνσης σημαίνει ότι το διάνυσμα της γωνιακής επιτάχυνσης είναι πάνω στον άξονα περιστροφής με την

κατεύθυνση του σχήματος (σημειώνεται παράπλευρα χάριν σαφήνειας). Στο σχήμα φαίνονται και οι κατευθύνσεις των $\vec{a}_1$ και $\vec{a}_2$:



Πρόβλημα 2.

Ένας ομογενής και συμπαγής κύλινδρος μάζας $M = 2 \text{ kg}$ και ακτίνας $R = 0,2 \text{ m}$ αφήνεται να κυλίσει κατά μήκος ενός πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης φ , με $\eta\mu\varphi = 0,6$, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει.

α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο, να γράψετε και να εφαρμόσετε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση και το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη Στροφική Κίνηση του κυλίνδρου (Δε ζητείται αριθμητική αντικατάσταση).

β) Να υπολογίσετε το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου καθώς αυτός κυλίεται.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης της στατικής τριβής που ασκείται στον κύλινδρο από το πλάγιο επίπεδο.

δ) Να βρείτε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου όταν το κέντρο μάζας του μετατοπιστεί 8m από το σημείο που αυτός αφέθηκε ελεύθερος.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονά του $I = \frac{1}{2}MR^2$ και η

επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Λύση

Για την επίλυση του παραδείγματος 3, θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

α) θα επιλέξουμε κατάλληλους νόμους.

β) θα γράψουμε δεδομένα – ζητούμενα.

γ) θα κάνουμε το σχήμα.

δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.

ε) θα εξειδικεύσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.

στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και

ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

Επειδή ο κύλινδρος είναι ομογενής, το κέντρο μάζας του βρίσκεται στο κέντρο συμμετρίας του.

Στον κάθετο στη μεταφορική κίνηση άξονα (άξονα $y'y'$) ισχύει:

$$\Sigma F_y = 0$$

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει, στον άξονα της κίνησης (άξονας $x'x'$), ο Θεμελιώδης Νόμος της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση:

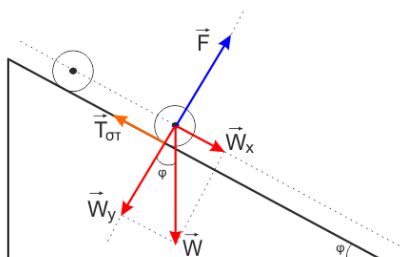
$$\Sigma F_x = M \cdot a_{cm} \quad (1)$$

Επειδή ο κύλινδρος στρέφεται υπό την επίδραση ροπών γύρω από ελεύθερο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, είναι άξονας συμμετρίας και δεν αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης, ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma \tau = I \cdot a_\gamma \quad (2)$$

Δεδομένα	Ζητούμενα
$M = 2 \text{ kg}$ $R = 0,2 \text{ m}$ $\eta_{\mu\phi} = 0,6$ $\omega_0 = 0, \quad v_{\text{cm},0} = 0$ $\delta) \quad x_{\text{cm}} = 8 \text{ m}$ $I = \frac{1}{2}MR^2$ $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	α) σχήμα και νόμοι β) $a_{\text{cm}} = ?$ γ) $T_{\sigma\tau} = ?$ δ) $\omega = ?$

α) Στον κύλινδρο ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα:



- Η δύναμη $\vec{w}$ ασκείται από τη Γη στον κύλινδρο και αναλύεται στις $\vec{w}_x$ και $\vec{w}_y$.
- Η δύναμη $\vec{F}$ ασκείται από το δάπεδο στον κύλινδρο και είναι κάθετη στο δάπεδο.
- Η δύναμη $\vec{T}_{στ}$ ασκείται από το δάπεδο στον κύλινδρο και είναι παράλληλη στο δάπεδο.

Μεταφορική κίνηση

Θεωρώντας θετική τη φορά κίνησης (προς τα κάτω), η σχέση (1) γράφεται:

$$w_x - T_{στ} = M \cdot \alpha_{cm} \quad (3)$$

Στροφική κίνηση

Θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής (δεξιόστροφη), για τις ροπές των δυνάμεων έχουμε:

$$\tau_w = 0$$

$$\tau_F = 0$$

$$\tau_{T_{στ}} = T_{στ} \cdot R$$

Επομένως, η σχέση (2) γράφεται:

$$\tau_w + \tau_F + \tau_{T_{στ}} = I \cdot a_\gamma \Rightarrow T_{στ} \cdot R = I \cdot a_\gamma \quad (4)$$

β) Επίσης, επειδή ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει, ισχύουν (S.I.):

$$v_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow v_{cm} = 0,2 \cdot \omega \quad (5)$$

$$\alpha_{cm} = a_\gamma \cdot R \Rightarrow \alpha_{cm} = 0,2 \cdot a_\gamma \quad (6)$$

Από την ανάλυση του $\vec{w}$ έχουμε:

$$w_x = w \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow w_x = Mg \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow w_x = 12 \text{ N} \quad (7)$$

Επίσης, για τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου έχουμε:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow I = 0,04 \text{ kgm}^2 \quad (8)$$

Θέτουμε τις (6) και (7) στην (3) και λύνουμε (S.I.):

$$w_x - T_{στ} = M \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow 12 - T_{στ} = 2 \cdot 0,2 \cdot a_\gamma \Rightarrow T_{στ} = 12 - 0,4 \cdot a_\gamma \quad (9)$$

Θέτουμε τις (8) και (9) στην (4) και λύνουμε (S.I.):

$$T_{στ} \cdot R = I \cdot a_\gamma \Rightarrow (12 - 0,4 \cdot a_\gamma) \cdot 0,2 = 0,04 \cdot a_\gamma \Rightarrow 2,4 - 0,08 \cdot a_\gamma = 0,04 \cdot a_\gamma \Rightarrow$$

$$0,12 \cdot a_\gamma = 2,4 \Rightarrow a_\gamma = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Με αντικατάσταση στην (6) έχουμε:

$$\alpha_{\text{cm}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

γ) Θέτουμε την τιμή $a_\gamma = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ στην (9) και έχουμε:

$$T_{\sigma\tau} = 4 \text{ N}.$$

δ) Επειδή ο κύλινδρος, στη μεταφορική του κίνηση, εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, θα έχουμε (S.I.):

$$v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} t \Rightarrow v_{\text{cm}} = 4t \quad (10)$$

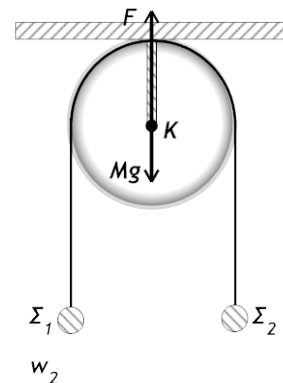
$$x_{\text{cm}} = \frac{1}{2} \alpha_{\text{cm}} t^2 \Rightarrow 8 = 2t^2 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

και με αντικατάσταση στην (10) έχουμε $v_{\text{cm}} = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και λόγω της (5):

$$\omega = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Πρόβλημα 3.

Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 , με μάζες $m_1=3 \text{ Kg}$ και $m_2=1 \text{ Kg}$ αντίστοιχα, συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα, που είναι τυλιγμένο σε ομογενή δίσκο τροχαλίας, ακτίνας $R=0,25 \text{ m}$ και μάζας $M=2 \text{ Kg}$. Τα σώματα συγκρατούνται αρχικά στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t=0$, αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο, οπότε αρχίζει περιστρέφεται χωρίς το νήμα να ολισθαίνει στην τροχαλία.



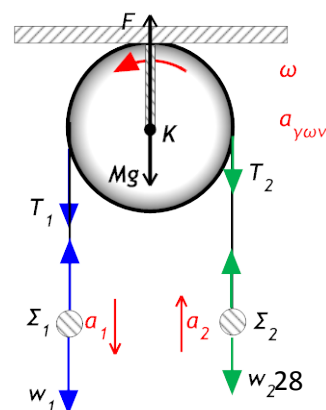
- Να βρείτε αν το σύστημα θα περιστραφεί δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα.
- Να υπολογίσετε τα μέτρα της επιτάχυνσης των σωμάτων.
- Να υπολογίσετε τα μέτρα των τάσεων, που ασκεί το νήμα στα δύο σώματα.
- Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης στήριξης της τροχαλίας από τον άξονα.
- Να υπολογίσετε το μήκος του νήματος, που ξετυλίγεται από την τροχαλία, σε χρόνο $t = 2 \text{ s}$.

Δίνονται $g = 10 \text{ m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της: $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση

α) Για να βρούμε προς τα πού θα στραφεί η τροχαλία υπολογίζουμε τη συνισταμένη των ροπών, των εξωτερικών δυνάμεων, που ασκούνται στο σύστημα τροχαλία - νήμα - σώματα. Οι ασκούμενες εξωτερικές δυνάμεις είναι τα βάρη των σωμάτων $w_1=m_1g$ και $w_2=m_2g$, το βάρος της τροχαλίας $w = Mg$ και η δύναμη στήριξης F από τον άξονα. Απ' αυτές ροπή προκαλούν μόνο τα βάρη των σωμάτων, καθώς το βάρος της τροχαλίας και η δύναμη στήριξης ασκούνται στον άξονα, άρα δεν προκαλούν ροπή.

Έτσι, θεωρώντας θετική φορά την αριστερόστροφη, έχουμε θετική ροπή για το w_1 και αρνητική ροπή για το w_2 , οπότε το άθροισμα των ροπών είναι:



$$\Sigma\tau = m_1 g \cdot R - m_2 g \cdot R = gR(m_1 - m_2) \xRightarrow{\text{S.I.}} \Sigma\tau = 10 \cdot 0,25 \cdot 2 \text{ Nm} = +5 \text{ Nm}.$$

Εφόσον η $\Sigma\tau$ έχει θετικό πρόσημο, το σύστημα θα περιστραφεί στην κατά σύμβαση θετική φορά, δηλαδή αριστερόστροφα.

β) Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για τη Στροφική κίνηση της τροχαλίας, λαμβάνοντας υπόψη ότι ροπή προκαλούν μόνο οι τάσεις του νήματος T_1 και T_2 (η τάση του νήματος έχει διαφορετική τιμή στην είσοδο και στην έξοδό του από την τροχαλία: $T_1 \neq T_2$).

$$\Sigma\tau = I_{\text{cm}} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = I_{\text{cm}} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow (T_1 - T_2) \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$T_1 - T_2 = \frac{M}{2} R \cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (1).$$

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη Μεταφορική κίνηση κάθε σώματος στον κατακόρυφο άξονα (θεωρούμε ως θετική φορά, αυτήν της κίνησης κάθε σώματος, δηλαδή την προς τα κάτω για το Σ_1 και την προς τα πάνω για το Σ_2):

$$\text{Για το } \Sigma_1: \Sigma F = m_1 a_1 \Rightarrow m_1 g - T'_1 = m_1 a_1 \quad (2).$$

$$\text{Για το } \Sigma_2: \Sigma F = m_2 a_2 \Rightarrow T'_2 - m_2 g = m_2 a_2 \quad (3).$$

Γνωρίζουμε ότι ένα τεντωμένο αβαρές νήμα ασκεί ίσου μέτρου τάσεις στα σώματα, που «ενώνει», άρα: $T'_1 = T_1$ και $T'_2 = T_2$ (4).

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία και παραμένει τεντωμένο, όλα τα σημεία του νήματος έχουν κοινή ταχύτητα, οπότε: $v_1 = v_2 = v_{\text{τροχ}}$, όπου $v_{\text{τροχ}} = \omega R$ είναι η γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, που έρχονται σε επαφή με το νήμα. Φυσικά θα είναι ίσοι και οι ρυθμοί μεταβολής τους, οπότε:

$$\frac{dv_1}{dt} = \frac{dv_2}{dt} = \frac{dv_{\text{τροχ}}}{dt} \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \frac{d\omega}{dt} R \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = a_{\gamma\omega\nu} R. \text{ Ονομάζουμε αυτή την κοινή}$$

$$\text{επιτάχυνση } \alpha, \text{ δηλαδή: } \alpha_1 = \alpha_2 = a_{\gamma\omega\nu} R = \alpha \quad (5).$$

Επιλύουμε το σύστημα ως εξής:

Από τις (1) και (5) προκύπτει: $T_1 - T_2 = \frac{M}{2}\alpha$ (6).

Από τις (2), (4) και (5) προκύπτει: $m_1g - T_1 = m_1\alpha$ (7).

Από τις (3), (4) και (5) προκύπτει: $T_2 - m_2g = m_2\alpha$ (8).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (6), (7) και (8), οπότε έχουμε:

$$X'_1 - X'_2 + m_1g - X'_1 - m_2g + X'_2 = m_1\alpha + m_2\alpha + \frac{M}{2}\alpha \Rightarrow m_1g - m_2g = (m_1 + m_2 + \frac{M}{2})\alpha \quad \text{και}$$

$$\text{λύνοντας ως προς την κοινή επιτάχυνση βρίσκουμε τελικά: } \alpha = \frac{(m_1 - m_2)g}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}.$$

$$\text{Αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε: } \alpha = \frac{(3-1)10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{3+1+\frac{2}{2}} \Rightarrow \alpha = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

γ) Για να βρούμε τις τάσεις T_1 και T_2 αξιοποιούμε τις (7) και (8). Έτσι:

$$\text{Από την (7): } T_1 = m_1g - m_1\alpha = m_1(g - \alpha) \xrightarrow{\text{S.I.}} T_1 = 3 \cdot (10 - 4)\text{N} \Rightarrow T_1 = 18 \text{ N} \quad \text{και}$$

$$\text{από την (8): } T_2 = m_2\alpha + m_2g = m_2(g + \alpha) \xrightarrow{\text{S.I.}} T_2 = 1 \cdot (10 + 4)\text{N} \Rightarrow T_2 = 14 \text{ N}.$$

δ) Η δύναμη στήριξης από τον άξονα, υπολογίζεται αν εφαρμόσουμε για την τροχαλία τη συνθήκη ισορροπίας, επειδή ακινητεί μεταφορικά:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F - Mg - T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow F = Mg + T_1 + T_2 \xrightarrow{\text{S.I.}} F = (2 \cdot 10 + 18 + 14)\text{N} \Rightarrow F = 52 \text{ N}.$$

ε) Το μήκος του νήματος, που ξετυλίγεται, σε χρόνο t , ισούται με το τόξο που διαγράφουν τα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας στον ίδιο χρόνο: $L = \hat{s}$.

Απ' τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι το μήκος του τόξου δίνεται από τη σχέση: $\hat{s} = R \cdot \theta$, όπου θ η γωνία σε rad, που διαγράφει η τροχαλία. Δηλαδή: $L = R \cdot \theta$ (9).

Η γωνία θ υπολογίζεται από το νόμο της γωνιακής μετατόπισης, λαμβάνοντας υπόψη ότι η στρωφική κίνηση της τροχαλίας είναι Ομαλά Επιταχυνόμενη, χωρίς αρχική ταχύτητα, δηλαδή: $\theta = \frac{a_{\gamma\omega\nu}}{2} t^2$ (10).

Η γωνιακή επιτάχυνση υπολογίζεται απ' την (5): $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha}{R} = \frac{4}{0,25} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 16 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

Έτσι η (10) δίνει: $\theta = \frac{a_{\gamma\omega\nu}}{2} t^2 = \frac{16}{2} 2^2 \text{rad} \Rightarrow \theta = 32 \text{ rad}$, και τελικά απ' την (9) βρίσκουμε:

$$L = R \cdot \theta = 0,25 \cdot 32 \text{m} \Rightarrow L = 8 \text{ m}.$$

Πρόβλημα 4.

Σφαίρα ακτίνας R και μάζας m εκτοξεύεται προς τα πάνω από τη βάση κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης $\varphi = 30^\circ$, με αρχική ταχύτητα $v_0 = 10 \text{ m/s}$ και κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει. Να υπολογίσετε:

- Το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της σφαίρας.
- Το μέτρο της στατικής τριβής, αν η μάζα της σφαίρας είναι $m = 1,4 \text{ kg}$.
- τη χρονική διάρκεια και τη μετατόπιση της σφαίρας μέχρι να σταματήσει στιγμιαία.
- για ποιες τιμές του συντελεστή στατικής τριβής, η σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνονται για τη σφαίρα: $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}mR^2$ η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και

$$\sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

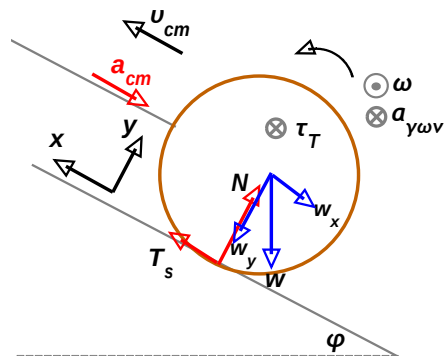
Λύση

α) Στη σφαίρα κατά την άνοδό της ασκούνται οι εξής δυνάμεις: Το βάρος $w = mg$ στο κέντρο μάζας της σφαίρας, η κάθετη αντίδραση N στο σημείο επαφής σφαίρας-επιπέδου και η στατική τριβή T_s στο σημείο επαφής σφαίρας-επιπέδου, με διεύθυνση παράλληλη στο επίπεδο.

Εφόσον οι δυνάμεις N και w δεν προκαλούν ροπή ως προς το cm της σφαίρας, η φορά της στατικής τριβής T_s θα είναι προς τα πάνω, έτσι ώστε η ροπή της να προκαλεί τη στρωτική επιβράδυνση της σφαίρας, δηλαδή θα πρέπει να είναι ομόρροπη με τη γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu}$ της σφαίρας.

Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy , με τον άξονα Ox παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και θετική φορά την προς τα πάνω. Αναλύουμε το βάρος mg σε δύο συνιστώσες: την $w_x = mg \sin \varphi$ στον Ox και την $w_y = mg \cos \varphi$ στον Oy .

Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής σε κάθε άξονα.



Στον Οχ κινείται ομαλά επιβραδυνόμενα, οπότε με βάση το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F_x = m \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_s - mg\eta\mu\phi = -m \cdot \alpha_{cm} \Rightarrow T_s = mg\eta\mu\phi - m\alpha_{cm} \quad (1).$$

Ακολουθώντας τη σύμβαση του Σχολικού βιβλίου, θεωρούμε θετική φορά την προς τα έξω, οπότε τα διανύσματα της ροπής της στατικής τριβής και της γωνιακής επιτάχυνσης, έχουν αρνητική φορά. Για τη στροφική κίνηση της σφαίρας εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της cm, οπότε:

$$\Sigma \tau = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -T_s \cdot R = \frac{2}{5} m R^2 (-a_{\gamma\omega\nu}) \Rightarrow T_s = \frac{2}{5} m R a_{\gamma\omega\nu} \quad (2).$$

Επειδή η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει, θα ισχύει: $\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R} \quad (3).$

Έτσι θα έχουμε τελικά: $T_s = \frac{2}{5} m \cancel{R} \frac{\alpha_{cm}}{\cancel{R}} = \frac{2}{5} m \alpha_{cm} \quad (4).$

Επιλύουμε τώρα το σύστημα:

Εξισώνοντας τα πρώτα μέλη των (1) και (4) βρίσκουμε:

$$\frac{mg}{2} - m\alpha_{cm} = \frac{2}{5} m\alpha_{cm} \Rightarrow \frac{mg}{2} = \frac{7}{5} m\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{25}{7} \text{ m/s}^2.$$

β) Αντικαθιστώντας στην (4) τις τιμές των m και α_{cm} βρίσκουμε:

$$T_s = \frac{2}{5} 1,4 \frac{25}{7} \text{ N} = \frac{14}{7} \text{ N} \Rightarrow T_s = 2 \text{ N}.$$

γ) Η Μεταφορική Κίνηση είναι Ομαλά Επιβραδυνόμενη μέχρι να σταματήσει, οπότε:

$$0 = v_0 - \alpha_{cm} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{v_0}{\alpha_{cm}} = \frac{10}{\frac{25}{7}} \text{ s} \Rightarrow t_1 = 2,8 \text{ s}.$$

Η απόσταση μέχρι να σταματήσει είναι: $s = v_0 t_1 - \frac{a_{cm}}{2} t_1^2$ και αντικαθιστώντας τις ήδη γνωστές τιμές, έχουμε:

$$s = (10 \cdot 2,8 - \frac{25}{2} 2,8^2) \text{ m} = (28 - \frac{25}{14} 7,84) \text{ m} = (28 - \frac{196}{14}) \text{ m} = (28 - 14) \text{ m} \Rightarrow s = 14 \text{ m} .$$

δ) Για να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει η σφαίρα, θα πρέπει η στατική τριβή να είναι μικρότερη (ή οριακά ίση) με τη μέγιστη τιμή της, που είναι η οριακή τριβή: $T_s \leq T_{op}$ (5).

Γνωρίζουμε, όμως, ότι η οριακή τριβή υπολογίζεται από τη σχέση: $T_{op} = \mu_\sigma \cdot N$ (6), όπου μ_σ είναι ο συντελεστής στατικής τριβής και N η κάθετη αντίδραση του δαπέδου στη σφαίρα, που θα υπολογιστεί από τη Συνθήκη Ισορροπίας στον Ογ:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg \sin \varphi = 0 \Rightarrow N = mg \sin \varphi \text{ (7)} .$$

Αντικαθιστώντας τώρα την (7) στην (6) βρίσκουμε για την οριακή τριβή:

$$T_{op} = \mu_\sigma mg \sin \varphi \text{ (8)} .$$

Τέλος, αντικαθιστώντας τις (4) και (8) στην (5) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2}{5} m a_{cm} \leq \mu_\sigma mg \sin \varphi &\Rightarrow \mu_\sigma \geq \frac{\frac{2}{5} m a_{cm}}{mg \sin \varphi} \Rightarrow \\ \mu_\sigma \geq \frac{\frac{2}{5} m a_{cm}}{mg \sin 30^\circ} &\Rightarrow \mu_\sigma \geq \frac{\frac{2}{5} \cdot \frac{25}{7}}{10 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}} \Rightarrow \mu_\sigma \geq \frac{100}{7 \cdot 50 \cdot \sqrt{3}} \Rightarrow \mu_\sigma \geq \frac{2\sqrt{3}}{7 \cdot 3} \Rightarrow \mu \geq \frac{2\sqrt{3}}{21} . \end{aligned}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 18/7/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 3: ΡΟΠΗ ΑΔΡΑΝΕΙΑΣ - ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΝΟΜΟΣ ΣΤΡΟΦΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένας ομογενής οριζόντιος δίσκος, μάζας M και ακτίνας R , περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο ακλόνητο άξονα z , ο οποίος διέρχεται από το κέντρο K του δίσκου. Ένα μικρό σώμα, μάζας m , τοποθετείται πολύ κοντά στο κέντρο K και αρχίζει να ολισθαίνει αργά προς την περιφέρεια του δίσκου. Κατά τη διάρκεια της κίνησης του μικρού σώματος προς την περιφέρεια, η ροπή αδράνειας του συστήματος δίσκος – μικρό σώμα:

- α) μειώνεται.
- β) μένει σταθερή.
- γ) αυξάνεται.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Γνωρίζουμε ότι η ροπή αδράνειας ενός συστήματος είναι ίση με το άθροισμα των ροπών αδράνειας των σωμάτων, που αποτελούν το σύστημα. Έτσι το σύστημα δίσκου – μικρού σώματος θα έχει ροπή αδράνειας: $I_{ολ} = I_{\delta} + mr^2$, όπου r είναι η απόσταση του υλικού σημείου από τον άξονα περιστροφής.

Η αρχική απόσταση του σώματος από τον άξονα περιστροφής είναι περίπου μηδέν, οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι περίπου ίση με τη ροπή αδράνειας του δίσκου: $I_{ολ} \simeq I_{\delta}$.

Καθώς κινείται το σώμα, η απόσταση r αυξάνεται και στην τελική θέση, το σώμα είναι στη μέγιστη απόσταση R , οπότε η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι ίση με: $I'_{ολ} = I_{\delta} + mR^2$.

Συνεπώς, κατά τη διάρκεια της κίνησης του μικρού σώματος, η ροπή αδράνειας του συστήματος αυξάνεται.

Ερώτηση 2.

Ένας ομογενής ξύλινος δίσκος (1) και ένας ομογενής μεταλλικός δακτύλιος (2) έχουν την ίδια μάζα και την ίδια ακτίνα. Αν I_1 και I_2 είναι αντίστοιχα η ροπή αδράνειας του δίσκου και του δακτυλίου ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό τους, που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους, τότε ισχύει η σχέση:

α) $I_1 < I_2$.

β) $I_1 = I_2$.

γ) $I_1 > I_2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Γνωρίζουμε ότι, μεταξύ σωμάτων ίδιας μάζας, η ροπή αδράνειας του σώματος εξαρτάται από την κατανομή της μάζας του ως προς τον άξονα περιστροφής και συγκεκριμένα, όσο πιο απομακρυσμένες είναι οι στοιχειώδεις μάζες του σώματος από τον άξονα περιστροφής, τόσο πιο μεγάλη είναι η ροπή αδράνειας ($I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$).

Στο δακτύλιο όλες οι στοιχειώδεις μάζες του απέχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το κέντρο του, ενώ στον δίσκο οι στοιχειώδεις μάζες του απέχουν, από τον άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο του, απόσταση, που κυμαίνεται μεταξύ 0 και R .

Συνεπώς ο δακτύλιος (με ροπή αδράνειας I_2) έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας από το δίσκο (με ροπή αδράνειας I_1).

Ερώτηση 3.

Μία ομογενής ξύλινη ράβδος (1) και μια ομογενής μεταλλική ράβδος (2) έχουν ίδιες διαστάσεις και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το μέσον τους και είναι κάθετος σ' αυτές. Δίνεται ότι η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα κάθετο σ' αυτήν που διέρχεται από το κέντρο μάζας

$$\text{της είναι: } I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} ML^2 .$$

Αρχίζουμε να τις περιστρέφουμε ασκώντας οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου F_1 και F_2 αντίστοιχα στο άκρο τους και κάθετα στη ράβδο. Παρατηρούμε ότι οι δύο ράβδοι αποκτούν την ίδια γωνιακή επιτάχυνση. Για τα μέτρα των δύο δυνάμεων ισχύει ότι:

α) $F_1 = F_2$.

β) $F_1 < F_2$.

γ) $F_1 > F_2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η β.

Επειδή το ξύλο έχει μικρότερη πυκνότητα από το μέταλλο, για ράβδους ίδιων διαστάσεων (άρα και ίδιου μήκους), μικρότερη μάζα έχει η ξύλινη, δηλαδή $M_1 < M_2$.

Από τη σχέση $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} ML^2$, προκύπτει ότι εφόσον οι δύο ράβδοι έχουν το ίδιο μήκος, η ροπή αδράνειάς τους είναι ανάλογη της μάζας τους, δηλαδή: $I_1 < I_2$ (1).

Απ' τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης προκύπτει για την απαιτούμενη ροπή δύναμης (που σε κάθε περίπτωση έχει μοχλοβραχίονα $\frac{L}{2}$):

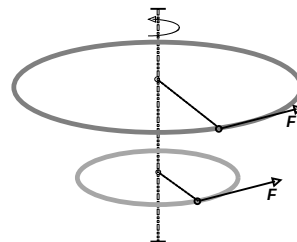
$$\Sigma \tau = I_{\text{cm}} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_F = I_{\text{cm}} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \frac{L}{2} = I_{\text{cm}} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F = \frac{2I_{\text{cm}} a_{\gamma\omega\nu}}{L} \Rightarrow F = \frac{2a_{\gamma\omega\nu}}{L} I_{\text{cm}} , \quad \text{δηλαδή} \quad \eta$$

απαιτούμενη δύναμη είναι ανάλογη της ροπής αδράνειας, όταν η γωνιακή επιτάχυνση και το μήκος των ράβδων είναι το ίδιο.

Συνεπώς, και με βάση την (1), η ξύλινη ράβδος (1) απαιτεί μικρότερη δύναμη απ' την μεταλλική (2): $F_1 < F_2$.

Ερώτηση 4.

Δύο οριζόντιοι τροχοί A και B, με ακτίνες αμελητέας μάζας, έχουν την ίδια μάζα και όλη η μάζα τους είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη στην περιφέρειά τους. Ο τροχός A έχει τη διπλάσια ακτίνα απ' τον τροχό B. Οι δύο τροχοί μπορούν να περιστρέφονται γύρω από κατακόρυφο άξονα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας τους. Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός τροχού ως προς άξονα, που διέρχεται από το κέντρο μάζας του: $I_{cm} = mR^2$.



Ασκούμε εφαπτομενικά στην περιφέρεια κάθε τροχού δύναμη F ίδιου μέτρου. Για τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων που θα αποκτήσουν οι δύο τροχοί, ισχύει ότι:

α) $a_A < a_B$.

β) $a_A = a_B$.

γ) $a_A > a_B$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

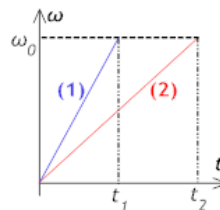
Από τη σχέση $I_{cm} = mR^2$, προκύπτει ότι, επειδή η μάζα τους είναι ίδια, η ροπή αδράνειας του τροχού είναι ανάλογη του τετραγώνου της ακτίνας του. Επομένως, εφόσον απ' την εκφώνηση δίνεται για τις ακτίνες ότι: $R_A = 2R_B$, ο τροχός A θα έχει τετραπλάσια ροπή αδράνειας από τον B: $I_A = 4I_B$ (1).

Επειδή η ίδια δύναμη F ασκείται εφαπτομενικά, η ροπή της θα ισούται με: $\tau = F \cdot R$, συνεπώς θα είναι ανάλογη της ακτίνας: $\tau_A = 2\tau_B$ (2).

Η γωνιακή επιτάχυνση του τροχού, υπολογίζεται από τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau}{I}$. Έτσι εφόσον, σύμφωνα με τη (2), ο τροχός A δέχεται διπλάσια ροπή (στον αριθμητή) και σύμφωνα με την (1), έχει τετραπλάσια ροπή αδράνειας (στον παρονομαστή), θα αποκτήσει τη μισή γωνιακή επιτάχυνση.

Ερώτηση 5.

Δύο ομογενείς κύλινδροι (1) και (2), ίδιας μάζας M και ίδιας ακτίνας R , αρχίζουν να κατέρχονται κυλιόμενοι σε πλάγιο επίπεδο δεχόμενοι την ίδια επιταχύνουσα συνολική ροπή. Ο ένας εκ των δύο κυλίνδρων είναι συμπαγής και ο άλλος κούφιος.



Η γραφική παράσταση του μέτρου της γωνιακής τους ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο, φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Ο κούφιος κύλινδρος είναι ο:

α) (1).

β) (2).

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (β).

Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης για κάθε κύλινδρο, εφαρμόζοντας τη σχέση ορισμού της γωνιακής επιτάχυνσης: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$ και τις πληροφορίες από το διάγραμμα που δίνεται.

Για τον 1^ο κύλινδρο, η γωνιακή επιτάχυνση ισούται με την κλίση της ευθείας:

$$a_1 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_0 - 0}{t_1 - 0} = \frac{\omega_0}{t_1}.$$

Για τον 2^ο κύλινδρο, η γωνιακή επιτάχυνση ισούται με την κλίση της ευθείας:

$$a_2 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega_0 - 0}{t_2 - 0} = \frac{\omega_0}{t_2}.$$

Από το διάγραμμα $\omega - t$ βλέπουμε ότι $t_2 > t_1$, οπότε για τις γωνιακές επιταχύνσεις ισχύει: $a_1 > a_2$ (1).

Η εκφώνηση μας πληροφορεί ότι οι δύο κύλινδροι δέχονται την ίδια ροπή: $\tau_1 = \tau_2 = \tau$ (2).

Απ' τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης προκύπτει ότι: $\Sigma\tau = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow I = \frac{\Sigma\tau}{a_{\gamma\omega\nu}}$.

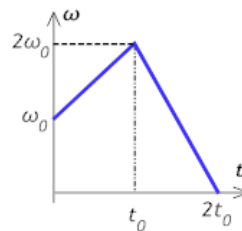
Εφαρμόζοντάς την στους δύο κυλίνδρους έχουμε: $I_1 = \frac{\tau}{a_1}$ και $I_2 = \frac{\tau}{a_2}$. Με βάση τώρα

την (1) προκύπτει ότι: $I_1 < I_2$ (4).

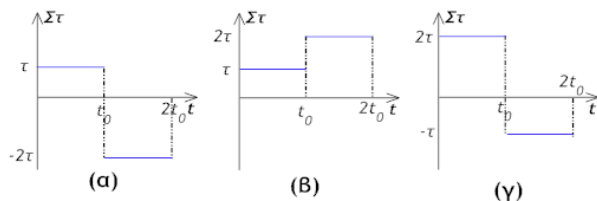
Όμως ο κούφιος κύλινδρος έχει μεγαλύτερη ροπή αδράνειας από τον συμπαγή, διότι οι στοιχειώδεις μάζες, που τον συγκροτούν απέχουν τη μέγιστη δυνατή απόσταση από τον άξονα περιστροφής. Συνεπώς ο κούφιος κύλινδρος είναι ο (2).

Ερώτηση 6.

Ένας κατακόρυφος ομογενής κύλινδρος, στρέφεται αριστερόστροφα με γωνιακή ταχύτητα μέτρου ω_0 γύρω από σταθερό άξονα, που διέρχεται από τον άξονά του. Στον κύλινδρο ασκείται κατάλληλη ροπή δύναμης μέτρου τ_F , οπότε η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του μεταβάλλεται με το χρόνο όπως φαίνεται στο διάγραμμα του σχήματος.



Η σωστή γραφική παράσταση της ροπής τ_F σε συνάρτηση με το χρόνο t είναι το:



Να επιλέξετε το σωστό διάγραμμα και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (α).

Από το διάγραμμα αντιλαμβανόμαστε ότι:

Από 0 έως t_0 , ο κύλινδρος επιταχύνεται ομαλά με γωνιακή επιτάχυνση

$$a_1 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{2\omega_0 - \omega_0}{t_0 - 0} = \frac{\omega_0}{t_0} \quad (1),$$

από t_0 έως $2t_0$, ο κύλινδρος επιβραδύνεται ομαλά με γωνιακή επιτάχυνση

$$a_2 = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{0 - 2\omega_0}{2t_0 - t_0} = -\frac{2\omega_0}{t_0} \quad (2).$$

Απ' τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης $\Sigma\tau = I \cdot a_{\gamma\omega\nu}$ προκύπτει ότι:

από 0 έως t_0 , $\tau_F = I \cdot a_1 = I \frac{\omega_0}{t_0}$ και από t_0 έως $2t_0$, $\tau_F = I \cdot a_2 = -2I \frac{\omega_0}{t_0}$, δηλαδή στο 2^ο

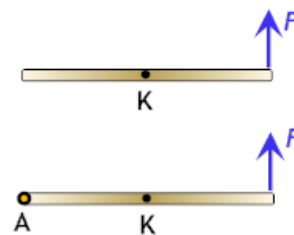
στάδιο της κίνησης, η ροπή είναι αρνητική με διπλάσιο μέτρο.

Συνεπώς το σωστό διάγραμμα είναι το (α).

Ερώτηση 7.

Στο σχήμα φαίνονται σε κάτοψη δύο όμοιες ομογενείς ράβδοι (1) και (2), που βρίσκονται σε λείο οριζόντιο δάπεδο. Η ράβδος (1) είναι ελεύθερη ενώ η ράβδος (2) είναι στερεωμένη ακλόνητα στο αριστερό άκρο της Α. Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς άξονα κάθετο σ' αυτήν που

διέρχεται από το κέντρο μάζας της: $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} ML^2$.



Ασκούμε στο δεξιό άκρο τους την ίδια οριζόντια δύναμη F κάθετα σε κάθε ράβδο. Για τα μέτρα των γωνιακών επιταχύνσεων a_1 και a_2 , που θ' αποκτήσουν αντίστοιχα οι δύο ράβδοι ισχύει:

α) $a_1 < a_2$.

β) $a_1 = a_2$.

γ) $a_1 > a_2$.

Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η (γ).

Γνωρίζουμε (σχολικό βιβλίο, σελ. 113) ότι ένα ελεύθερο σώμα με την επίδραση ροπής δύναμης, (το οποίο εκτελεί ταυτόχρονα μεταφορική και περιστροφική κίνηση) στρέφεται ως προς το νοητό άξονα, που διέρχεται απ' το κέντρο μάζας του.

Έτσι η ελεύθερη ράβδος (1), κατά τη στροφική κίνηση ως προς το κέντρο μάζας της K , δέχεται ροπή: $\tau_1 = F \frac{L}{2}$, ενώ η ροπή αδράνειάς της ως προς το κέντρο μάζας της είναι:

$I_1 = I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} ML^2$. Εφαρμόζοντας τώρα το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης

$$\text{προκύπτει για τη γωνιακή της επιτάχυνση: } a_1 = \frac{\tau_1}{I_1} = \frac{\frac{1}{2} FL}{\frac{1}{12} ML^2} \Rightarrow a_1 = 6 \frac{F}{ML} \quad (1).$$

Η ράβδος (2) στρέφεται ως προς το σταθερό άκρο Α.

Η ροπή, που δέχεται είναι: $\tau_1 = FL$ και η ροπή αδράνειάς της ως προς το άκρο Α, με

βάση το Θεώρημα Steiner είναι ίση με: $I_2 = I_{\text{cm}} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{3} ML^2$.

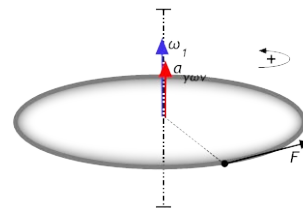
Εφαρμόζοντας πάλι το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης προκύπτει για τη γωνιακή της επιτάχυνση: $a_2 = \frac{\tau_2}{I_2} = \frac{FL}{\frac{1}{3}ML^2} \Rightarrow a_2 = 3\frac{F}{ML}$ (2).

Συγκρίνοντας τις (1) και (2) προκύπτει ότι: $a_1 > a_2$.

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ένας οριζόντιος ομογενής δίσκος ακτίνας $R=0,1\text{ m}$ μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του. Ο δίσκος είναι αρχικά ακίνητος και τη χρονική στιγμή $t=0$ δέχεται εφαπτομενικά στην περιφέρειά του αριστερόστροφη δύναμη μέτρου $F_1=10\text{ N}$ και η οποία του προσδίδει γωνιακή επιτάχυνση μέ-



τρου $a_{\gamma\omega\nu} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

A. Να υπολογίσετε:

α) Τη ροπή αδράνειας I_{cm} του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του.

β) Τη μάζα M του δίσκου.

γ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου τη χρονική στιγμή $t_1=5\text{ s}$.

B. Τη χρονική στιγμή t_1 καταργούμε ακαριαία τη δύναμη F_1 .

δ) Να υπολογίσετε τον αριθμό των περιστροφών που θα κάνει ο δίσκος από τη χρονική στιγμή t_1 έως τη χρονική στιγμή $t_2=15\text{ s}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$.

Λύση

α) Θα υπολογίσουμε αρχικά τη ροπή της δύναμης F , η οποία έχει μοχλοβραχίονα την ακτίνα του δίσκου R : $\tau_F = FR \Rightarrow \tau_F = 10 \cdot 0,1\text{ N} \cdot \text{m} \Rightarrow \tau_F = 1\text{ N} \cdot \text{m}$.

Θα εφαρμόσουμε τώρα το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για το δίσκο, ώστε να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειάς του:

$$\Sigma\tau = I_{\text{cm}} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_F = I_{\text{cm}} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow I_{\text{cm}} = \frac{\tau_F}{a_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow I_{\text{cm}} = \frac{1}{20}\text{ kgm}^2 \Rightarrow I_{\text{cm}} = 0,05\text{ kgm}^2.$$

β) Από τη σχέση που δίνει τη ροπή αδράνειας του δίσκου, υπολογίζουμε τη μάζα του:

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow M = \frac{2I_{\text{cm}}}{R^2} \Rightarrow M = \frac{2 \cdot 0,05}{0,01}\text{ kg} \Rightarrow M = 10\text{ kg}.$$

γ) Εφόσον ο δίσκος έχει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση, η κίνησή του είναι ομαλά επιταχυνόμενη στροφική, οπότε για την γωνιακή ταχύτητα ισχύει η εξίσωση: $\omega = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} \cdot t$. Αντικαθιστούμε και βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα τη χρονική

$$\text{στιγμή } t_1: \omega_1 = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} \cdot t_1 \Rightarrow \omega_1 = (0 + 20 \cdot 5) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_1 = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

δ) Μετά τη χρονική στιγμή t_1 , που καταργείται η δύναμη F , ο δίσκος δε δέχεται ροπές, οπότε εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση με την γωνιακή ταχύτητα ω_1 , που είχε αποκτήσει. Έως τη χρονική στιγμή t_2 θα περιστρέφεται για διάρκεια: $\Delta t = t_2 - t_1 = (15 - 5)\text{s} = 10 \text{ s}$ και θα έχει διαγράψει γωνία στροφής $\Delta\theta = \omega_1 \Delta t \Rightarrow \Delta\theta = 100 \cdot 10 \text{ rad} \Rightarrow \Delta\theta = 1000 \text{ rad}$.

Επειδή σε κάθε περιστροφή διαγράφει γωνία $2\pi \text{ rad}$, ο αριθμός των περιστροφών είναι:

$$N = \frac{\Delta\theta}{2\pi} = \frac{1000}{2\pi} \text{ περιστροφές} \Rightarrow N = \frac{500}{\pi} \text{ περιστροφές}.$$

Άσκηση 2.

Μια ομογενής λεπτή δοκός ΚΑ, μάζας $M = 6\text{kg}$ και μήκους $L = 2\text{m}$, μπορεί να στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το άκρο της Κ. Στο άκρο Α της δοκού ασκείται οριζόντια δύναμη σταθερού $F = 10\text{N}$ κάθετα στη δοκό και η δοκός αρχίζει να περιστρέφεται αριστερόστροφα. Κατά την περιστροφή της δοκού υπάρχουν τριβές, που δημιουργούν ροπή ως προς τον άξονα περιστροφής μέτρου $\tau_T = 4\text{Nm}$. Να υπολογίσετε:

α) Το μέτρο της συνισταμένης των ροπών, ως προς τον άξονα περιστροφής, κατά τη διάρκεια της περιστροφής της δοκού.

β) Τη ροπή αδράνειας της δοκού ως προς τον άξονα περιστροφής της.

γ) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $a_{\gamma\omega\nu}$.

δ) Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του κέντρου μάζας της, όταν η δοκός έχει διαγράψει $N = \frac{8}{\pi}$ περιστροφές.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της δοκού ως προς άξονα κάθετο στη δοκό, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$.

Λύση

α) Η συνισταμένη των ροπών ισούται με το αλγεβρικό άθροισμα της ροπής της F και της ροπής των τριβών: $\Sigma\tau_K = FL - |\tau_T| = (10 \cdot 2 - 4)\text{Nm} \Rightarrow \Sigma\tau_K = 16\text{Nm}$.

β) Εφόσον ο άξονας περιστροφής δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας, θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα του Steiner: $I_K = I_{\text{cm}} + Md^2$, όπου d είναι η απόσταση του άκρου Κ από το cm της, δηλαδή $d = \frac{L}{2}$. Συνεπώς:

$$I_K = I_{\text{cm}} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} \Rightarrow I_K = \frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow I_K = \frac{1}{3}6 \cdot 2^2 \text{ kgm}^2 \Rightarrow I_K = 8 \text{ kgm}^2.$$

γ) Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma\tau_K = I_K \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Sigma\tau_K}{I_K} = \frac{16 \text{ rad}}{8 \text{ s}^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

δ) Από τη σχέση του αριθμού περιστροφών, υπολογίζουμε τη γωνία στροφής: $N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow \theta = \frac{8}{\pi} 2\pi \text{ rad} \Rightarrow \theta = 16 \text{ rad} .$

Εφόσον η γωνιακή επιτάχυνση είναι σταθερή, η δοκός εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα, άρα από το νόμο της γωνιακής μετατόπισης

$$\theta = \frac{a_{\gamma\omega\nu}}{2} t^2 \text{ θα βρούμε τη διάρκεια περιστροφής:}$$

$$t = \sqrt{\frac{2\theta}{a_{\gamma\omega\nu}}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 16}{2}} \text{ s} \Rightarrow t = 4 \text{ s} .$$

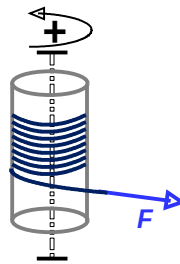
Τη στιγμή αυτή η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου είναι: $\omega = a_{\gamma\omega\nu} t \Rightarrow \omega = 2 \cdot 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} .$

Το κέντρο μάζας της δοκού διαγράφει κυκλική τροχιά με κέντρο το Κ και ακτίνα $\frac{L}{2}$,

οπότε η γραμμική του ταχύτητα θα έχει μέτρο: $v_K = \omega \frac{L}{2} \Rightarrow v_K = 8 \frac{2 \text{ m}}{2 \text{ s}} \Rightarrow v_K = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}} .$

Άσκηση 3.

Ομογενής συμπαγής κύλινδρος ακτίνας $R = 0,05\text{m}$, μπορεί να στρέφεται (τριβές αμελητέες) γύρω από κατακόρυφο άξονα, που συμπίπτει με τον άξονα συμμετρίας του. Στην περιφέρειά του έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αρχίζουμε να σύρουμε το άκρο του νήματος, ασκώντας εφαπτομενική δύναμη μέτρου $F = 1\text{N}$. Τη χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$, ο κύλινδρος περιστρέφεται αριστερόστροφα και έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 20\text{rad/s}$. Να υπολογίσετε:



- α) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.
- β) Τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου, χωρίς να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο της ροπής αδράνειας κυλίνδρου.
- γ) Το μέτρο της γωνιακής μετατόπισης του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$.
- δ) Το μήκος του νήματος, που ξετυλίχθηκε μέχρι τη χρονική στιγμή $t = 4\text{s}$, θεωρώντας ότι αυτό δεν ολισθαίνει πάνω στην επιφάνεια του κυλίνδρου.

Λύση

α) Εφόσον η ροπή της δύναμης είναι σταθερή, ο κύλινδρος εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, χωρίς αρχική ταχύτητα. Έτσι από την χρονική εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας, υπολογίζουμε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης:

$$\omega = a_{\gamma\omega\nu} t \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega}{t} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{20 \text{ rad}}{4 \text{ s}} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

β) Ο μοχλοβραχίονας της F είναι ίσος με την ακτίνα του κυλίνδρου, οπότε το μέτρο της ροπής της είναι ίσο με:

$$\tau_F = F \cdot R = 1\text{N} \cdot 0,05\text{m} = 0,05 \text{ Nm}.$$

Εφαρμόζουμε τον Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης, για να βρούμε τη ροπή αδράνειας:

$$\Sigma\tau = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow I = \frac{\Sigma\tau}{a_{\gamma\omega\nu}} = \frac{0,05}{5} \text{ kgm}^2 \Rightarrow I = 10^{-2} \text{ kgm}^2.$$

γ) Το μέτρο της γωνιακής μετατόπισης (ή γωνία στροφής) του κυλίνδρου, θα υπολογιστεί από τη χρονική εξίσωση της κίνησης της:

$$\theta = \frac{a_{\gamma\omega v}}{2} t^2 \Rightarrow \theta = \frac{5}{2} 16 \text{ rad} \Rightarrow \theta = 40 \text{ rad} .$$

δ) Το μήκος του νήματος d , που ξετυλίχθηκε από $t=0$ έως $t=4$ s, είναι ίσο με το αντίστοιχο τόξο $\hat{s}$, που διέγραψε η περιφέρεια του κυλίνδρου.

Από τη γεωμετρία όμως γνωρίζουμε ότι το μήκος του τόξου υπολογίζεται από τη σχέση: $\hat{s} = R \cdot \theta$. Συνεπώς:

$$d = \hat{s} = R \cdot \theta \Rightarrow d = 0,05 \cdot 40 \text{ m} \Rightarrow d = 2 \text{ m} .$$

Άσκηση 4.

Ο τροχός ενός αναποδογυρισμένου ποδηλάτου, αποτελείται από ομογενή στεφάνη αμελητέου πάχους, με μάζα $M=1\text{ kg}$ και ακτίνα $R=0,5\text{ m}$, και τις ακτίνες του, μάζας $m=0,02\text{ kg}$ η καθεμία και μήκους $L=R=0,5\text{ m}$. Ο τροχός στρέφεται αρχικά γύρω από τον άξονά του, στο κέντρο του, έχοντας γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_0=100\text{ rad/s}$.

Τη χρονική στιγμή $t=0$, “πατάμε” το φρένο, οπότε ο τροχός ακινητοποιείται με σταθερό ρυθμό σε $t_1=2\text{ s}$.

Να υπολογίσετε:

α) τη ροπή αδράνειας της στεφάνης ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό της, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της.

β) τον αριθμό των ακτίνων του τροχού.

γ) τον αριθμό των στροφών, που έκανε ο τροχός μέχρι να ακινητοποιηθεί.

δ) το μέτρο της δύναμης της τριβής, που εφαρμόστηκε από το φρένο στη στεφάνη.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της κάθε ακτίνας ως προς κάθετο σ' αυτήν άξονα διερχόμενο απ' το άκρο της: $I_a = \frac{1}{3}ML^2$, η ροπή αδράνειας ολόκληρου του τροχού ως προς άξονα κάθετο στο επίπεδό του, που διέρχεται από τον άξονά του είναι $I_{\text{τρ}} = 0,8\text{ kgm}^2$.

Λύση

α) Θεωρούμε ότι η στεφάνη αποτελείται από τις στοιχειώδεις μάζες $m_1, m_2, \dots$, των οποίων το άθροισμα ισούται με M . Επειδή το πάχος της στεφάνης είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα της R , όλες οι στοιχειώδεις μάζες απέχουν την ίδια απόσταση R από τον άξονα περιστροφής. Σύμφωνα με τον ορισμό της ροπής αδράνειας:

$I_{\sigma} = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots = m_1 R^2 + m_2 R^2 + \dots = (m_1 + m_2 + \dots) R^2 = MR^2$ και αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε:

$$I_{\sigma} = 3 \cdot 0,5^2 \text{ kgm}^2 \Rightarrow I_{\sigma} = 0,75 \text{ kgm}^2.$$

β) Η ροπή αδράνειας του τροχού είναι ίση με το άθροισμα της ροπής αδράνειας της στεφάνης και της ολικής ροπής αδράνειας των ακτίνων: $I_{\text{τρ}} = I_{\sigma} + I_{a, \text{ολ}}$. Άρα η ολική ροπή αδράνειας των ακτίνων είναι:

$$I_{\text{τρ}} = I_{\sigma} + I_{a, \text{ολ}} \Rightarrow I_{a, \text{ολ}} = I_{\text{τρ}} - I_{\sigma} = (0,8 - 0,75) \text{ kgm}^2 \Rightarrow I_{a, \text{ολ}} = 5 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2.$$

Σύμφωνα με την εκφώνηση, η ροπή αδράνειας της κάθε ακτίνας ως προς κάθετο σε αυτήν άξονα διερχόμενο απ' το άκρο της είναι:

$$I_a = \frac{1}{3} mL^2 \Rightarrow I_a = \frac{1}{3} 0,02 \cdot 0,5^2 \text{ kgm}^2 = \frac{1}{6} 10^{-2} \text{ kgm}^2 .$$

Για το πλήθος N των ακτίνων ισχύει:

$$N = \frac{I_{a,ολ}}{I_a} \Rightarrow N = \frac{0,05}{\frac{1}{6} 10^{-2} \text{ kgm}^2 / \text{ακτίνα}} \Rightarrow N = 30 \text{ ακτίνες} .$$

γ) Από τη χρονική στιγμή $t=0$ και μέχρι να ακινητοποιηθεί ο τροχός, τη χρονική στιγμή $t_1=2 \text{ s}$, ο τροχός εκτελεί ομαλά επιβραδυνόμενη στροφική κίνηση. Έτσι από τη χρονική εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας, θα έχουμε:

$$0 = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = -\frac{\omega_0}{t_1} \xrightarrow{\text{S.I.}} a_{\gamma\omega\nu} = -\frac{100 \text{ rad}}{2 \text{ s}^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = -50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} . \quad \text{Δηλαδή ο τροχός}$$

επιβραδύνεται ομαλά με γωνιακή επιτάχυνση μέτρου: $|a_{\gamma\omega\nu}| = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} .$

Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε τη γωνία στροφής μέχρι να ακινητοποιηθεί αντικαθιστώντας στη χρονική της εξίσωση:

$$\theta_1 = \omega_0 t_1 + \frac{a_{\gamma\omega\nu}}{2} t_1^2 \Rightarrow \theta_1 = (100 \cdot 2 - \frac{50}{2} 2^2) \text{ rad} \Rightarrow \theta_1 = 100 \text{ rad} . \text{ Έτσι ο αριθμός περιστροφών}$$

$$\text{είναι: } N = \frac{\theta_1}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{50}{\pi} \text{ περιστροφές}$$

δ) Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης, για να βρούμε το μέτρο της ροπής της τριβής στη στεφάνη:

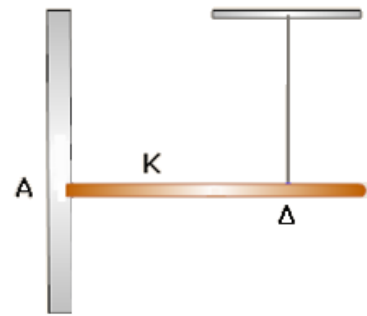
$$|\Sigma \tau| = I_{\tau\phi} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \xrightarrow{\text{S.I.}} |\tau_T| = 0,8 \cdot 50 \text{ Nm} = 40 \text{ Nm} .$$

Ο μοχλοβραχίονας της τριβής είναι ίσος με την ακτίνα της στεφάνης, οπότε το μέτρο της τριβής είναι ίσο με:

$$|\tau_T| = T \cdot R \Rightarrow T = \frac{|\tau_T|}{R} = \frac{40 \text{ Nm}}{0,5 \text{ m}} \Rightarrow T = 80 \text{ N} .$$

Άσκηση 5.

Μια ομογενής ράβδος, μάζας $M = 3\text{kg}$ και μήκους $L = 2\text{m}$, ισορροπεί σε οριζόντια θέση, στηριζόμενη με το αριστερό άκρο της Α σε κατακόρυφο τοίχο με άρθρωση και δεμένη στο σημείο Δ στο κάτω άκρο κατακόρυφου νήματος, του οποίου το πάνω άκρο είναι ακλόνητα στερεωμένο. Αν η τάση του νήματος είναι $T = 20\text{ N}$, να υπολογίσετε:



α) την απόσταση του σημείου Δ, από το άκρο Α.

β) τη δύναμη στήριξης από την άρθρωση.

Τη χρονική στιγμή $t = 0$ κόβουμε το νήμα, οπότε η ράβδος πέφτει στρεφόμενη γύρω από την άρθρωση. Αν η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς κάθετο σ' αυτήν άξονα διερχόμενο απ' το κέντρο μάζας της είναι $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$, να υπολογίσετε το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου τη στιγμή:

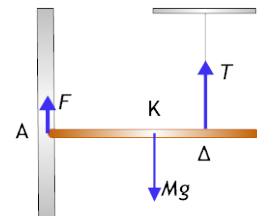
γ) της εκκίνησης.

δ) την οποία η ράβδος σχηματίζει με την αρχική θέση γωνία φ , τέτοια ώστε $\sin\varphi = 0,8$.

Δίνεται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

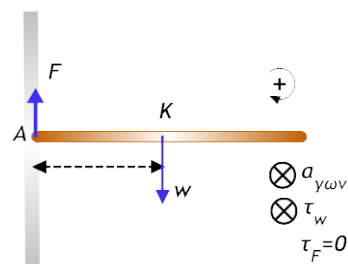
α) Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: το βάρος της $w = Mg$ στο κέντρο μάζας της Κ, η τάση του νήματος στο Δ και η δύναμη F από τον άρθρωση στο Α. Επειδή το βάρος και η τάση είναι κατακόρυφες, εφόσον ισορροπεί η ράβδος και η δύναμη F θα έχει κατακόρυφη διεύθυνση (έτσι ώστε $\Sigma F_x = 0$).



Εφόσον η ράβδος ισορροπεί στροφικά, θα ισχύει $\Sigma \tau_{(A)} = 0$. Ο μοχλοβραχίονας του βάρους είναι $\frac{L}{2}$, και της τάσης T είναι x_Δ , οπότε θεωρώντας θετική φορά των ροπών την προς τα έξω, έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = 0 \Rightarrow T \cdot x_\Delta - Mg \frac{L}{2} = 0 \Rightarrow x_\Delta = \frac{MgL}{2T} \Rightarrow x_\Delta = \frac{30}{20}\text{m} \Rightarrow x_\Delta = 1,5\text{ m}.$$

β) Εφαρμόζουμε τη Συνθήκη Ισορροπίας για τις δυνάμεις στον κατακόρυφο άξονα:



$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F + T - Mg = 0 \Rightarrow F = Mg - T \Rightarrow F = (30 - 20)N \Rightarrow F = 10 \text{ N}.$$

γ) Τη στιγμή, που κόβεται το νήμα η ράβδος αρχίζει να εκτελεί στροφική κίνηση σε κατακόρυφο επίπεδο με κέντρο την άρθρωση.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον κάθετο άξονα περιστροφής, που περνά από το Α, θα υπολογιστεί από το Θεώρημα του Steiner: $I_A = I_{cm} + Md^2$, όπου d είναι η απόσταση του άκρου από το cm, δηλαδή $d = \frac{L}{2}$. Συνεπώς:

$$I_A = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} = \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{4}\right)ML^2 = \frac{4}{12}ML^2 \Rightarrow I_A = \frac{1}{3}ML^2.$$

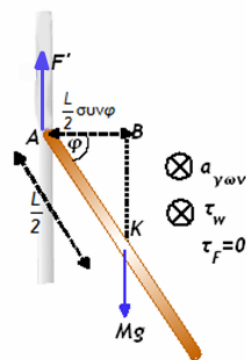
Οι δυνάμεις, που της ασκούνται είναι τώρα μόνο το βάρος της $w=Mg$ και η δύναμη F' από τον άρθρωση, που τώρα πια έχει τυχαία διεύθυνση. Απ' αυτές, ροπή ως προς το Α κάνει μόνο το βάρος, το οποίο όμως έχει διαρκώς μεταβαλλόμενο μοχλοβραχίονα. Έτσι σε κάθε θέση θα έχουμε και διαφορετική επιτάχυνση, την οποία μπορούμε να υπολογίσουμε με το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης.

Στη θέση εκκίνησης, θεωρώντας θετική φορά την προς τα μέσα, έχουμε:

$$\Sigma \tau_{(A)} = I_A a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow Mg \frac{L}{2} = \frac{1}{3}ML^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2L} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{30 \text{ rad}}{4 \text{ s}^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 7,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

δ) Απ' το σχήμα φαίνεται ότι όταν η ράβδος σχηματίζει γωνία φ με την οριζόντιο, ο μοχλοβραχίονας του βάρους είναι: $d = \frac{L}{2} \sin \varphi$.

Έτσι εφαρμόζοντας και σ' αυτή τη θέση το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης, έχουμε:



$$\Sigma \tau'_{(A)} = I_A a'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow Mg \frac{L}{2} \sin \varphi = \frac{1}{3}ML^2 a'_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu} = \frac{3g \sin \varphi}{2L} \Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu} = \frac{30 \cdot 0,8 \text{ rad}}{4 \text{ s}^2} \Rightarrow a'_{\gamma\omega\nu} = 6 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Άσκηση 6.

Ομογενής λεπτή ράβδος μήκους $L = 1,5\text{m}$ και μάζας $M = 4\text{kg}$ μπορεί να στραφεί χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, κάθετο σε αυτήν στο άκρο της O . Ένα σωματίδιο, μάζας $m = 2\text{kg}$, είναι στερεωμένο στο άλλο άκρο της A . Αρχικά η ράβδος ισορροπεί σε οριζόντια θέση και τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνεται ελεύθερη, οπότε περιστρέφεται ως προς τον άξονα στο O σε κατακόρυφο επίπεδο.

A. Να υπολογίσετε:

α) την ολική ροπή αδράνειας του συστήματος.

β) το μέτρο της συνισταμένης των ροπών, ως προς τον άξονα στο O τη χρονική στιγμή t_1 , που η ράβδος έχει διαγράψει γωνία φ , τέτοια ώστε $\sin\varphi = 0,5$.

γ) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_1 .

B. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της γωνιακής επιτάχυνσης σε συνάρτηση του συνημιτόνου της γωνίας φ , που σχηματίζει η ράβδος με τον οριζόντιο ημιάξονα Ox , κατά την περιστροφή της από την αρχική οριζόντια θέση έως την κατακόρυφη θέση.

Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα κάθετο στην ράβδο, που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{cm} = \frac{1}{12}ML^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$.

Λύση

A.

α) Η ράβδος στρέφεται γύρω από άξονα, κάθετο σ' αυτήν, που περνά από το άκρο O , που απέχει από το κέντρο μάζας της απόσταση $d = \frac{L}{2}$, οπότε η ροπή αδράνειας της ως προς αυτόν τον άξονα θα υπολογιστεί από το Θεώρημα του Steiner: $I_O = I_{cm} + M\left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ML^2 + M\frac{L^2}{4} \Rightarrow I_O = \frac{1}{3}ML^2$.

Η ροπή αδράνειας του σωματιδίου, ως προς τον ίδιο άξονα είναι: $I_m = m \cdot L^2$, καθώς απέχει απ' αυτόν απόσταση L .

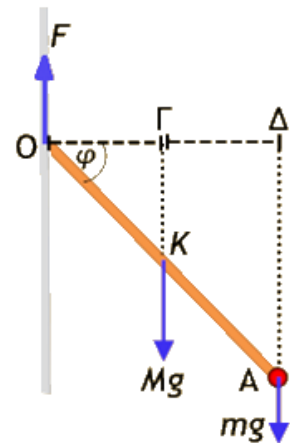
Το σύστημα αποτελείται από τη ράβδο και το σωματίδιο, οπότε η ολική ροπή αδράνειας του συστήματος θα είναι ίση με το άθροισμα των επιμέρους ροπών αδράνειας:

$$I_{ολ} = I_O + I_m = \frac{1}{3}ML^2 + mL^2 \Rightarrow I_{ολ} = \left(\frac{M}{3} + m\right)L^2 \Rightarrow I_{ολ} = 7,5 \text{ kgm}^2.$$

β) Στη ράβδο ασκούνται οι εξής δυνάμεις: η δύναμη F από τον άξονα περιστροφής της, το βάρος της Mg στο κέντρο μάζας της K και το βάρος του σφαιριδίου mg στο άκρο της A .

Η F δε δημιουργεί ροπή, διότι διέρχεται από τον άξονα περιστροφής.

Απ' το σχήμα βλέπουμε ότι ο μοχλοβραχίονας του βάρους της ράβδου είναι ο $(OG) = (OK) \sin \varphi = \frac{L}{2} \sin \varphi$ και ο μοχλοβραχίονας του βάρους του σφαιριδίου είναι ο $(OD) = (OA) \sin \varphi = L \sin \varphi$.



Θεωρούμε για τις ροπές θετική φορά την προς τα μέσα και υπολογίζουμε τη συνισταμένη των ροπών ως προς τον άξονα στο O :

$$\Sigma \tau_{(O)} = \tau_{Mg} + \tau_{mg} = Mg(OG) + mg(OD) \Rightarrow \Sigma \tau_{(O)} = Mg \frac{L}{2} \sin \varphi + mgL \sin \varphi = gL \sin \varphi \left(\frac{M}{2} + m \right)$$

και αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε:

$$\Sigma \tau_{(O)} = 10 \cdot 1,5 \cdot (2 + 2) \cdot \sin \varphi \Rightarrow \Sigma \tau_{(O)} = 60 \sin \varphi \text{ (S.I.) (1). Στην εκφώνηση δίνεται ότι } \sin \varphi = 0,5, \text{ οπότε: } \Sigma \tau_{(O)} = 60 \cdot 0,5 \text{ Nm} = 30 \text{ Nm}.$$

γ) Για να βρούμε τη γωνιακή επιτάχυνση τη χρονική στιγμή t_1 εφαρμόζουμε στη θέση αυτή το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma \tau_{(O)} = I_{ολ} \cdot a_{γων} \Rightarrow a_{γων} = \frac{\Sigma \tau_{(O)}}{I_{ολ}} \Rightarrow a_{γων} = \frac{30 \text{ rad}}{7,5 \text{ s}^2} \Rightarrow a_{γων} = 4 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

Β. Η ζητούμενη γραφική παράσταση προκύπτει αν υπολογίσουμε τη γωνιακή επιτάχυνση σε μια τυχαία θέση, εφαρμόζοντας στη θέση αυτή το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης.

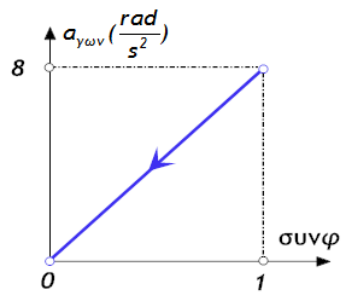
$$a_{γων} = \frac{\Sigma \tau_{(O)}}{I_{ολ}} \stackrel{(1)}{\Rightarrow} a_{γων} = \frac{60 \sin \varphi}{7,5} \Rightarrow a_{γων} = 8 \cdot \sin \varphi \text{ (S.I.) (2).}$$

Η σχέση (2) μας δείχνει ότι η γωνιακή επιτάχυνση είναι ανάλογη του $\sin \varphi$, οπότε το διάγραμμα $a_{γων} - \sin \varphi$ είναι ευθεία, που περνά από την αρχή των αξόνων.

Στην αρχική οριζόντια θέση είναι: $\sin \varphi_{αρχ} = \sin 0 = 1$, οπότε: $a_{γων} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$ και στην

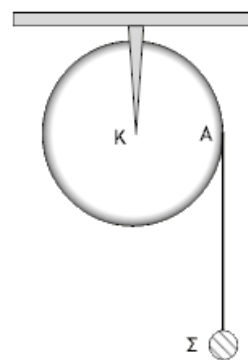
κατακόρυφη τελική θέση είναι: $\sin \varphi_{τελ} = \sin \frac{\pi}{2} = 0$, οπότε: $a_{γων} = 0 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

Με βάση τα παραπάνω, η γραφική παράσταση φαίνεται στο διάγραμμα.



Άσκηση 7.

Μια ομογενής τροχαλία - δίσκος, μάζας M και ακτίνας $R = 0,25\text{m}$, μπορεί να στρέφεται γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της χωρίς τριβές. Στο αυλάκι της τροχαλίας έχει τυλιχθεί αβαρές μη εκτατό νήμα, στο ελεύθερο άκρο του οποίου έχει δεθεί σώμα Σ μάζας $m = 1\text{kg}$. Αφήνουμε το σώμα ελεύθερο να κινηθεί, οπότε διαπιστώνουμε ότι μετά από χρόνο $t_1 = 0,5\text{s}$ έχει ξετυλιχθεί σχοινί μήκους $L = 0,25\text{m}$. Να υπολογίσετε:



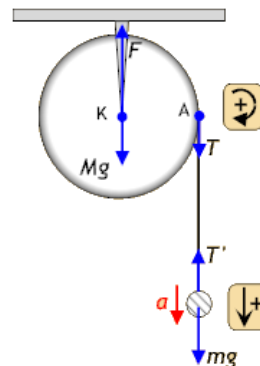
- το μέτρο της επιτάχυνσης a του σώματος.
 - το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης $a_{\gamma\omega\nu}$ της τροχαλίας.
 - τη ροπή αδράνειας ως προς το κέντρο μάζας της και τη μάζα M της τροχαλίας.
 - το μέτρο της δύναμης F , που δέχεται η τροχαλία από τον άξονα περιστροφής της.
- Δίνονται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας, ως προς τον άξονα περιστροφής της:
- $$I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2 \text{ και η επιτάχυνση της βαρύτητας } g = 10\text{m/s}^2.$$

Λύση

α) Το μήκος του νήματος, που ξετυλιγεται από την τροχαλία είναι ίσο με την κατακόρυφη μετατόπιση του σώματος, άρα $L = x_{\Sigma} = 0,25\text{m}$.

Το σώμα Σ εκτελεί ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε εφαρμόζοντας τη χρονική εξίσωση για τη μετατόπισή του, έχουμε:

$$x_{\Sigma} = \frac{\alpha}{2} t_1^2 \Rightarrow \alpha = \frac{2x_{\Sigma}}{t_1^2} \Rightarrow \alpha = \frac{2 \cdot 0,25\text{m}}{0,5^2\text{s}^2} \Rightarrow \alpha = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$



β) Επειδή το νήμα δεν γλιστρά στο αυλάκι της τροχαλίας και είναι μη εκτατό, το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας v_R των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας v_{Σ} του σώματος: $v_R = v_{\Sigma}$. Εξισώνοντας και τους ρυθμούς μεταβολής τους έχουμε:

$$\frac{dv_{\Sigma}}{dt} = \frac{dv_R}{dt} \Rightarrow \alpha = \frac{d(\omega R)}{dt} \Rightarrow \alpha = \frac{d\omega}{dt} R \Rightarrow \alpha = a_{\gamma\omega\nu} R \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha}{R} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{2}{0,25} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

γ) Το σώμα Σ δέχεται το βάρος του mg και την τάση T' του νήματος. Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνησή του, με θετική φορά την προς τα κάτω, και έχουμε:

$$\Sigma F = ma \Rightarrow mg - T' = ma \Rightarrow T' = m(g - a) \xrightarrow{\text{S.I.}} T' = 8 \text{ N}.$$

Το αβαρές νήμα ασκεί στην τροχαλία και στο Σ ίσου μέτρου τάσεις, άρα: $T = T' = 8 \text{ N}$.

Στην τροχαλία ασκούνται το βάρος της Mg , η τάση T του νήματος και η δύναμη F από τον άξονα περιστροφής. Απ' αυτές ροπή κάνει μόνο η T , διότι το βάρος Mg και η F διέρχονται από τον άξονα περιστροφής.

Από το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για την τροχαλία, με θετική φορά την προς τα μέσα, έχουμε:

$$\Sigma \tau = I_{\text{cm}} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow I_{\text{cm}} = \frac{\tau_T}{a_{\gamma\omega\nu}} = \frac{T \cdot R}{a_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow I_{\text{cm}} = \frac{8 \cdot 0,25}{8} \text{ kgm}^2 = 0,25 \text{ kgm}^2.$$

Απ' την εκφώνηση δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας: $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2} MR^2$, οπότε

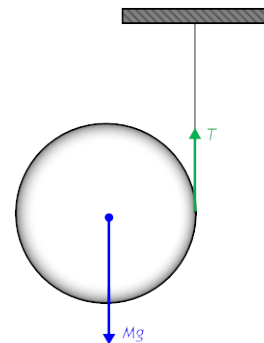
$$\text{μπορούμε να υπολογίσουμε τη μάζα της: } M = \frac{2I_{\text{cm}}}{R^2} \Rightarrow M = \frac{2 \cdot 0,25}{0,25^2} \text{ kg} \Rightarrow M = 8 \text{ kg}.$$

δ) Εφαρμόζουμε για την τροχαλία τη Συνθήκη μεταφορικής Ισορροπίας, επειδή δεν μετατοπίζεται: $\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F - Mg - T = 0 \Rightarrow F = Mg + T \Rightarrow F = (8 \cdot 10 + 8) \text{ N} \Rightarrow F = 88 \text{ N}.$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Στο κυρτό μέρος της περιφέρειας ενός ομογενούς κυλίνδρου μικρού πάχους, έχει τυλιχτεί πολλές φορές ένα αβαρές, μη εκτατό νήμα. Σταθεροποιούμε το ελεύθερο άκρο του νήματος και αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει κατακόρυφα. Το νήμα ξετυλίγεται και ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση: μετατοπίζεται κατακόρυφα προς τα κάτω και περιστρέφεται γύρω από ένα νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$, που περνά από το κέντρο του. Σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου το νήμα παραμένει κατακόρυφο.



α) Να αποδείξετε ότι η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του κυλίνδρου a_{cm} και η γωνιακή επιτάχυνσή του $a_{γων}$ συνδέονται με τη σχέση: $a_{cm} = a_{γων} R$.

Να υπολογίσετε:

β) τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου καθώς και την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του.

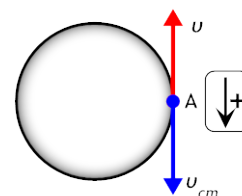
γ) την τάση T του νήματος.

δ) το μήκος του νήματος, που έχει ξετυλιχτεί όταν ο κύλινδρος έχει αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 75 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Δίνονται: η μάζα του κυλίνδρου $M = 0,09 \text{ kg}$, η ακτίνα του $R = \frac{8}{3} 10^{-2} \text{ m}$, η ροπή αδράνειάς του ως προς το κέντρο μάζας του $I_{cm} = \frac{1}{2} MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Το σημείο Α του κυλίνδρου, που έρχεται σ' επαφή με το νήμα, θα έχει δύο ταχύτητες: την προς τα κάτω v_{cm} λόγω μεταφορικής κίνησης και την προς τα πάνω γραμμική ταχύτητα u , λόγω στροφικής κίνησης, η οποία ισούται με $u = \omega R$.



Με βάση την αρχή της επαλληλίας, η διανυσματική πρόσθεση αυτών θα «δώσει» την ταχύτητα του Α:

$\vec{v}_A = \vec{v}_{cm} + \vec{v}$. Επειδή αυτές είναι αντίρροπες θα ισχύει: $v_A = v_{cm} - u \Rightarrow v_A = v_{cm} - \omega R$.

Όμως, το σημείο A έχει την ίδια ταχύτητα με τα σημεία του ακίνητου νήματος, δηλαδή $v_A = 0$, οπότε: $v_{cm} - \omega R = 0 \Rightarrow v_{cm} = \omega R$.

Εξισώνοντας τώρα και τους ρυθμούς μεταβολής, θα έχουμε: $\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = R \frac{d\omega}{dt}$.

Αλλά $\frac{d\omega}{dt} = a_{\gamma\omega\nu}$, οπότε τελικά προκύπτει ότι: $\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R$ (1).

β) Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο είναι το βάρος του Mg και η τάση T από το κατακόρυφο νήμα. Ο κύλινδρος εκτελεί σύνθετη κίνηση, που είναι αποτέλεσμα μιας κατακόρυφης προς τα κάτω μεταφορικής κίνησης και μιας αριστερόστροφης στροφικής.

Για τη Μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής:

$$\Sigma F = M\alpha_{cm} \Rightarrow Mg - T = M\alpha_{cm} \quad (2).$$

Για τη Στροφική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς τον άξονα περιστροφής, που περνά από το κέντρο του:

$$\Sigma \tau = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_{Mg} + \tau_T = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu}. \text{ Όμως η ροπή του βάρους του είναι μηδέν, διότι το βάρος διέρχεται απ' τον άξονα περιστροφής και η } T \text{ έχει μοχλοβραχίονα } R, \text{ οπότε: } T \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T = \frac{1}{2} M \cdot R a_{\gamma\omega\nu} \text{ και με βάση την (1) έχουμε: } T = \frac{1}{2} M \alpha_{cm} \quad (3).$$

Προσθέτοντας τώρα τις (2) και (3) κατά μέλη βρίσκουμε:

$$Mg - T + T = M\alpha_{cm} + \frac{1}{2} M\alpha_{cm} \Rightarrow Mg = \frac{3}{2} M\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{2g}{3} \quad (4).$$

$$\text{Αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε: } \alpha_{cm} = \frac{20 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}.$$

Λύνοντας την (1) ως προς $a_{\gamma\omega\nu}$ βρίσκουμε: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{cm}}{R}$ και αντικαθιστώντας στο S.I.

$$\text{βρίσκουμε: } a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\frac{20}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}}{\frac{8}{3} 10^{-2}} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 250 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$$

$$\gamma) \text{ Η τάση } T \text{ του νήματος βρίσκεται από την (3): } T = \frac{1}{2} 0,09 \frac{20}{3} \text{ N} \Rightarrow T = 0,3 \text{ N}.$$

δ) Η Στροφική κίνηση του κυλίνδρου είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, οπότε από τη χρονική εξίσωση της γωνιακής ταχύτητας για τη στιγμή t_1 έχουμε:

$$\omega_1 = a_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{\omega_1}{a_{\gamma\omega\nu}} \Rightarrow t_1 = \frac{75}{250} \text{ s} = 0,3 \text{ s} .$$

Το μήκος του νήματος L , που έχει ξετυλιχτεί έως τη χρονική στιγμή t_1 , θα είναι ίσο με την μετατόπιση x_{cm} μεταφορικά του κυλίνδρου, δηλαδή:

$$L = x_{cm} = \frac{\alpha_{cm}}{2} t_1^2 \Rightarrow L = \frac{20}{6} 0,09 \text{ m} \Rightarrow L = 0,3 \text{ m} .$$

Πρόβλημα 2.

Μια μπάλα, μάζας m και ακτίνας R , αφήνεται από την κορυφή κεκλιμένου επιπέδου, γωνίας κλίσης φ , οπότε κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει προς τη βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

α) Να σχεδιάσετε τις δυνάμεις, που ασκούνται στη μπάλα και να αιτιολογήσετε το σχεδιασμό της στατικής τριβής.

Να υπολογίσετε:

β) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας της μπάλας.

γ) το μέτρο της στατικής τριβής, αν η μάζα της μπάλας είναι $m = 0,5\text{kg}$.

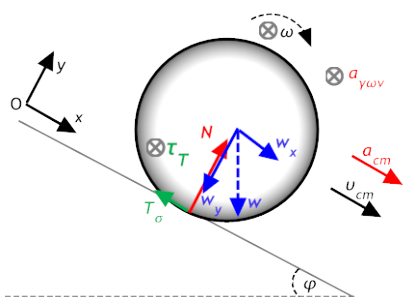
δ) τις επιτρεπτές τιμές του συντελεστή στατικής τριβής μ_0 για τις οποίες η μπάλα μπορεί να κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει.

Δίνονται ότι $\eta\mu\varphi = 0,5$, $\sigma\upsilon\nu\varphi = 0,866$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$, η μπάλα θεωρείται κοίλη σφαίρα με ροπή αδράνειας ως προς άξονα διερχόμενο από το κέντρο μάζας της: $I_{\text{cm}} = \frac{2}{3}mR^2$.

Λύση

α) Στη μπάλα ασκούνται οι εξής δυνάμεις: Το βάρος $w=mg$ στο κέντρο μάζας της, η κάθετη αντίδραση N στο σημείο επαφής μπάλας - επιπέδου και η στατική τριβή T_s στο σημείο επαφής μπάλας - επιπέδου, με διεύθυνση παράλληλη στο επίπεδο.

Εφόσον οι δυνάμεις N και w δεν προκαλούν ροπή ως προς το κέντρο μάζας της μπάλας, η συνισταμένη των ροπών οφείλεται αποκλειστικά στη ροπή της στατικής τριβής. Σύμφωνα με το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης: $\Sigma \vec{\tau} = \vec{\tau}_{T_s} = I_{\text{cm}} \cdot \vec{a}_{\gamma\omega\nu}$, η φορά της στατικής τριβής T_s θα είναι προς τα πάνω, έτσι ώστε η ροπή της να είναι ομόρροπη με τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$ της σφαίρας, προκαλώντας έτσι τη στροφική της επιτάχυνση.



β) Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy , με τον άξονα Ox παράλληλο στο κεκλιμένο επίπεδο και θετική φορά την προς τα κάτω. Αναλύουμε το βάρος $w=mg$ σε δύο συνιστώσες: την $w_x = mg\eta\mu\varphi$ στον Ox και την $w_y = mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ στον Oy .

Για τη Μεταφορική κίνηση της σφαίρας εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής σε κάθε άξονα:

Στον Ox κινείται ομαλά επιταχυνόμενα, οπότε:

$$\Sigma F_x = m\alpha_{cm} \Rightarrow mg\eta\mu\varphi - T_\sigma = m\alpha_{cm} \quad (1).$$

Για τη Στροφική κίνηση της σφαίρας εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της, θεωρώντας θετική φορά την προς τα μέσα, οπότε:

$$\Sigma \tau = I_{cm} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_\sigma R = \frac{2}{3} m R^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_\sigma = \frac{2}{3} m \cdot R a_{\gamma\omega\nu} \quad (2).$$

Επειδή η σφαίρα κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει, θα ισχύει: $a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R$ (3) και

αντικαθιστώντας την (3) στην (2) έχουμε τελικά: $T_\sigma = \frac{2}{3} m\alpha_{cm}$ (4).

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1) και (4) βρίσκουμε:

$$mg\eta\mu\varphi - \cancel{T_\sigma} + \cancel{T_\sigma} = m\alpha_{cm} + \frac{2}{3} m\alpha_{cm} \Rightarrow mg\eta\mu\varphi = \frac{5}{3} m\alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{3}{5} g\eta\mu\varphi \stackrel{\text{S.I.}}{\Rightarrow} \alpha_{cm} = 3 \frac{m}{s^2}.$$

γ) Αντικαθιστώντας στην (4) βρίσκουμε: $T_\sigma = \frac{2}{3} 0,5 \cdot 3N \Rightarrow T_\sigma = 1 N$.

δ) Για να Κυλίνεται χωρίς να Ολισθαίνει η μπάλα, θα πρέπει η στατική τριβή να είναι μικρότερη από τη μέγιστη τιμή της, που είναι η οριακή τριβή: $T_\sigma < T_{op}$ (5).

Γνωρίζουμε, όμως, ότι η οριακή τριβή υπολογίζεται από τη σχέση: $T_{op} = \mu_\sigma \cdot N$ (6), όπου μ_σ είναι ο συντελεστής οριακής στατικής τριβής και N η κάθετη αντίδραση του δαπέδου στη σφαίρα, που θα υπολογιστεί από τη Συνθήκη Ισορροπίας στον Ογ:

$$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg\sigma\upsilon\nu\varphi = 0 \Rightarrow N = mg\sigma\upsilon\nu\varphi \quad (7)$$

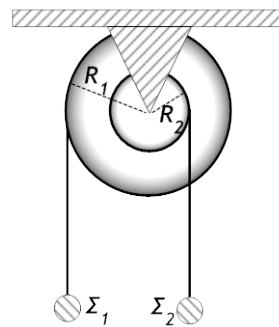
Αντικαθιστώντας τώρα την (7) στην (6) βρίσκουμε για την οριακή τριβή: $T_{op} = \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi$ (8).

Τέλος, αντικαθιστώντας τις (4) και (8) στην (5) βρίσκουμε:

$$\begin{aligned} \frac{2}{3} m\alpha_{cm} < \mu_\sigma mg\sigma\upsilon\nu\varphi &\Rightarrow \mu_\sigma > \frac{\frac{2}{3} m\alpha_{cm}}{mg\sigma\upsilon\nu\varphi} \Rightarrow \\ \mu_\sigma > \frac{\frac{2}{3} m\alpha_{cm}}{\cancel{mg\sigma\upsilon\nu\varphi}} &\Rightarrow \mu_\sigma > \frac{\frac{2}{3} \cancel{g}}{10 \cdot 0,866} \Rightarrow \mu_\sigma > \frac{2}{8,5} \Rightarrow \mu_\sigma > 0,23 \end{aligned}$$

Πρόβλημα 3.

Η διπλή τροχαλία του σχήματος αποτελείται από δύο ενωμένους ομόκεντρους δίσκους, που μπορούν να περιστρέφονται ενιαία γύρω από οριζόντιο άξονα περιστροφής, που διέρχεται από το κέντρο τους. Η ακτίνα του εξωτερικού δίσκου είναι $R_1 = 0,2\text{m}$ και του εσωτερικού $R_2 = 0,1\text{m}$. Η ροπή αδράνειας της διπλής τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = 0,6\text{kgm}^2$. Στα αυλάκια, που φέρουν οι δύο δίσκοι είναι τυλιγμένα δύο λεπτά αβαρή μεγάλου μήκους και μη εκτατά νήματα, στα κάτω άκρα των οποίων είναι δεμένα δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 , με μάζες $m_1 = 40\text{ Kg}$ και $m_2 = 30\text{ Kg}$ αντίστοιχα. Τα σώματα συγκρατούνται αρχικά στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο και τη χρονική στιγμή $t = 0$, αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο, οπότε αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τα νήματα να ολισθαίνουν στα αυλάκια των δίσκων.



α) Να βρείτε αν το σύστημα θα περιστραφεί δεξιόστροφα ή αριστερόστροφα.

β) Να υπολογίσετε:

1) το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας.

2) το μέτρο της δύναμης στήριξης F της τροχαλίας από τον άξονα, αν η μάζα της τροχαλίας είναι $M = 45\text{kg}$.

3) την κατακόρυφη απόσταση των σωμάτων, σε χρόνο $t = 2\text{ s}$.

Δίνεται η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Για να βρούμε προς τα πού θα στραφεί η διπλή τροχαλία υπολογίζουμε τη συνισταμένη των ροπών $\Sigma\tau_{\epsilon\zeta}$, των εξωτερικών δυνάμεων, που ασκούνται στο σύστημα διπλή τροχαλία - σώματα ως προς τον άξονα της περιστροφής. Οι ασκούμενες εξωτερικές δυνάμεις είναι τα βάρη των σωμάτων $w_1 = m_1g$ και $w_2 = m_2g$, το βάρος της τροχαλίας w και η δύναμη στήριξης F από τον άξονα. Απ' αυτές ροπή προκαλούν μόνο τα βάρη των σωμάτων, καθώς το βάρος της τροχαλίας και η δύναμη στήριξης ασκούνται στον άξονα, άρα δεν προκαλούν ροπή.

Έτσι, θεωρώντας θετική φορά την αριστερόστροφη, έχουμε:

$$\Sigma\tau_{\epsilon\zeta} = m_1g \cdot R_1 - m_2g \cdot R_2 = g(m_1R_1 - m_2R_2) \Rightarrow \Sigma\tau_{\epsilon\zeta} = 10(40 \cdot 0,2 - 30 \cdot 0,1)\text{Nm} = +50\text{ Nm}.$$

Εφόσον η $\Sigma\tau_{\epsilon\zeta}$ έχει θετικό πρόσημο, το σύστημα θα περιστραφεί στην κατά σύμβαση θετική φορά, δηλαδή αριστερόστροφα.

β)

1) Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης για τη Στροφική κίνηση της τροχαλίας (ροπή δημιουργούν μόνο οι τάσεις T_1 και T_2 - όχι η Mg και η F).

$$\Sigma \tau_{\text{τροχ}} = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_1 \cdot R_1 - T_2 \cdot R_2 = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (1).$$

Εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής για τη Μεταφορική κίνηση κάθε σώματος στον κατακόρυφο άξονα (θετική φορά, η προς τα κάτω για το Σ_1 και η προς τα πάνω για το Σ_2):

$$\text{Για το } \Sigma_1: \Sigma F_1 = m_1 \alpha_1 \Rightarrow m_1 g - T'_1 = m_1 \alpha_1 \quad (2).$$

$$\text{Για το } \Sigma_2: \Sigma F_2 = m_2 \alpha_2 \Rightarrow T'_2 - m_2 g = m_2 \alpha_2 \quad (3).$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι ένα τεντωμένο αβαρές νήμα ασκεί ίσου μέτρου τάσεις στα σώματα, που «ενώνει», θα ισχύει ότι: $T'_1 = T_1$ και $T'_2 = T_2$ (4).

Επειδή το κάθε νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία και παραμένει τεντωμένο, όλα τα σημεία κάθε νήματος έχουν κοινή ταχύτητα, οπότε: $v_1 = \omega R_1$ και $v_2 = \omega R_2$, όπου ω είναι η κοινή γωνιακή ταχύτητα των δύο δίσκων της τροχαλίας.

Φυσικά θα είναι ίσοι και οι ρυθμοί μεταβολής τους, οπότε:

$\frac{dv_1}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R_1 \Rightarrow \alpha_1 = a_{\gamma\omega\nu} R_1$ και $\frac{dv_2}{dt} = \frac{d\omega}{dt} R_2 \Rightarrow \alpha_2 = a_{\gamma\omega\nu} R_2$ (5), όπου $a_{\gamma\omega\nu}$ είναι η κοινή γωνιακή επιτάχυνση των δύο δίσκων της τροχαλίας.

Με βάση τις (4) και (5), οι εξισώσεις (2) και (3) διαμορφώνονται ως εξής:

$$m_1 g - T_1 = m_1 a_{\gamma\omega\nu} R_1 \quad (2')$$

$$T_2 - m_2 g = m_2 a_{\gamma\omega\nu} R_2 \quad (3').$$

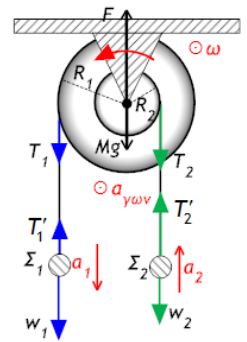
Επιλύουμε το σύστημα ως εξής: πολλαπλασιάζουμε την (2') επί R_1 και την (3') επί R_2 , οπότε αυτές γίνονται:

$$m_1 g R_1 - T_1 R_1 = m_1 a_{\gamma\omega\nu} R_1^2 \quad (6)$$

$$T_2 R_2 - m_2 g R_2 = m_2 a_{\gamma\omega\nu} R_2^2 \quad (7).$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις (1), (6) και (7), οπότε παίρνουμε:

$$\cancel{R_1 R_1} - \cancel{R_2 R_2} + m_1 g R_1 - \cancel{R_1 R_1} - m_2 g R_2 + \cancel{R_2 R_2} = I a_{\gamma\omega\nu} + m_1 a_{\gamma\omega\nu} R_1^2 + m_2 a_{\gamma\omega\nu} R_2^2 \Rightarrow$$



$m_1 g R_1 - m_2 g R_2 = (I + m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2) a_{\gamma\omega\nu}$, και λύνοντας ως προς την κοινή επιτάχυνση βρίσκουμε τελικά: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{(m_1 R_1 - m_2 R_2) g}{m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + I}$.

Αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{(8-3)10}{1,6+0,3+0,6} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$.

2) Πρέπει αρχικά να βρούμε τις τάσεις T_1 και T_2 . Έτσι:

Από την (2'): $T_1 = m_1 g - m_1 a_{\gamma\omega\nu} R_1 = m_1 (g - a_{\gamma\omega\nu} R_1) \Rightarrow T_1 = 40(10 - 20 \cdot 0,2) \text{ N} \Rightarrow T_1 = 240 \text{ N}$

και από την (3'):

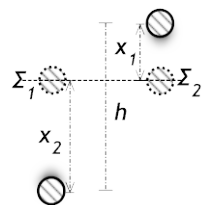
$T_2 = m_2 g + m_2 a_{\gamma\omega\nu} R_2 = m_2 (g + a_{\gamma\omega\nu} R_2) \Rightarrow T_2 = 30(10 + 20 \cdot 0,1) \text{ N} \Rightarrow T_2 = 360 \text{ N}$.

Η δύναμη στήριξης απ' τον άξονα, υπολογίζεται αν εφαρμόσουμε για την τροχαλία τη Συνθήκη ισορροπίας, επειδή ακινητεί μεταφορικά:

$\Sigma F_y = 0 \Rightarrow F - Mg - T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow F = Mg + T_1 + T_2 \Rightarrow F = (450 + 240 + 360) \text{ N} \Rightarrow F = 1050 \text{ N}$.

3) Ξεκινώντας, τη χρονική στιγμή $t=0$, από το ίδιο οριζόντιο επίπεδο, τη χρονική στιγμή $t=2 \text{ s}$, το Σ_1 μετατοπίστηκε κατά x_1 προς τα κάτω και το Σ_2 μετατοπίστηκε κατά x_2 προς τα πάνω, κινούμενα και τα δύο με σταθερή επιτάχυνση. Εφαρμόζοντας τις χρονικές εξισώσεις για τη μετατόπιση βρίσκουμε:

$x_1 = \frac{\alpha_1}{2} t^2 = \frac{a_{\gamma\omega\nu} R_1}{2} t^2 \xrightarrow{\text{S.I.}} x_1 = 8 \text{ m}$ και $x_2 = \frac{\alpha_2}{2} t^2 = \frac{a_{\gamma\omega\nu} R_2}{2} t^2 \xrightarrow{\text{S.I.}} x_2 = 4 \text{ m}$.



Συνεπώς, με βάση το σχήμα, η κατακόρυφη απόστασή τους, τη χρονική στιγμή $t=2 \text{ s}$, θα είναι: $h = x_1 + x_2 \Rightarrow x_{ολ} = 12 \text{ m}$.

Πρόβλημα 4.

Ομογενής κύλινδρος μάζας $m = 2\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,2\text{m}$ κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και χωρίς παραμόρφωση σε οριζόντιο δάπεδο (Α) με ταχύτητα μέτρου $v_0 = 2\text{m/s}$. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ ο κύλινδρος δέχεται οριζόντια δύναμη μέτρου $F = 6\text{N}$, που ασκείται στο κέντρο μάζας του. Ο κύλινδρος συνεχίζει να κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει και μετά την άσκηση της δύναμης F .

α) Να σχεδιάσετε τη στατική τριβή που δέχεται ο κύλινδρος από το δάπεδο, σε κατάλληλο σχήμα και να δικαιολογήσετε τη φορά της.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο:

β1) της στατικής τριβής.

β2) της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας καθώς και της γωνιακής επιτάχυνσης του κυλίνδρου.

β3) της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\text{s}$.

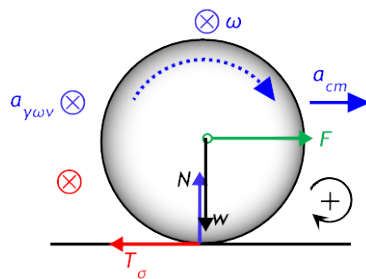
γ) Στη συνέχεια τη χρονική στιγμή $t_1 = 4\text{s}$, ο κύλινδρος εισέρχεται σε λείο δάπεδο (Β), το οποίο είναι συνέχεια του προηγούμενου. Τη χρονική στιγμή $t_2 = 10\text{s}$, να υπολογίσετε την ταχύτητα του σημείου του κυλίνδρου, που είναι εκείνη τη στιγμή σ' επαφή με το λείο δάπεδο.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς άξονά του: $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}mR^2$.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο: Το βάρος mg και η δύναμη F στο κέντρο μάζας του, η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T_σ στο σημείο επαφής τροχού-δαπέδου.

Η συνολική ροπή οφείλεται αποκλειστικά στη ροπή της T_σ . $\Sigma \vec{\tau} = \vec{\tau}_{T_\sigma}$, διότι η ροπή της F και του βάρους w είναι μηδενική καθώς ασκούνται στον άξονα περιστροφής, όπως και η N , που διέρχεται απ' αυτόν. Συνεπώς η ροπή της T_σ , $\vec{\tau}_{T_\sigma}$ θα είναι ομόρροπη με τη γωνιακή επιτάχυνση $\vec{a}_{\gamma\omega\nu}$. Για να συμβεί αυτό, θα πρέπει να έχει φορά προς τα πίσω, όπως φαίνεται στο σχήμα.



β)

β1) Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής (θεωρούμε θετική φορά την προς τα δεξιά):

$$\Sigma F_x = m a_{cm} \Rightarrow F - T_\sigma = m a_{cm} \quad (1).$$

Για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της (θεωρούμε θετική φορά την προς τα μέσα):

$$\Sigma \tau = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_\sigma R = \frac{1}{2} m R^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow T_\sigma = \frac{1}{2} m \cdot R a_{\gamma\omega\nu} \quad (2).$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίσταται χωρίς ολίσθηση, θα ισχύει για τις επιταχύνσεις η σχέση: $a_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R \quad (3).$

Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) έχουμε: $T_\sigma = \frac{1}{2} m a_{cm} \quad (2').$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2') παίρνουμε:

$$\frac{F - T_\sigma}{T_\sigma} = \frac{a_{cm}}{\frac{1}{2} a_{cm}} \Rightarrow \frac{F - T_\sigma}{T_\sigma} = 2 \Rightarrow F - T_\sigma = 2 T_\sigma \Rightarrow F = 3 T_\sigma \Rightarrow T_\sigma = \frac{F}{3} \stackrel{\text{S.I.}}{\Rightarrow} T_\sigma = 2 \text{ N}$$

β2) Λύνοντας την (2') ως προς a_{cm} βρίσκουμε: $a_{cm} = \frac{2 T_\sigma}{m} = \frac{2 \cdot 2}{2} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow a_{cm} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$

Λύνοντας την (3) ως προς $a_{\gamma\omega\nu}$ βρίσκουμε: $a_{\gamma\omega\nu} = \frac{a_{cm}}{R} = \frac{2}{0,2} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}.$

β3) Επειδή ο κύλινδρος κυλίσταται χωρίς ολίσθηση, θα ισχύει για τις ταχύτητες η σχέση: $v_{cm} = \omega R$. Εφαρμόζοντάς την τη χρονική στιγμή $t=0$, βρίσκουμε την αρχική γωνιακή ταχύτητα ω_0 τη χρονική στιγμή $t_1=4\text{s}$:

$$v_0 = \omega_0 R \Rightarrow \omega_0 = \frac{v_0}{R} = \frac{2}{0,2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_0 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

Εφαρμόζοντας το Νόμο της γωνιακής ταχύτητας για την Ομαλά Επιταχυνόμενη στροφική κίνηση, βρίσκουμε τη γωνιακή ταχύτητα ω_1 :

$$\omega_1 = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} t_1 \Rightarrow \omega_1 = (10 + 10 \cdot 4) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega_1 = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}.$$

γ) Στο λείο δάπεδο (B) δεν υπάρχει στατική τριβή, οπότε δεν υπάρχει ροπή δύναμης, που να μεταβάλλει τη στροφική κίνησή του. Αντίθετα, η δύναμη F συνεχίζει να τον επιταχύνει μεταφορικά, με διαφορετική όμως επιτάχυνση. Συνεπώς ο κύλινδρος θα κάνει σύνθετη κίνηση (όχι όμως κύλιση χωρίς ολίσθηση), η οποία προκύπτει από την επαλληλία:

1^ο μιας Ομαλής Στροφικής, με τη γωνιακή ταχύτητα $\omega_1 = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, που είχε αποκτήσει. Τα σημεία της περιφέρειάς του θα έχουν κάθε στιγμή γραμμική ταχύτητα σταθερού μέτρου: $v = \omega_1 R = 50 \cdot 0,2 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ (4), και

2^ο μιας Ομαλά Επιταχυνόμενης μεταφορικής με αρχική ταχύτητα, αυτήν που είχε αποκτήσει: $v_1 = v_0 + \alpha_{\text{cm}} t_1 \Rightarrow v_1 = (2 + 2 \cdot 4) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και νέα επιτάχυνση:

$$\alpha'_{\text{cm}} = \frac{F}{m} = \frac{6 \text{ N}}{2 \text{ kg}} \Rightarrow \alpha'_{\text{cm}} = 3 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

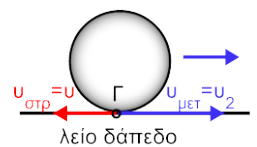
Έτσι μετά από χρόνο $\Delta t = t_2 - t_1 = (10 - 4) \text{ s} = 6 \text{ s}$, η μεταφορική του ταχύτητα θα είναι:

$$v_2 = v_1 + \alpha'_{\text{cm}} \Delta t \Rightarrow v_2 = (10 + 3 \cdot 6) \frac{\text{m}}{\text{s}} = 28 \frac{\text{m}}{\text{s}} \text{ (5)}.$$

Εφαρμόζουμε την αρχή της επαλληλίας των ταχυτήτων, στο σημείο επαφής Γ με το λείο δάπεδο: $\vec{v}_{\Gamma} = \vec{v}_{\text{μετ}} + \vec{v}_{\text{στροφ}} = \vec{v}_2 + \vec{v}$.

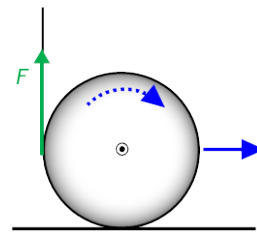
Από το σχήμα παρατηρούμε ότι οι ταχύτητες είναι αντίρροπες, και με βάση τις (4) και (5), βρίσκουμε:

$$v_{\Gamma} = v_2 - v \Rightarrow v_{\Gamma} = (28 - 10) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\Gamma} = 18 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$



Πρόβλημα 5.

Ένας ομογενής δίσκος, μάζας $m = 2\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,3\text{m}$, που βρίσκεται σε οριζόντιο δάπεδο, φέρει στην περιφέρειά του αυλάκι, στο οποίο έχουμε τυλίξει αβαρές και μη εκτατό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$, ασκούμε στον δίσκο μέσω του νήματος σταθερή κατακόρυφη δύναμη μέτρου $F = 9\text{ N}$. Καθώς ξετυλίγεται το νήμα χωρίς να ολισθαίνει στο αυλάκι του δίσκου, ο δίσκος κυλίζει επίσης χωρίς να ολισθαίνει και χωρίς παραμόρφωση, πάνω σε οριζόντιο δάπεδο.



α) Να σχεδιάσετε τη στατική τριβή που δέχεται ο δίσκος από το δάπεδο, σε κατάλληλο σχήμα και να δικαιολογήσετε τη φορά της.

β) Να υπολογίσετε:

β1) το μέτρο της στατικής τριβής, που δέχεται ο δίσκος.

β2) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας καθώς και το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του δίσκου.

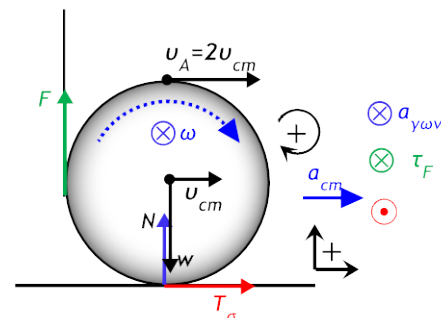
β3) το μήκος του νήματος, που έχει ξετυλιχτεί από τη στιγμή $t = 0$, μέχρι τη στιγμή t_1 , κατά την οποία το ανώτερο σημείο του δίσκου έχει αποκτήσει ταχύτητα $v_A = 12\text{m/s}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονά του: $I_{cm} = \frac{1}{2}mR^2$.

Λύση

α) Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο: το βάρος mg , στο κέντρο μάζας του, η δύναμη F , στο σημείο επαφής δίσκου - νήματος, και η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T_σ στο σημείο επαφής δίσκου - δαπέδου.

Παρατηρούμε ότι οι τρεις δυνάμεις F , mg και N έχουν κατακόρυφη διεύθυνση, ενώ ο δίσκος κινείται επιταχυνόμενος μεταφορικά στην οριζόντια διεύθυνση με φορά προς τα δεξιά. Συνεπώς η στατική τριβή T_σ είναι η μόνη δύναμη, που τον επιταχύνει στον οριζόντιο άξονα, δηλαδή θα είναι ομόρροπη της επιτάχυνσης a_{cm} , όπως φαίνεται στο σχήμα.



β)

β1) Για τη μεταφορική κίνηση του δίσκου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής (θετική φορά η προς τα δεξιά):

$$\Sigma F_x = ma_{cm} \Rightarrow T_\sigma = ma_{cm} (1).$$

Για τη στροφική κίνηση του δίσκου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας της (θετική φορά η προς τα μέσα):

$$\Sigma \tau = I_{\text{cm}} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F R - T_{\sigma} R = \frac{1}{2} m R^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F - T_{\sigma} = \frac{1}{2} m \cdot R a_{\gamma\omega\nu} \quad (2).$$

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς ολίσθηση, θα ισχύει για τις επιταχύνσεις η σχέση: $\alpha_{\text{cm}} = a_{\gamma\omega\nu} R \quad (3).$

$$\text{Αντικαθιστώντας την (3) στην (2) έχουμε: } F - T_{\sigma} = \frac{1}{2} m \alpha_{\text{cm}} \quad (2').$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις (1) και (2') παίρνουμε:

$$\frac{T_{\sigma}}{F - T_{\sigma}} = \frac{\cancel{m} \cancel{\alpha}_{\text{cm}}}{\frac{1}{2} \cancel{m} \cancel{\alpha}_{\text{cm}}} \Rightarrow \frac{T_{\sigma}}{F - T_{\sigma}} = 2 \Rightarrow 2F - 2T_{\sigma} = T_{\sigma} \Rightarrow 2F = 3T_{\sigma} \Rightarrow T_{\sigma} = \frac{2F}{3} \stackrel{\text{S.I.}}{\Rightarrow} T_{\sigma} = 6 \text{ N}.$$

B2) Λύνοντας την (2') ως προς α_{cm} βρίσκουμε:

$$\alpha_{\text{cm}} = \frac{2(F - T_{\sigma})}{m} = \frac{2 \cdot (9 - 6)}{3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

$$\text{Λύνοντας την (3) ως προς } a_{\gamma\omega\nu} \text{ βρίσκουμε: } a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} = \frac{2}{0,3} \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}.$$

B3) Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στο αυλάκι του δίσκου, το μήκος του νήματος, που ξετυλίγεται έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με το τόξο, που διαγράφουν στον ίδιο χρόνο, τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου: $h_1 = \Delta \hat{s} \quad (4).$

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει, το τόξο, που διαγράφουν τα σημεία της περιφέρειας του δίσκου είναι ίσο με την οριζόντια μετατόπιση του κέντρου μάζας του, στον ίδιο χρόνο: $\Delta \hat{s} = x_1 \quad (5).$

Από τις (4) και (5) προκύπτει ότι: $h_1 = x_1 \quad (6).$

Η μετατόπιση x_1 μπορεί να υπολογιστεί από τη χρονική εξίσωση της μετατόπισης κατά τη μεταφορική κίνηση, η οποία είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική

$$\text{ταχύτητα: } x_1 = \frac{\alpha_{\text{cm}}}{2} t_1^2 \stackrel{(6)}{\Rightarrow} h_1 = \frac{\alpha_{\text{cm}}}{2} t_1^2 \quad (7).$$

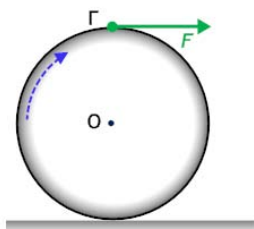
Γνωρίζουμε ότι (Σχολικό Βιβλίο, σελ. 110, σχ. 4.4) η ταχύτητα του ανώτερου σημείου του δίσκου, εφόσον αυτός κυλίεται χωρίς ολίσθηση, είναι: $v_A = 2v_{cm}$. Στην εκφώνηση δίνεται ότι τη χρονική στιγμή t_1 είναι $v_A = 12 \text{ m/s}$, οπότε $v_{cm} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.

Από τη χρονική εξίσωση της ταχύτητας έχουμε: $v_{cm} = a_{cm} t_1 \Rightarrow t_1 = \frac{6}{3} \text{ s} = 2 \text{ s}$.

Αντικαθιστώντας στην (7) βρίσκουμε τελικά: $h_1 = \frac{3}{2} 2^2 \text{ m} \Rightarrow h_1 = 6 \text{ m}$.

Πρόβλημα 6.

Γύρω από ένα ομογενή δίσκο, ακτίνας R , μάζας $m = 2\text{kg}$ και ροπής αδράνειας $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}mR^2$, είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα, μέσω του οποίου, τη χρονική στιγμή $t = 0$, ασκούμε στο ανώτερο σημείο Γ οριζόντια δύναμη σταθερού μέτρου $F = 6\text{N}$. Ο τροχός κυλιέται χωρίς παραμόρφωση σε οριζόντιο δάπεδο, που έχει τέτοια τιμή συντελεστή στατικής τριβής μ_{σ} , ώστε οριακά να αποφεύγεται η ολίσθηση.



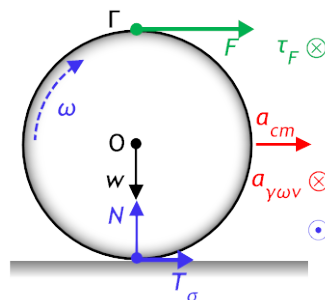
Να υπολογίσετε:

- το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας O .
- το μέτρο της επιτάχυνσης του ανώτερου σημείου Γ .
- τη δύναμη της στατικής τριβής, που δέχεται ο δίσκος από το δάπεδο.
- το συντελεστή στατικής τριβής.

Λύση

α) Θεωρούμε ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy , με τον άξονα Ox παράλληλο στο οριζόντιο δάπεδο και θετική φορά την προς τα δεξιά.

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο δίσκο: στο κέντρο μάζας O , το βάρος mg , στο σημείο επαφής δίσκου - δαπέδου η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T_{σ} και στο ανώτερο σημείο Γ η τάση του νήματος F .



Επειδή η ροπή της στατικής τριβής δεν είναι η μοναδική ροπή, που επιταχύνει στροφικά το δίσκο και η δύναμη της στατικής τριβής δεν είναι η μοναδική δύναμη, που τον επιταχύνει μεταφορικά, δεν μπορούμε εξ αρχής να συμπεράνουμε για τη φορά της T_{σ} . Έστω λοιπόν ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά.

Για τη Μεταφορική κίνηση του δίσκου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής σε κάθε άξονα.

$$\text{Στον } Ox: \Sigma F_x = m \cdot a_{\text{cm}} \Rightarrow F + T_{\sigma} = m a_{\text{cm}} \quad (1).$$

$$\text{Στον } Oy: \Sigma F_y = 0 \Rightarrow N - mg = 0 \Rightarrow N = mg \quad (2).$$

Για τη Στροφική κίνηση του δίσκου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας Ο:

$$\Sigma \tau = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot R - T_{\sigma} \cdot R = \frac{1}{2} m R^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F - T_{\sigma} = \frac{1}{2} m \cdot R a_{\gamma\omega\nu} \quad (3).$$

Επειδή ο δίσκος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει θα ισχύει: $\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R$ (4). Με βάση αυτήν

η (3) γίνεται: $F - T_{\sigma} = \frac{1}{2} m \alpha_{cm} \quad (3')$.

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (3') έχουμε:

$$2F = \frac{3}{2} m \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{4F}{3m} \text{ και αντικαθιστώντας στο S.I. βρίσκουμε: } \alpha_{cm} = 4 \frac{m}{s^2}.$$

β) Γνωρίζουμε ότι αν ένας δίσκος κυλίεται χωρίς ολίσθηση, η ταχύτητα του ανώτερου σημείου Γ, με βάση της αρχή της επαλληλίας (Σχολικό Βιβλίο, σελ. 110, σχ. 4.4), είναι: $v_{\Gamma} = 2v_{cm}$, οπότε και για τους ρυθμούς μεταβολής θα ισχύει ότι:

$$\frac{dv_{\Gamma}}{dt} = 2 \frac{dv_{cm}}{dt} \Rightarrow a_{\Gamma} = 2\alpha_{cm} \Rightarrow a_{\Gamma} = 2\alpha_{cm} = 8 \frac{m}{s^2}.$$

γ) Μπορούμε να υπολογίσουμε τη στατική τριβή T_{σ} , λύνοντας την (1) ως προς αυτήν: $T_{\sigma} = m\alpha_{cm} - F \Rightarrow T_{\sigma} = (2 \cdot 4 - 6)N \Rightarrow T_{\sigma} = +2 \text{ N}$. Το θετικό πρόσημο δείχνει ότι σωστά υποθέσαμε ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά, δηλαδή η κατεύθυνσή της είναι όπως φαίνεται στο αρχικό σχήμα.

δ) Εφόσον απ' την εκφώνηση δίνεται ότι ο δίσκος κυλίεται οριακά χωρίς Ολίσθηση, αυτό σημαίνει ότι η στατική τριβή T_{σ} θα είναι ίση τη μέγιστη τιμή της, την οριακή τριβή T_{op} , δηλαδή: $T_{\sigma} = T_{op}$ ή $T_{op} = 2 \text{ N}$.

Όμως η οριακή τριβή T_{op} υπολογίζεται από τη σχέση: $T_{op} = \mu_{\sigma} \cdot N$ και με βάση την (2):

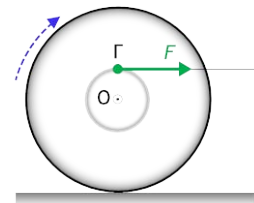
$$T_{op} = \mu_{\sigma} \cdot mg.$$

Λύνουμε ως προς το συντελεστή στατικής τριβής και βρίσκουμε:

$$\mu_{\sigma} = \frac{T_{op}}{mg} \Rightarrow \mu_{\sigma} = \frac{2 \text{ N}}{2 \cdot 10 \text{ N}} \Rightarrow \mu_{\sigma} = 0,1.$$

Πρόβλημα 7.

Ένας κύλινδρος ακτίνας R έχει μάζα $M = 4 \text{ kg}$. Στο εσωτερικό του υπάρχει μία κυλινδρική εγκοπή, ακτίνας $r = \frac{R}{3}$ πολύ μικρού πάχους, στην οποία έχουμε τυλίξει αβαρές μη εκτατό νήμα. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, στο άκρο του νήματος και πάνω από το κέντρο μάζας, ασκείται σταθερή οριζόντια δύναμη $F = 9 \text{ N}$, όπως φαίνεται στο σχήμα. Έτσι ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω σε οριζόντιο επίπεδο. Θεωρήστε τον κύλινδρο ομογενή με ροπή αδράνειας ως προς τον άξονά του $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}mR^2$. Να υπολογίσετε:

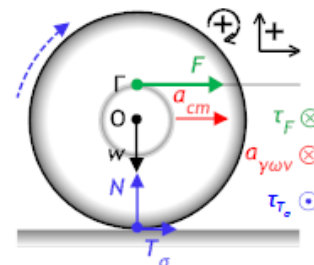


- το μέτρο της επιτάχυνσης a_{cm} του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.
- το μέτρο της στατικής τριβής, που δέχεται ο κύλινδρος από το οριζόντιο επίπεδο και να την σχεδιάσετε σε κατάλληλο σχήμα.
- το μέτρο της οριζόντιας επιτάχυνσης του σημείου επαφής Γ νήματος - κυλίνδρου.
- το μήκος του νήματος, που ξετυλίχτηκε, έως τη χρονική στιγμή $t_1 = 3 \text{ s}$.

Λύση

α) Καθορίζουμε ως σύστημα αναφοράς ένα ορθογώνιο σύστημα αξόνων xOy , με τον άξονα Ox παράλληλο στο οριζόντιο δάπεδο και θετική φορά την προς τα δεξιά.

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο: στο κέντρο μάζας O , το βάρος mg , στο σημείο επαφής κυλίνδρου - δαπέδου η κάθετη αντίδραση N και η στατική τριβή T_σ και στο σημείο Γ η τάση του νήματος F .



Επειδή η ροπή της στατικής τριβής δεν είναι η μοναδική ροπή, που επιταχύνει στροφικά τον κύλινδρο και η δύναμη της στατικής τριβής δεν είναι η μοναδική δύναμη, που τον επιταχύνει μεταφορικά, δεν μπορούμε εξαρχής να συμπεράνουμε για τη φορά της T_σ . Έστω λοιπόν ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά.

Εφαρμόζουμε τον ανάλογο νόμο, για κάθε κίνηση:

Για τη Μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Μηχανικής:

$$\Sigma F_x = m \cdot a_{\text{cm}} \Rightarrow F + T_\sigma = M a_{\text{cm}} \quad (1).$$

Για τη Στροφική κίνηση του κυλίνδρου εφαρμόζουμε το Θεμελιώδη Νόμο της Στροφικής Κίνησης ως προς άξονα που περνά από το κέντρο μάζας O :

$$\Sigma \tau = I_{cm} a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot r - T_{\sigma} \cdot R = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \frac{R}{3} - T_{\sigma} R = \frac{1}{2} MR^2 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \frac{F}{3} - T_{\sigma} = \frac{1}{2} M \cdot R a_{\gamma\omega\nu} \quad (2).$$

Επειδή ο κύλινδρος κυλίνεται χωρίς να ολισθαίνει θα ισχύει: $\alpha_{cm} = a_{\gamma\omega\nu} R \quad (3)$. Με βάση αυτήν η (2) γίνεται: $\frac{F}{3} - T_{\sigma} = \frac{1}{2} M \alpha_{cm} \quad (2')$.

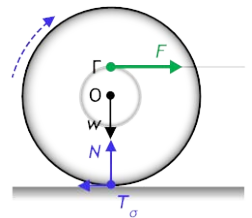
Επιλύουμε το αλγεβρικό σύστημα:

Προσθέτοντας κατά μέλη τις (1) και (2') έχουμε:

$$F + \cancel{T_{\sigma}} + \frac{F}{3} - \cancel{T_{\sigma}} = M \alpha_{cm} + \frac{1}{2} M \alpha_{cm} \Rightarrow \frac{4F}{3} = \frac{3}{2} M \alpha_{cm} \Rightarrow \alpha_{cm} = \frac{8F}{9M} \text{ και αντικαθιστώντας στο}$$

$$S.I. \text{ βρίσκουμε: } \alpha_{cm} = 2 \frac{m}{s^2}.$$

β) Μπορούμε να υπολογίσουμε τη στατική τριβή T_{σ} , από την (1): $T_{\sigma} = M \alpha_{cm} - F \Rightarrow T_{\sigma} = (4 \cdot 2 - 9)N \Rightarrow T_{\sigma} = -1N$. Το αρνητικό πρόσημο δείχνει ότι λανθασμένα υποθέσαμε ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα δεξιά, συνεπώς η κατεύθυνσή της είναι προς τα αριστερά, όπως φαίνεται στο νέο σχήμα.



γ) Εφόσον ο κύλινδρος κάνει σύνθετη κίνηση, το σημείο Γ θα έχει μία ταχύτητα λόγω μεταφορικής και μία λόγω στροφικής κίνησης.

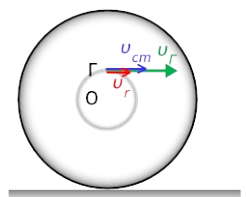
Η ταχύτητα λόγω μεταφορικής κίνησης είναι κοινή για όλα τα σημεία του κυλίνδρου, ίση με την ταχύτητα του κέντρου μάζας: $\vec{v}_{μετ} = \vec{v}_{cm}$.

Η ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης είναι η γραμμική ταχύτητα των σημείων, που στρέφονται σε ακτίνα r , οπότε: $\vec{v}_{στρ} = \vec{v}_r$.

Η ταχύτητα του σημείου Γ θα υπολογιστεί, με βάση την αρχή της επαλληλίας, προσθέτοντας διανυσματικά τις επιμέρους ταχύτητες: $\vec{v}_{\Gamma} = \vec{v}_{μετ} + \vec{v}_{στρ} = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_r$.

Από το σχήμα όμως φαίνεται ότι οι ταχύτητες αυτές είναι ομόρροπες, συνεπώς:

$$v_{\Gamma} = v_{cm} + v_r.$$



Για να βρούμε την οριζόντια επιτάχυνση του Γ, παραγωγίζουμε τη σχέση αυτή:

$$\frac{dv_{\Gamma}}{dt} = \frac{dv_{cm}}{dt} + \frac{dv_r}{dt}, \text{ αλλά } v_r = \omega \cdot r, \text{ οπότε:}$$

$$\frac{dv_{\Gamma}}{dt} = \frac{dv_{cm}}{dt} + \frac{d(\omega \cdot r)}{dt} \Rightarrow \frac{dv_{\Gamma}}{dt} = \frac{dv_{cm}}{dt} + \frac{d\omega}{dt} r \Rightarrow a_{\Gamma} = a_{cm} + a_{\gamma\omega\nu} \cdot r \quad (3)$$

$$a_{\Gamma} = a_{cm} + \frac{\alpha_{cm}}{R} r \Rightarrow a_{\Gamma} = a_{cm} + \frac{\alpha_{cm} R}{R} \Rightarrow a_{\Gamma} = \frac{4\alpha_{cm}}{3} \Rightarrow a_{\Gamma} = \frac{8}{3} \frac{m}{s^2}.$$

δ) Το μήκος του νήματος L , που ξετυλίγεται έως τη χρονική στιγμή t_1 είναι ίσο με το τόξο, που διέγραψαν τα σημεία της εγκοπής σε ακτίνα r , δηλαδή: $L = \widehat{s}$.

Από τη Γεωμετρία γνωρίζουμε ότι $\widehat{s} = r \cdot \theta$, οπότε: $L = r \cdot \theta$ (4), όπου θ η γωνία στροφής των σημείων του κυλίνδρου.

Επειδή η στροφική κίνηση είναι ομαλά επιταχυνόμενη, θα ισχύει: $\theta = \frac{a_{\gamma\omega\nu}}{2} t_1^2 \stackrel{(3)}{=} \frac{\alpha_{cm}}{2R} t_1^2$.

Αντικαθιστώντας στην (4) έχουμε:

$$L = r \cdot \theta = \frac{R}{3} \frac{\alpha_{cm}}{2R} t_1^2 \Rightarrow L = \frac{\alpha_{cm}}{6} t_1^2 \Rightarrow L = \frac{2}{6} 3^2 \text{ m} \Rightarrow L = 3 \text{ m}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 2/02/2012

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

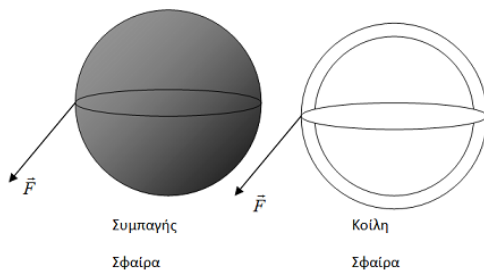
Μια συμπαγής και μια κοίλη σφαίρα της ίδιας ακτίνας και της ίδιας μάζας μπορούν να στρέφονται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους. Τη στιγμή $t = 0$ που τα δύο σώματα είναι ακίνητα ασκούνται σε αυτά δυνάμεις του ίδιου μέτρου. Οι δυνάμεις είναι σταθερού μέτρου και παραμένουν συνεχώς οριζόντιες και εφαπτόμενες στη μέγιστη περιφέρεια της σφαίρας. Κάποια χρονική στιγμή t το μέτρο της στροφορμής της συμπαγούς σφαίρας είναι L_{Σ} και της κοίλης σφαίρας είναι L_{κ} . Τις δύο στροφορμές τις συνδέει η σχέση:

α) $L_{\Sigma} = L_{\kappa}$.

β) $L_{\Sigma} > L_{\kappa}$.

γ) $L_{\Sigma} < L_{\kappa}$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.



Λύση

Σωστή λύση είναι η α.

Α Τρόπος:

Οι δύο σφαίρες δέχονται ίδιες δυνάμεις με ίδιους μοχλοβραχίονες, άρα δέχονται τις ίδιες ροπές.

Από το 2^ο νόμο του Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση στη γενικευμένη του μορφή έχουμε:

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \text{επειδή } \tau = \text{σταθερή} \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta L = \Sigma \tau \cdot \Delta t \Rightarrow L - L_0 = \Sigma \tau \cdot \Delta t$$

Αρχικά οι σφαίρες είναι ακίνητες, άρα $L_0 = 0$ και η τελευταία σχέση γράφεται

$$L = \Sigma \tau \cdot \Delta t$$

Σύμφωνα με την τελευταία σχέση, αφού οι δύο σφαίρες δέχονται την ίδια ροπή για ίδιο χρονικό διάστημα, θα αποκτήσουν την ίδια στροφορμή. Άρα σωστή λύση είναι η (Α).

Β Τρόπος:

Από τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην στροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_F = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow F \cdot R = I a_{\gamma\omega\nu}, \text{ άρα } a_{\gamma\omega\nu} = \text{σταθ.}$$

Οπότε, όπως γνωρίζουμε:

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = \frac{\omega - 0}{t - 0} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega}{t}$$

Με συνδυασμό των παραπάνω σχέσεων παίρνουμε:

$$F \cdot R = I \cdot \frac{\omega}{t} \Rightarrow F \cdot R \cdot t = I \cdot \omega \Leftrightarrow F \cdot R \cdot t = L$$

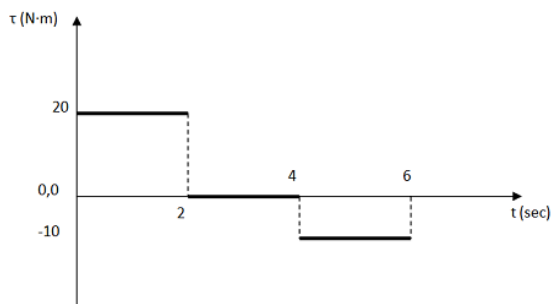
Παρατηρούμε ότι η στροφορμή L που προκύπτει είναι ανεξάρτητη από τη ροπή αδράνειας I και από τη μάζα. Εξαρτάται μόνο από τη ροπή της δύναμης που ασκήθηκε (FR) και από το χρόνο άσκησης της ροπής.

Έτσι, οι στροφορμές των δύο σφαιρών θα είναι ίσες, $L_s = L_K$, γιατί δέχονται ίδιες ροπές για ίδιο χρονικό διάστημα. Οι ροπές είναι ίσες γιατί οι δυνάμεις έχουν ίδια μέτρα και έχουν ίδιους μοχλοβραχίονες.

Συνεπώς, σωστή λύση είναι η α.

Ερώτηση 2.

Σε τροχό που αρχικά είναι ακίνητος και μπορεί να περιστραφεί γύρω από σταθερό άξονα, ασκείται ροπή, η αλγεβρική τιμή της οποίας μεταβάλλεται με το χρόνο όπως στο σχήμα.



α) Για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 2\text{s}$ ο τροχός περιστρέφεται με σταθερή γωνιακή ταχύτητα.

β) Για το χρονικό διάστημα $2\text{s} < t \leq 4\text{s}$ ο τροχός είναι σταματημένος.

γ) Για το χρονικό διάστημα $4\text{s} < t \leq 6\text{s}$ ο τροχός περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα που μειώνεται συνεχώς.

1) Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς.

2) Να σχεδιάσετε σε αριθμημένους άξονες πως μεταβάλλεται η στροφορμή του τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο.

Λύση

1)

α) Η πρόταση είναι Λάθος (Λ) .

Για το χρονικό διάστημα $0 \leq t \leq 2\text{s}$, ο τροχός δέχεται σταθερή ροπή, άρα σύμφωνα με το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης ($\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu}$) θα αποκτήσει σταθερή γωνιακή επιτάχυνση. Ο τροχός δηλαδή θα αρχίσει να εκτελεί περιστροφική ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση. Έτσι, η γωνιακή του ταχύτητα αυξάνεται και μάλιστα με σταθερό ρυθμό.

Συνεπώς η πρόταση α είναι Λάθος (Λ) .

β) Η πρόταση είναι Λάθος (Λ) .

Για το χρονικό διάστημα $2s < t \leq 4s$, ο τροχός δε δέχεται καμία ροπή. Δηλαδή δεν έχει γωνιακή επιτάχυνση. Αυτό σημαίνει ότι θα συνεχίσει να περιστρέφεται με την γωνιακή ταχύτητα που απέκτησε στο τέλος των $2s$, δηλαδή από $t_1 = 2s$ έως $t_2 = 4s$ ο τροχός θα εκτελεί ομαλή στροφική κίνηση.

Συνεπώς η πρόταση β είναι Λάθος (Λ).

γ) Η πρόταση γ είναι Σωστή (Σ).

Για το χρονικό διάστημα $4s < t \leq 6s$, ο τροχός δέχεται ροπή, αντίθετης φοράς από αυτήν της γωνιακής ταχύτητας με την οποία περιστρέφεται. Η κίνησή του θα γίνει τώρα στροφική ομαλά επιβραδυνόμενη και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητάς του θα μειώνεται.

Συνεπώς η πρόταση (Γ) είναι Σωστή (Σ).

2)

α) Από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 2s$ ο τροχός δέχεται σταθερή ροπή. Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή παίρνουμε:

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta L = \Sigma \tau \cdot \Delta t \Rightarrow L - L_0 = \Sigma \tau \cdot (t - t_0) \Rightarrow$$

$$L - 0 = \Sigma \tau \cdot (t - 0) \Rightarrow L = \Sigma \tau \cdot t \Rightarrow L = 20t(\text{S.I.}) \text{ με } 0 \leq t \leq 2s$$

Άρα η γραφική παράσταση $L - t$ από $t_0 = 0$ έως $t_1 = 2s$ θα είναι ευθεία που έχει αρχή την αρχή των αξόνων και τέλος το σημείο με συντεταγμένες t_1, L_1 .

Με αντικατάσταση στην τελευταία σχέση $t_1 = 2s$ εύκολα προκύπτει $L_1 = 40 \frac{\text{Kgm}^2}{s}$.

β) Από $t_1 = 2s$ έως $t_2 = 4s$ ο τροχός δεν δέχεται καμία ροπή. Άρα από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή ($\Delta L = \Sigma \tau \cdot \Delta t$) παίρνουμε $\Delta L = 0$, δηλαδή η στροφορμή θα παραμείνει σταθερή

γ) Για το χρονικό διάστημα $4s < t \leq 6s$, ο τροχός δέχεται ροπή αντίθετης φοράς από αυτήν της στροφορμής με την οποία περιστρέφεται. Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή παίρνουμε:

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta L = \Sigma \tau \cdot \Delta t \Rightarrow L - L_2 = \Sigma \tau \cdot (t - t_2) \Rightarrow$$

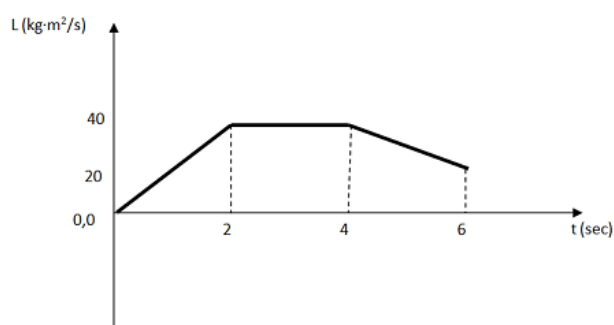
$$L - 40 = -10 \cdot (t - 4) \Rightarrow L = 40 - 10 \cdot (t - 4) \text{ (S.I.) με } 4s < t \leq 6s$$

Η γραφική παράσταση $L - t$ από $t_2 = 4s$ έως $t_3 = 6s$ θα είναι ευθεία με αρνητική κλίση.

Με αντικατάσταση $t_3 = 6s$ προκύπτει:

$$L - 40 = -10 \cdot (6 - 4) \Rightarrow L = 20 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

Το διάγραμμα που προκύπτει φαίνεται παρακάτω:



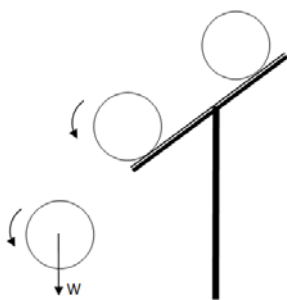
Ερώτηση 3.

Μία ομογενής σφαίρα κατέρχεται μια επικλινή στέγη (κεκλιμένο επίπεδο). Η σφαίρα κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει. Η σφαίρα εγκαταλείπει τη στέγη και πέφτει στο έδαφος. Αν αγνοήσουμε την αντίσταση του αέρα, για το τμήμα της διαδρομής από τη στιγμή που η σφαίρα άφησε τη στέγη και μέχρι να φτάσει στο έδαφος, ισχύει:

- α) η σφαίρα δέχεται ροπή λόγω βάρους.
- β) η στροφορμή της σφαίρας παραμένει σταθερή.
- γ) η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας παραμένει σταθερή
- δ) ο ρυθμός μεταβολής της ορμής είναι ίσος με μηδέν.

Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς.

Λύση



α) Η πρόταση είναι Λάθος (Λ) .

Επειδή η σφαίρα είναι ένα ελεύθερο στερεό στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Η μόνη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα για το τμήμα της διαδρομής της από τη στιγμή που άφησε τη στέγη και μέχρι να φτάσει στο έδαφος, είναι το βάρος της, το οποίο περνά από το κέντρο μάζας της σφαίρας. Έτσι, $\Sigma \tau = 0$.

Συνεπώς η πρόταση α είναι Λάθος (Λ) .

β) Η πρόταση είναι Σωστή (Σ) .

Επειδή ισχύει $\Sigma \tau = 0$ θα είναι $\frac{dL}{dt} = 0$, συνεπώς $L = \text{σταθερή}$. Συνεπώς η πρόταση β είναι Σωστή (Σ) .

γ) Η πρόταση είναι Σωστή (Σ) .

Ισχύει $L = I\omega$. Επειδή $L = \text{σταθερή}$ και $I = \text{σταθερή}$, θα είναι και $\omega = \text{σταθερή}$.

Συνεπώς η πρόταση γ είναι Σωστή (Σ) .

δ) Η πρόταση είναι Λάθος (Λ).

Από το θεμελιώδη νόμο της μεταφορικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή παίρνουμε:

$$\frac{dp}{dt} = \Sigma F = mg .$$

Δηλαδή έχουμε μεταβολή της ορμής λόγω του βάρους.

Συνεπώς η πρόταση δ είναι Λάθος (Λ) .

Ερώτηση 4.

Ένας άνθρωπος βρίσκεται πάνω σε τραπέζι που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα διερχόμενο από το κέντρο του τραπεζιού. Ο άνθρωπος έχει τα χέρια τεντωμένα σε έκταση και ενώ το σύστημα άνθρωπος – τραπέζι περιστρέφεται χωρίς τριβές με γωνιακή ταχύτητα ω_0 ο άνθρωπος φέρνει τα χέρια του στο στήθος. Ποιες από τις παρακάτω προτάσεις είναι σωστές;

- α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος αυξάνεται.
- β) Η στροφορμή του συστήματος ελαττώνεται.
- γ) Η γωνιακή του ταχύτητα αυξάνεται.

Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς. Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας.

Λύση

- α) Η πρόταση είναι Λάθος (Λ) .

Η ροπή αδράνειας ενός στερεού ως προς έναν άξονα περιστροφής βρίσκεται από τη σχέση $I = m_1 r_1^2 + m_2 r_2^2 + \dots$

Με τη σύμπτυξη των χεριών του ανθρώπου μερικές στοιχειώδεις μάζες μετακινούνται πλησιέστερα στον άξονα περιστροφής. Αυτό έχει συνέπεια να μειώνονται η ακτίνες περιστροφής τους, άρα και η ροπή αδράνειας του ανθρώπου.

Συνεπώς η πρόταση α είναι Λάθος (Λ) .

- β) Η πρόταση είναι Λάθος (Λ) .

Κατά τη διάρκεια της σύμπτυξης των χεριών του ανθρώπου δεν ενεργούν στο σύστημα άνθρωπος-τραπέζι εξωτερικές ροπές ($\Sigma \tau = 0$) . Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή ($dL = \Sigma \tau \cdot dt$) παίρνουμε $dL = 0$, δηλαδή η στροφορμή θα παραμείνει σταθερή.

Συνεπώς η πρόταση β είναι Λάθος (Λ) .

- γ) Η πρόταση είναι Σωστή (Σ) .

Κατά τη διάρκεια της σύμπτυξης των χεριών του ανθρώπου ισχύει:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2$$

Όπως είδαμε στην Παράδειγμα α η ροπή αδράνειας θα μειωθεί ($I_1 > I_2$), άρα για να διατηρηθεί η στροφορμή πρέπει η γωνιακή ταχύτητα να αυξηθεί ($\omega_1 < \omega_2$).

Συνεπώς η πρόταση γ είναι Σωστή (Σ).

Ερώτηση 5.

Ένας αθλητής καταδύσεων εγκαταλείπει την εξέδρα με αρχική γωνιακή ταχύτητα ω . Κατόπιν, και ενώ βρίσκεται στον αέρα (σε «πτήση»), μαζεύει τα χέρια και τα πόδια στο στήθος έτσι ώστε η γωνιακή του ταχύτητα να διπλασιαστεί. Κατά τη διάρκεια αυτής της μεταβολής:

- α) η στροφορμή του αθλητή διπλασιάστηκε.
- β) η ροπή αδράνειάς του αθλητή υποδιπλασιάστηκε.
- γ) το μέτρο της αδράνειάς του αθλητή στη μεταφορική κίνηση υποδιπλασιάστηκε.

Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς.

Λύση

α) Η πρόταση είναι Λάθος (Λ) .

Ο αθλητής είναι ένα ελεύθερο στερεό , άρα περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Κατά τη διάρκεια της «πτήσης» του η μόνη δύναμη που του ασκείται είναι το βάρος του, το οποίο περνά από το κέντρο μάζας του και δεν προκαλεί ροπή, $\Sigma \tau = 0$. Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή ($dL = \Sigma \tau \cdot dt$) παίρνουμε $dL = 0$, δηλαδή η στροφορμή θα παραμείνει σταθερή.

Συνεπώς η πρόταση α είναι Λάθος (Λ) .

β) Η πρόταση είναι Σωστή (Σ) .

Κατά τη διάρκεια της «πτήσης» του αθλητή ισχύει:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \Rightarrow I_1\omega_1 = I_2 \cdot 2\omega_1 \Rightarrow I_2 = \frac{I_1}{2}$$

Συνεπώς η πρόταση β είναι Σωστή (Σ) .

γ) Η πρόταση είναι Λάθος (Λ) .

Το μέτρο της αδράνειας ενός σώματος στη μεταφορική κίνηση ταυτίζεται με τη μάζα του σώματος. Η μάζα του αθλητή προφανώς δεν αλλάζει, εκείνο που αλλάζει είναι η κατανομή της μάζας του με συνέπεια να μεταβάλλεται η ροπή αδράνειας του.

Συνεπώς η πρόταση γ είναι Λάθος (Λ) .

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

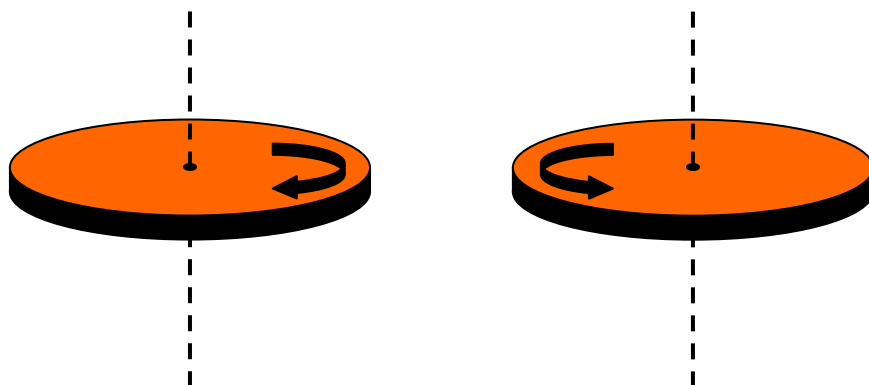
Ο ομογενής και ισοπαχής δίσκος του σχήματος έχει ακτίνα $R = 1\text{ m}$, μάζα $M = 2\text{ kg}$ και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο σταθερό άξονα, που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του. Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που περνά από το κέντρο του και είναι κάθετος στο επίπεδό του, δίνεται από τον τύπο: $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$. Αρχικά, ο δίσκος περιστρέφεται όπως φαίνεται στο πρώτο σχήμα,

με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Με την άσκηση κατάλληλης σταθερής ροπής $\vec{\tau}$, επιτυγχάνεται η αναστροφή της φοράς περιστροφής του δίσκου. Μετά από χρονικό διάστημα $\Delta t = 10\text{ s}$ η νέα γωνιακή ταχύτητα περιστροφής έχει ίσο μέτρο με την αρχική.

α) να σχεδιάσετε τα διανύσματα $\vec{L}_{\text{αρχ}}$ και $\vec{L}_{\text{τελ}}$ της αρχικής και τελικής στροφορμής του δίσκου στα παρακάτω σχήματα και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

β) να σχεδιάσετε στο δεύτερο σχήμα το διάνυσμα $\Delta\vec{L}$ της μεταβολής της στροφορμής και να υπολογίσετε το μέτρο της.

γ) να σχεδιάσετε στο πρώτο σχήμα το διάνυσμα $\vec{\tau}$ της σταθερής ροπής που ασκήθηκε στο δίσκο και να υπολογίσετε το μέτρο της.



Λύση

Για την επίλυση του παραδείγματος, θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

α) θα επιλέξουμε κατάλληλους νόμους.

β) θα κάνουμε το σχήμα.

γ) θα γράψουμε δεδομένα – ζητούμενα.

δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.

ε) θα εξειδικεύσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.

στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και

ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

Το μέτρο της στροφορμής του δίσκου δίνεται από τη σχέση:

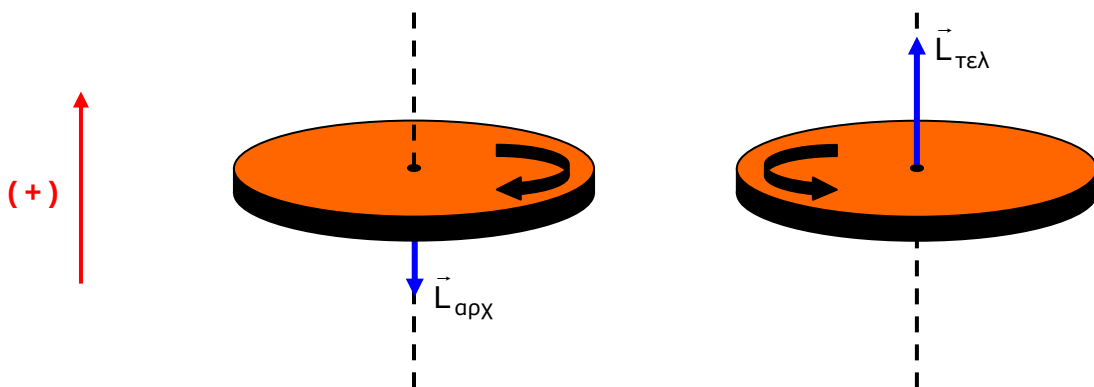
$$L = I\omega \quad (1)$$

Επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση τα διανύσματα $\vec{L}_{\alpha\rho\chi}$ και $\vec{L}_{\tau\epsilon\lambda}$ είναι συνευθειακά (πάνω στο σταθερό άξονα περιστροφής), μπορούμε να θέσουμε μια θετική φορά και να χρησιμοποιήσουμε αλγεβρικές τιμές για τον υπολογισμό της $\Delta\vec{L}$:

$$\Delta L = L_{\tau\epsilon\lambda} - L_{\alpha\rho\chi} \quad (2)$$

Η αλγεβρική τιμή του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του δίσκου συνδέεται με το αλγεβρικό άθροισμα των ροπών που ασκούνται σ' αυτόν μέσω της γενικότερης διατύπωσης του θεμελιώδους νόμου της στροφικής κίνησης:

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} \quad (3)$$



Θεωρούμε θετική τη φορά του σχήματος, επομένως η αρχική στροφορμή έχει αρνητική αλγεβρική τιμή. Η τελική στροφορμή έχει θετική αλγεβρική τιμή.

Δεδομένα	Ζητούμενα
$R = 1 \text{ m}$ $M = 2 \text{ kg}$ $I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2$ $\omega_1 = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ $\vec{\tau} = \text{σταθ.}$ $\Delta t = 10 \text{ s}$ $\vec{\omega}_2 = -\vec{\omega}_1$	α. $\vec{L}_{\alpha\rho\chi} = ?$; $\vec{L}_{\tau\epsilon\lambda} = ?$; β. $\Delta\vec{L} = ?$; γ. $\vec{\tau} = ?$;

α) Από τη σχέση (1), για τα μέτρα των στροφορμών έχουμε:

$$L_{αρχ} = I\omega_1 = \frac{1}{2}MR^2\omega_1 \Rightarrow \boxed{L_{αρχ} = 2 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}}$$

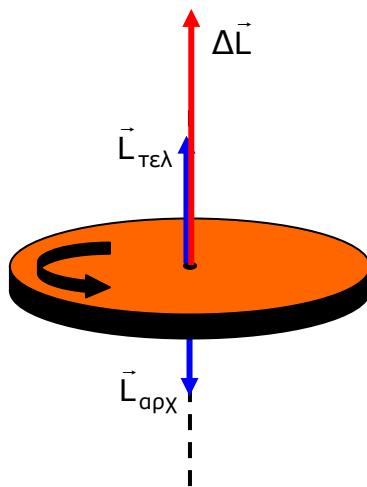
$$L_{τελ} = I\omega_2 = \frac{1}{2}MR^2\omega_2 \Rightarrow \boxed{L_{τελ} = 2 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}}$$

β) Από τη σχέση (2), θέτοντας $L_{αρχ} = -2 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$ και $L_{τελ} = +2 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$ έχουμε:

$$\Delta L = L_{τελ} - L_{αρχ} = (2 - (-2)) \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \Rightarrow \Delta L = +4 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

Το θετικό πρόσημο στην αλγεβρική τιμή της μεταβολής της στροφορμής σημαίνει ότι το διάνυσμα $\Delta \vec{L}$ έχει την κατεύθυνση της φοράς που θέσαμε ως θετική. Το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής είναι:

$$\boxed{\Delta L = 4 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}}$$



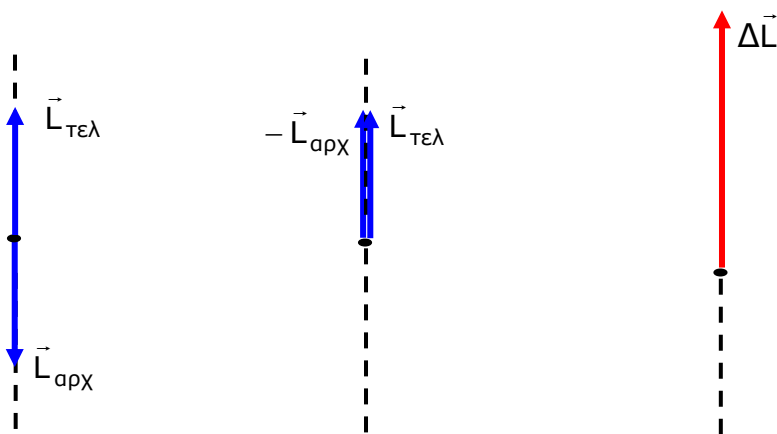
Σημείωση (I): Υπολογισμός της στροφορμής

Η μεταβολή της στροφορμής μπορεί να υπολογιστεί και ως εξής:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} + (-\vec{L}_{αρχ})$$

δηλαδή, ως άθροισμα των διανυσμάτων $-\vec{L}_{αρχ}$ και $\vec{L}_{τελ}$.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, το άθροισμα καταλήγει στο διάνυσμα του σχήματος:



το οποίο έχει μέτρο ίσο με το άθροισμα των μέτρων των διανυσμάτων $-\vec{L}_{\alphaρχ}$ και $\vec{L}_{τελ}$:

$$\Delta L = L_{τελ} + L_{αρχ} = (2 + 2) \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \Rightarrow \boxed{\Delta L = 4 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}}$$

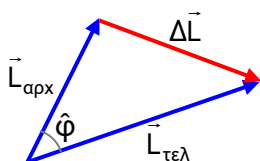
Σημείωση (II): Υπολογισμός της στροφορμής

Στη γενικότερη περίπτωση που τα διανύσματα $\vec{L}_{αρχ}$ και $\vec{L}_{τελ}$ σχηματίζουν τυχαία γωνία, η μεταβολή της στροφορμής μπορεί να υπολογιστεί ως εξής:

Η στροφορμή είναι διανυσματικό μέγεθος. Ως αποτέλεσμα, η μεταβολή της είναι και αυτή διανυσματικό μέγεθος:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{τελ} - \vec{L}_{αρχ}$$

Όπως συμβαίνει με όλα τα διανυσματικά μεγέθη, αν η αρχική και τελική στροφορμή σχεδιαστούν με κοινή αρχή, η μεταβολή της στροφορμής είναι ένα διάνυσμα με φορά από την αρχική προς την τελική στροφορμή:



Το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής δίνεται από τον τύπο:

$$\Delta L = \sqrt{L_{αρχ}^2 + L_{τελ}^2 - 2L_{αρχ}L_{τελ}\cos\varphi} \quad (4)$$

Για τη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε στο παράδειγμα, από την (4), για $\varphi = 180^\circ$ έχουμε:

$$\Delta L = \sqrt{L_{αρχ}^2 + L_{τελ}^2 - 2L_{αρχ}L_{τελ}\cos\varphi} \Rightarrow \Delta L = \sqrt{2^2 + 2^2 - 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot (-1)} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\Delta L = 4 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

γ) Από την (3) και επειδή $\vec{\tau}$ =σταθ. έχουμε:

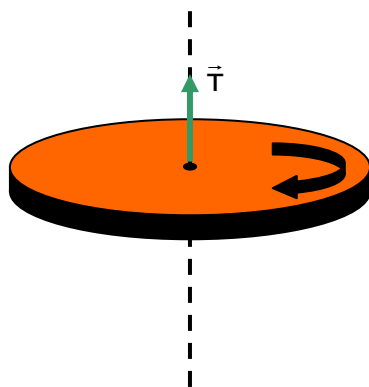
$$\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L_{\tau\epsilon\lambda} - L_{\alpha\rho\chi}}{t_{\tau\epsilon\lambda} - t_{\alpha\rho\chi}}$$

Με αντικατάσταση των αλγεβρικών τιμών των στροφορμών, έχουμε:

$$\tau = \frac{(+2) - (-2)}{10 - 0} \text{ Nm} \Rightarrow \tau = +0,4 \text{ Nm}$$

Το θετικό πρόσημο στην αλγεβρική τιμή της ροπής σημαίνει ότι το διάνυσμα $\vec{\tau}$ έχει την κατεύθυνση της φοράς που θέσαμε ως θετική. Το μέτρο της ροπής είναι:

$$\tau = 0,4 \text{ Nm}$$



Άσκηση 2.

Ένας ακίνητος οριζόντιος τροχός μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα. Ο τροχός έχει ροπή αδράνειας $I = 5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$ και τη χρονική στιγμή $t = 0$ δέχεται τη δράση σταθερής ροπής 100 Nm για χρονικό διάστημα $\Delta t = 10 \text{ s}$, η οποία μετά καταργείται. Να βρείτε:

- α) τη γωνιακή επιτάχυνση που απέκτησε ο τροχός.
- β) τη στροφορμή του τροχού τη στιγμή $t = 10 \text{ s}$.
- γ) το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής για το χρονικό διάστημα $0 < t < 15 \text{ s}$.
- δ) τη γωνιακή ταχύτητα του τροχού τη χρονική στιγμή $t = 15 \text{ s}$.

Λύση

α) Από το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής στην στροφική κίνηση έχουμε:

$$\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow \tau_F = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow 100 = 5 a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

β) Γνωρίζουμε ότι $L = I\omega$. Η γωνιακή ταχύτητα ω βρίσκεται από τον ορισμό της γωνιακής επιτάχυνσης.

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{\omega - \omega_0}{t - t_0} = \frac{\omega - 0}{t - 0} \Rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\omega}{t} \Rightarrow \omega = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t = 20 \cdot 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\omega = 200 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Έτσι, η στροφορμή του τροχού θα γίνει:

$$L = I\omega = 5 \cdot 200 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \Rightarrow L = 1000 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

γ) Για τα πρώτα 10 s , δηλαδή όσο ασκείται η ροπή, από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή παίρνουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \Rightarrow \frac{dL}{dt} = 100 \text{ Nm}$$

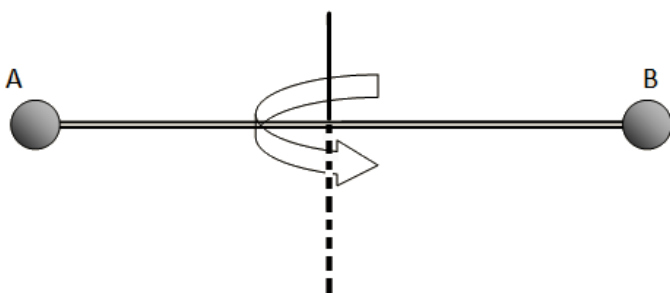
Από τη στιγμή $t = 10 \text{ s}$ και μετά, επειδή δεν ασκείται στον τροχό καμία εξωτερική ροπή, αυτός θα κινείται ομαλά στροφικά. Η στροφορμή του δηλαδή θα παραμένει σταθερή και ο ρυθμός μεταβολής της θα είναι μηδέν (0).

$$\frac{dL}{dt} = 0$$

δ) Από τη στιγμή $t=10\text{s}$ και μετά, επειδή δεν ασκείται στον τροχό καμία εξωτερική ροπή, αυτός θα κινείται ομαλά στροφικά. Έτσι η γωνιακή του ταχύτητα θα παραμένει σταθερή και ίση με αυτή που είχε στο τέλος της επιταχυνόμενης κίνησης, δηλαδή $200\frac{\text{rad}}{\text{s}}$.

Άσκηση 3.

Μια οριζόντια ομογενής ράβδος AB, μήκους $\ell = 1\text{m}$, μάζας $M = 5\text{kg}$ που έχει στα άκρα της στερεωμένες δύο σημειακές μάζες $m_1 = m_2 = m = 1\text{kg}$ μπορεί να στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της. Το σύστημα ενώ στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 16 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ δέχεται τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ την επίδραση σταθερής εξωτερικής ροπής που το σταματά μετά από 2s . Να βρείτε:



- τη ροπή αδράνειας του συστήματος.
 - την αρχική στροφορμή του συστήματος τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$.
 - το μέτρο της εξωτερικής ροπής που ασκήθηκε στο σύστημα και να σχεδιάσετε το διάνυσμά της.
 - τον αριθμό περιστροφών του συστήματος μέχρι να μηδενιστεί η στροφορμή του.
- Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτή και διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$.

Λύση

α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας της ράβδου και των δύο σημειακών σφαιρών. Είναι δηλαδή:

$$I = I_p + 2I_{\text{sf}} = \frac{M\ell^2}{12} + 2 \cdot m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\frac{5 \cdot 1^2}{12} + 2 \cdot 1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 = \left(\frac{5}{12} + \frac{2}{4}\right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow$$
$$I = \frac{11}{12} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

β) Τη στιγμή $t_0 = 0$, η στροφορμή του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$L = I\omega = \frac{11}{12} \cdot 16 \text{kgm}^2 \cdot \text{s}^{-1} \Rightarrow L = \frac{44}{3} \text{kgm}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

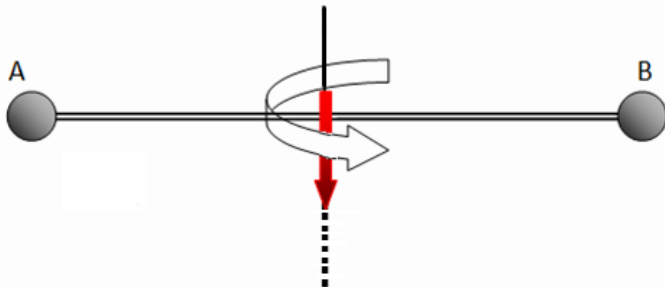
γ) Από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή παίρνουμε:

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta L = \Sigma \tau \cdot \Delta t \Rightarrow L_1 - L_0 = \Sigma \tau \cdot (t_1 - t_0) \Rightarrow$$

$$0 - \frac{44}{3} = \Sigma \tau \cdot (2 - 0) \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{-44}{2} \text{ N} \cdot \text{m} \Rightarrow \Sigma \tau = -\frac{22}{3} \text{ N} \cdot \text{m}$$

Άρα το μέτρο της εξωτερικής ροπής είναι $\frac{22}{3} \text{ N} \cdot \text{m}$. Το διάνυσμα της εξωτερικής ροπής

βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής και έχει φορά αντίθετη της αρχικής στροφορμής. Επειδή η περιστροφή γινόταν αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού η αρχική στροφορμή ήταν προς τα πάνω. Άρα το διάνυσμα της ροπής είναι προς τα κάτω.



δ) Η στροφορμή του συστήματος θα μηδενιστεί όταν η γωνιακή ταχύτητα μηδενιστεί. Η επιτάχυνση του συστήματος υπολογίζεται ως εξής:

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow -\frac{22}{3} = \frac{11}{12} \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = -8 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Σε απόλυτη αντιστοιχία με τη σχέση που δίνει την ταχύτητα στην μεταφορική κίνηση,

$v = v_0 + at$, για τη στροφική κίνηση γράφουμε:

$$\omega = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} t \Rightarrow 0 = 16 - 8t \Rightarrow t = 2\text{s}.$$

Δηλαδή το σύστημα θα σταματήσει σε 2s.

Σε απόλυτη αντιστοιχία με τη σχέση που δίνει την μετατόπιση στην μεταφορική κίνηση,

$\Delta x = v_0 t + \frac{1}{2} at^2$, για τη στροφική κίνηση γράφουμε:

$$\Delta \theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 \Rightarrow \Delta \theta = (16 \cdot 2 - \frac{1}{2} 8 \cdot 2^2) \text{ rad} \Rightarrow \Delta \theta = 16 \text{ rad}$$

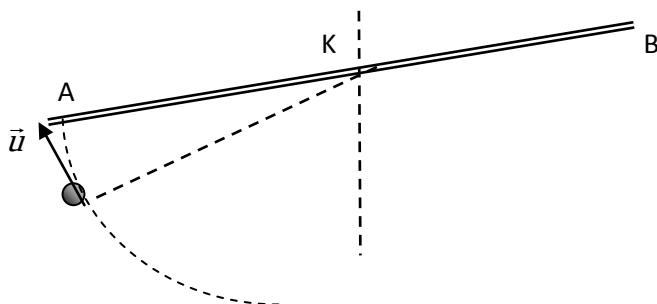
Δηλαδή το σύστημα θα σταματήσει αφού διαγράψει συνολική γωνία στροφής 16rad.

Έτσι, ο αριθμός των περιστροφών του συστήματος μέχρι να μηδενιστεί η στροφορμή του είναι:

$$N = \frac{\Delta \theta}{2\pi} = \frac{16}{2\pi} \text{ περιστροφές} \Rightarrow N = \frac{8}{\pi} \text{ περιστροφές.}$$

Άσκηση 4.

Μία ομογενής ράβδος μήκους $\ell = 1\text{m}$ και μάζας $M = 1\text{kg}$ ισορροπεί σε οριζόντιο επίπεδο. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της K . Ένα σφαιρίδιο μάζας $m = 0,1\text{kg}$ που εκτελεί τμήμα κυκλικής τροχιάς, ακτίνας $r = \frac{\ell}{2}$, με κέντρο το σημείο K και κινείται πάνω στο οριζόντιο επίπεδο προσπίπτει οριζόντια με ταχύτητα $v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, κάθετα στη ράβδο, στο ένα άκρο της και ενώνεται μ' αυτήν. Η κρούση γίνεται τη χρονική στιγμή $t = 0$.



Να βρείτε:

- τη στροφορμή του σφαιριδίου ελάχιστα πριν συγκρουστεί με τη ράβδο.
- την γωνιακή ταχύτητα του συστήματος ράβδου - σφαιριδίου αμέσως μετά την κρούση.
- το κλάσμα της κινητικής ενέργειας που χάνει το σφαιρίδιο κατά την κρούση.
- πόση σταθερή ροπή αντίστασης (κατά μέτρο) πρέπει να ασκηθεί στο σύστημα ράβδου - σφαιριδίου σώματος ώστε αυτό να σταματήσει να περιστρέφεται μετά από χρονικό διάστημα $t = 2\text{s}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το μέσον της, $I_{\text{cm}} = \frac{M\ell^2}{12}$.

Λύση

α) Καθώς το σφαιρίδιο εκτελεί τμήμα κυκλικής τροχιάς, ελάχιστα πριν συγκρουστεί με τη ράβδο, έχει τη στροφορμή σημειακού αντικειμένου:

$$L_1 = m \cdot v \cdot r$$

Και στην περίπτωσή μας:

$$L_1 = m \cdot v \cdot \frac{\ell}{2},$$

διότι η ακτίνα περιστροφής του σώματος είναι το μισό του μήκους της ράβδου. Έτσι,

$$L_1 = 0,1 \cdot 10 \cdot \frac{1}{2} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow L_1 = 0,5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}}{\text{s}^2} .$$

β) Στη διάρκεια της κρούσης δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές, οπότε ισχύει η Αρχή Διατήρησης Στροφορμής:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow L_1 = L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \Rightarrow L_1 = I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{L_1}{I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}} \quad (1)$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος υπολογίζεται ως εξής:

$$I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = I_{\rho\acute{\alpha}\beta\delta\omicron\upsilon} + I_{\sigma\acute{\omega}\mu\alpha\tau\omicron\varsigma} \Rightarrow$$

$$I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{M\ell^2}{12} + m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \left(\frac{1 \cdot 1^2}{12} + 0,1 \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^2\right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 = \left(\frac{1}{12} + \frac{0,1}{4}\right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow$$

$$I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} = \frac{13}{120} \text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Άρα, από την (1) παίρνουμε:

$$\omega = \frac{0,5 \text{ rad}}{\frac{1,3}{12} \text{ s}} \Rightarrow \omega = \frac{60 \text{ rad}}{13 \text{ s}}$$

γ) Το κλάσμα της κινητικής ενέργειας που χάνει το σφαιρίδιο κατά την κρούση είναι:

$$\frac{K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\epsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}mv_2^2}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{v^2 - \left(\omega \frac{\ell}{2}\right)^2}{v^2} = \frac{10^2 - \left(\frac{6}{1,3} \cdot 0,5\right)^2}{10^2} \Rightarrow$$

$$\frac{K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\epsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{10^2 - \left(\frac{3}{1,3}\right)^2}{10^2} = \frac{100 - \frac{9}{1,69}}{100} \Rightarrow$$

$$\frac{K_{\alpha\rho\chi} - K_{\tau\epsilon\lambda}}{K_{\alpha\rho\chi}} = \frac{160}{169}$$

δ) Η συνολική ροπή αντίστασης που δέχτηκε το σύστημα σφαιριδίου - ράβδου κατά την κίνησή του βρίσκεται από τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη

του μορφή, $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \quad (1)$

Γνωρίζουμε ότι:

$$\Delta L = L_{\text{συστ}}^{\text{τελ}} - L_{\text{συστ}}^{\text{αρχ}} = 0 - I_{\text{συστ}} \omega = 0 - \frac{1,3}{12} \cdot \frac{6}{1,3} \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\Delta L = 0 - 0,5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \Rightarrow \Delta L = -0,5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

και $\Delta t = 2\text{s}$

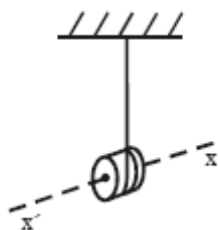
Με αντικατάσταση στη σχέση (1) εύκολα προκύπτει $\Sigma \tau = -0,25 \text{N} \cdot \text{m}$

Άρα το μέτρο της ροπής που ασκείται στη ράβδο είναι $\tau = 0,25 \text{N} \cdot \text{m}$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Το γιο-γιο του σχήματος αποτελείται από ομογενή συμπαγή κύλινδρο που έχει μάζα $m = 0,12 \text{ kg}$ και ακτίνα $R = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$. Γύρω από τον κύλινδρο έχει τυλιχτεί νήμα. Τη χρονική στιγμή $t=0$ αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει. Το νήμα ξετυλίγεται και ο κύλινδρος περιστρέφεται γύρω από νοητό οριζόντιο άξονα $x'x$, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του. Το νήμα σε όλη τη διάρκεια της κίνησης του κυλίνδρου παραμένει κατακόρυφο και τεντωμένο και δεν ολισθαίνει στην περιφέρεια του κυλίνδρου. Τη στιγμή που έχει ξετυλιχθεί νήμα μήκους $\ell = 20R$, η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{\text{cm}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$.



α) Να υπολογίσετε τη ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του με εφαρμογή του δεύτερου νόμου Νεύτωνα για τη στροφική κίνηση.

β) Να υπολογίσετε το μέτρο του ρυθμού μεταβολής της στροφορμής του κυλίνδρου, καθώς αυτός κατέρχεται.

γ) Τη χρονική στιγμή που η ταχύτητα του κέντρου μάζας του κυλίνδρου είναι $v_{\text{cm}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, κόβουμε το νήμα. Να υπολογίσετε το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του μετά την πάροδο χρόνου $0,8 \text{ s}$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.

δ) Να κάνετε σε βαθμολογημένους άξονες το διάγραμμα του μέτρου της στροφορμής σε συνάρτηση με το χρόνο από τη χρονική στιγμή $t=0$, μέχρι τη χρονική στιγμή που αντιστοιχεί σε χρόνο $0,8 \text{ s}$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Δίνεται $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Λύση

Για την επίλυση του παραδείγματος, θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

α) θα επιλέξουμε κατάλληλους νόμους.

β) θα γράψουμε δεδομένα – ζητούμενα.

γ) θα κάνουμε το σχήμα.

δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.

ε) θα εξειδικεύσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.

στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και

ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

Επειδή ο κύλινδρος του γιο-γιο είναι ομογενής, το κέντρο μάζας του θα βρίσκεται στο κέντρο συμμετρίας του.

Το γιο-γιο, λόγω των ροπών που του ασκούνται, περιστρέφεται γύρω από ελεύθερο άξονα περιστροφής που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, είναι άξονας συμμετρίας και δεν αλλάζει κατεύθυνση κατά τη διάρκεια της κίνησης. Επομένως, για το γιο-γιο ισχύει ο 2^{ος} Νόμος Newton στη Στροφική Κίνηση:

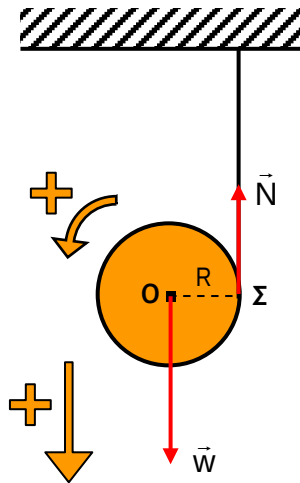
$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} = I \cdot a_{\gamma} \quad (1)$$

Για τη μεταφορική κίνηση του γιο-γιο ισχύει η Θεμελιώδης Εξίσωση της Μηχανικής:

$$\Sigma F = m \cdot a_{cm} \quad (2)$$

Δεδομένα	Ζητούμενα
$m = 0,12 \text{ kg}$ $R = 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ $t=0 \rightarrow \omega_0 = 0, v_{cm,0} = 0$ $\ell = 20R \rightarrow v_{cm} = 2 \frac{m}{s}$ $\gamma. v_{cm} = 2 \frac{m}{s} \rightarrow \text{νήμα κόβεται}$ $\gamma. \Delta t = 0,8 \text{ s}$ $g = 10 \frac{m}{s^2}$	$\alpha. I = ;$ $\beta. \frac{dL}{dt} = ;$ $\gamma. L = ;$ $\delta. \text{ γραφική παράσταση } L = f(t)$

Οι δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο του γιο-γιο φαίνονται στο σχήμα:



- Η δύναμη $\vec{N}$ ασκείται από το νήμα στον κύλινδρο.
- Η δύναμη $\vec{w}$ ασκείται από τη Γη στον κύλινδρο.

α) Θεωρώντας θετική την αριστερόστροφη φορά, υπολογίζουμε τις αλγεβρικές τιμές των ροπών των δυνάμεων.

Ως προς το κέντρο μάζας του κυλίνδρου O:

$$\tau_N = + N \cdot R$$

$$\tau_w = 0$$

Με αντικατάσταση στην (1) έχουμε:

$$N \cdot R = I \cdot a_\gamma \quad (3)$$

Θεωρούμε θετική την κατακόρυφη προς τα κάτω φορά. Με αντικατάσταση στη (2) έχουμε:

$$w - N = m \cdot a_{cm} \Rightarrow N = mg - m \cdot a_{cm} \quad (4)$$

Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο, το τόξο ds κατά το οποίο έχει στραφεί η περιφέρεια του κυλίνδρου σε χρόνο dt , θα είναι ίσο με την απόσταση dx κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί το νήμα, άρα και με την απόσταση dx κατά την οποία έχει κατέβει ο κύλινδρος. Επομένως:

$$dx = ds = d\theta \cdot R \Rightarrow x_{cm} = \theta \cdot R \Rightarrow$$

$$\frac{dx}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R \quad (5)$$

$$\Rightarrow \frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \Rightarrow a_{cm} = a_\gamma \cdot R \quad (6)$$

Από την (3) φαίνεται ότι επειδή τα N , R , I είναι σταθερά, η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου θα είναι σταθερή.

Από την (6) επίσης φαίνεται ότι θα είναι σταθερή και η μεταφορική επιτάχυνση του κυλίνδρου.

Επομένως, ο κύλινδρος θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση:

- ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση.
- ομαλά επιταχυνόμενη στροφική κίνηση γύρω από ελεύθερο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

Για την ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση του κυλίνδρου (χωρίς αρχική ταχύτητα) έχουμε:

$$x_{cm} = \frac{1}{2} a_{cm} t^2$$

$$v_{cm} = a_{cm} t$$

Θέτοντας $x_{cm} = \ell = 20R$ και $v_{cm} = 2 \frac{m}{s}$, έχουμε στο (S.I.):

$$20R = \frac{1}{2} a_{cm} t^2 \Rightarrow a_{cm} t^2 = 40R$$

και

$$v_{cm} = a_{cm} t \Rightarrow a_{cm} t = 2 \quad (7)$$

απ' τις οποίες προκύπτει:

$$2t = 40R \Rightarrow t = 20 \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ s} \Rightarrow t = 0,3 \text{ s} \quad (8)$$

Αντικαθιστώντας την (8) στην (7) έχουμε στο (S.I.):

$$a_{cm} \cdot 0,3 = 2 \Rightarrow a_{cm} = \frac{20}{3} \frac{m}{s^2} \quad (9)$$

Από τις (6) και (9) έχουμε:

$$a_{cm} = a_{\gamma} \cdot R \Rightarrow \frac{20}{3} = a_{\gamma} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \Rightarrow a_{\gamma} = \frac{4000}{9} \frac{\text{rad}}{s^2} \quad (10)$$

Από τις (4) και (9), με αντικατάσταση έχουμε:

$$N = mg - m \cdot a_{cm} \Rightarrow N = 0,4 \text{ N} \quad (11)$$

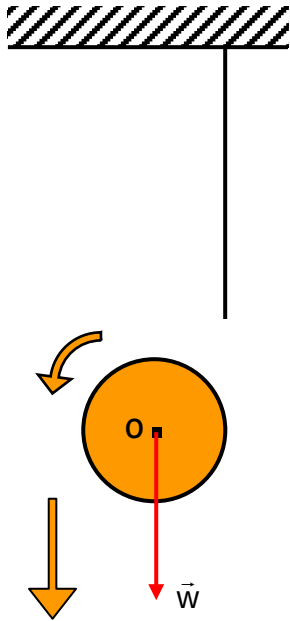
Από τις (3), (10) και (11) έχουμε:

$$N \cdot R = I \cdot a_{\gamma} \Rightarrow I = \frac{N \cdot R}{a_{\gamma}} \Rightarrow I = \frac{0,4 \text{ N} \cdot 1,5 \cdot 10^{-2} \text{ m}}{\frac{4000}{9} \frac{\text{rad}}{s^2}} \Rightarrow I = 13,5 \cdot 10^{-6} \text{ kgm}^2 \quad (12)$$

β) Από τις (1), (10) και (12) έχουμε:

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} = I \cdot a_{\gamma} \Rightarrow \boxed{\frac{dL}{dt} = 6 \cdot 10^{-3} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}} \quad (13)$$

γ) Όταν κοπεί το νήμα, στον κύλινδρο ασκείται, πλέον, μόνο η δύναμη του βάρους, όπως φαίνεται στο σχήμα:



Το βάρος δε μπορεί να ασκήσει ροπή στον κύλινδρο, άρα δε μπορεί να μεταβάλλει τη γωνιακή του ταχύτητα.

Επομένως, ο κύλινδρος θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση:

- ελεύθερη πτώση (ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση ίση με g).
- ομαλή στροφική κίνηση με τη γωνιακή ταχύτητα που είχε αποκτήσει τη στιγμή που κόπηκε το νήμα.

Άρα, μετά την πάροδο χρόνου $0,8 \text{ s}$ από τη στιγμή που κόπηκε το νήμα (όπως και κάθε άλλη στιγμή μετά την κοπή του νήματος), η στροφορμή του κυλίνδρου θα είναι:

$$L = I\omega$$

Με αντικατάσταση των (5) και (12) έχουμε:

$$L = I\omega \Rightarrow L = I \cdot \frac{v_{cm}}{R} \Rightarrow L = 13,5 \cdot 10^{-6} \cdot \frac{2}{1,5 \cdot 10^{-2}} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$L = 13,5 \cdot 10^{-4} \cdot \frac{4}{3} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\boxed{L = 18 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}}$$

δ) Βρίσκουμε τη χρονική εξίσωση της στροφορμής από $t=0$ ως $t_1=0,3$ s:

$$\Sigma\tau = \frac{dL}{dt} = \text{σταθ.} \Rightarrow \Sigma\tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{L-0}{t-0} \Rightarrow L = \Sigma\tau \cdot t$$

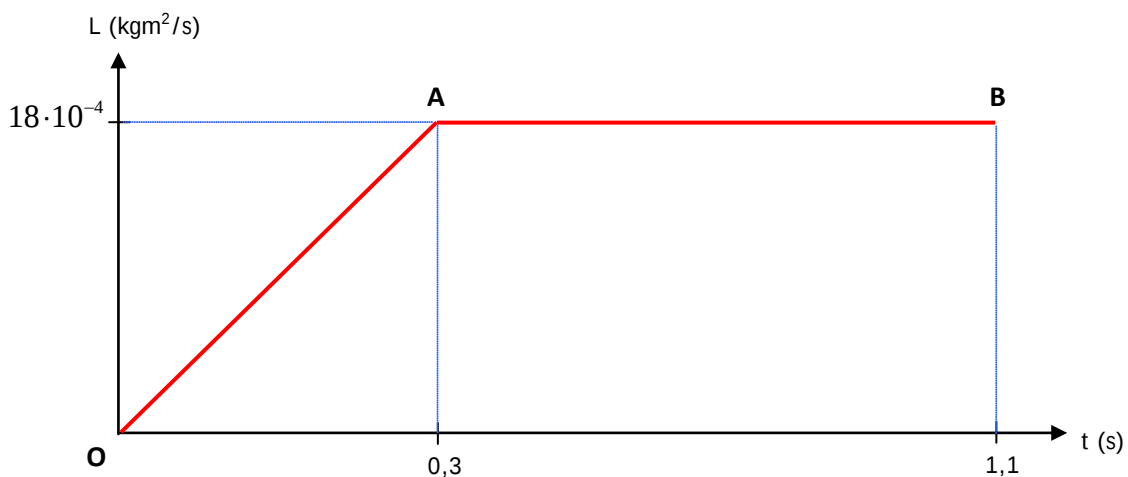
Αντικαθιστώντας την τιμή που βρήκαμε στη (13), έχουμε:

$$L = 6 \cdot 10^{-3} \cdot t \text{ (S.I.)}, \quad 0 \leq t \leq 0,3 \text{ s}$$

η οποία είναι πρώτου βαθμού ως προς t .

$$\text{Θέτοντας } t_1 = 0,3 \text{ s παίρνουμε } L = 18 \cdot 10^{-4} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}.$$

Στη συνέχεια η στροφορμή διατηρείται:



Σχόλια για το διάγραμμα L - t του σχήματος:

- Η κλίση δίνει τη συνολική ροπή $\Sigma\tau = \frac{dL}{dt}$.
- Από $t=0$ ως $t_1=0,3$ s ασκείται σταθερή ροπή, επομένως η γραφική παράσταση θα είναι ευθεία γραμμή, η οποία θα ξεκινά από το σημείο $O(0,0)$ και θα καταλήγει στο σημείο $A(0,3)$.
- Από $t_1=0,3$ s και μέχρι τη στιγμή $t_2=0,3\text{s}+0,8\text{s}=1,1$ s (αλλά και αργότερα), επειδή δεν ασκείται ροπή, η κλίση θα είναι μηδέν και η στροφορμή θα διατηρεί την τιμή της.

Πρόβλημα 2.

Η κυκλική περιστρεφόμενη πλατφόρμα της παιδικής χαράς της γειτονιάς μας έχει ακτίνα $R = 1,5\text{m}$, μάζα $M = 40\text{kg}$ και μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που περνά από το κέντρο της. Στο κέντρο της πλατφόρμας βρίσκεται ένα κορίτσι μάζας $m = 30\text{kg}$ και το σύστημα πλατφόρμα - κορίτσι περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_0 = 2,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$. Κάποια στιγμή το κορίτσι αρχίζει να περπατά προς την περιφέρεια της πλατφόρμας. Να βρείτε:



- α) τη ροπή αδράνειας του συστήματος πλατφόρμα-κορίτσι όταν το κορίτσι βρίσκεται στην περιφέρεια της πλατφόρμας.
- β) τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, όταν το κορίτσι φτάσει στην περιφέρεια της πλατφόρμας.
- γ) την κεντρομόλο δύναμη που δέχεται το κορίτσι όταν φτάσει στην περιφέρεια της πλατφόρμας.
- δ) την ελάχιστη τιμή που πρέπει να έχει ο συντελεστής τριβής μεταξύ δαπέδου και παπουτσιών για να μπορεί το κορίτσι να περιστρέφεται χωρίς να κρατιέται όταν βρίσκεται στην περιφέρεια της πλατφόρμας.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το μέσον της, $I_{\text{cm}} = \frac{MR^2}{2}$. Για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας το κορίτσι να θεωρηθεί υλικό σημείο.

Λύση

α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος πλατφόρμας κοριτσιού, όταν το κορίτσι βρίσκεται στην περιφέρεια της πλατφόρμας, υπολογίζεται ως εξής:

$$I_{\text{συστ}} = I_{\text{πλατφ}} + I_{\text{κορ}} \Rightarrow$$

$$I_{\text{συστ}} = \frac{MR^2}{2} + m \cdot R^2 = \left(\frac{40 \cdot 1,5^2}{2} + 30 \cdot 1,5^2 \right) \text{kg} \cdot \text{m}^2 = (45 + 67,5) \text{kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow$$

$$I_{\text{συστ}} = 112,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2.$$

β) Κατά τη διάρκεια της κίνησης του κοριτσιού οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι το βάρος του κοριτσιού, το βάρος της εξέδρας και η δύναμη στήριξης από τον άξονα περιστροφής. Επειδή καμία από τις δυνάμεις δεν προκαλεί ροπή θα ισχύει η Αρχή Διατήρησης Στροφορμής:

$$L_{\text{αρχ}} = L_{\text{τελ}} \Rightarrow I_{\text{αρχ}} \cdot \omega_0 = I_{\text{τελ}} \cdot \omega \quad (1)$$

Η αρχική ροπή αδράνειας του συστήματος, $I_{\text{αρχ}}$, ισούται με τη ροπή αδράνειας της πλατφόρμας. Το κορίτσι αρχικά δεν προσφέρει στη ροπή αδράνειας του συστήματος, γιατί όλη η μάζα του θεωρούμε ότι βρίσκεται στον άξονα περιστροφής. Άρα ισχύει

$$I_{\text{αρχ}} = I_{\text{πλατφ}} = \frac{MR^2}{2} = \frac{40 \text{ kg} \cdot (1,5 \text{ m})^2}{2} \Rightarrow I_{\text{αρχ}} = 45 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$$

Η τελική ροπή αδράνειας του συστήματος ισούται με τη ροπή αδράνειας που υπολογίσαμε στο ερώτημα α, δηλαδή $I_{\text{τελ}} = I_{\text{συστ}} = 112,5 \text{ kg} \cdot \text{m}^2$.

Λύνουμε τη σχέση (1) ως προς ω και αντικαθιστούμε

$$\omega = \omega_0 \frac{I_{\text{αρχ}}}{I_{\text{τελ}}} = 2,5 \frac{45}{112,5} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

γ) Η κεντρομόλος δύναμη που δέχεται το κορίτσι υπολογίζεται ως εξής:

$$F_{\text{κεν}} = \frac{m \cdot v^2}{R} = \frac{m \cdot (\omega \cdot R)^2}{R} = m \cdot \omega^2 \cdot R$$

$$\text{και αντικαθιστώντας: } F_{\text{κεν}} = 30 \cdot 1^2 \cdot 1,5 \text{ N} \Rightarrow F_{\text{κεν}} = 45 \text{ N}.$$

δ) Την απαραίτητη κεντρομόλο τη δημιουργεί η συνισταμένη των δυνάμεων που ασκούνται στο κορίτσι και είναι κάθετες στη γραμμική του ταχύτητα δηλαδή βρίσκονται πάνω στη διεύθυνση κορίτσι - κέντρο κυκλικής τροχιάς. Η μόνη δύναμη που ασκείται σε αυτή τη διεύθυνση είναι η τριβή που αναπτύσσεται μεταξύ δαπέδου και παπουτσιών της μαθήτριας. Για να μην ολισθήσει η μαθήτρια πρέπει η μέγιστη στατική τριβή που μπορεί να αναπτυχθεί να είναι μεγαλύτερη από τις απαιτήσεις σε κεντρομόλο δύναμη, δηλαδή πρέπει να ισχύει

$$F_{\text{κεντρ}} \leq T_{\text{στατ(max)}} \Rightarrow F_{\text{κεντρ}} \leq \mu N \quad (2)$$

όπου N δηλώνει την κάθετη δύναμη που συμπιέζει τις τριβόμενες επιφάνειες και η οποία όπως γνωρίζουμε από την Α Λυκείου είναι ίση με το βάρος του κοριτσιού, δηλαδή $N = mg = 30 \cdot 10 \text{ N} \Rightarrow N = 300 \text{ N}$.

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) προκύπτει

$$45 \text{ N} \leq \mu 300 \text{ N} \Rightarrow 0,15 \leq \mu$$

Άρα $\mu_{\min} = 0,15$.

Ημερομηνία τροποποίησης: 19/07/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

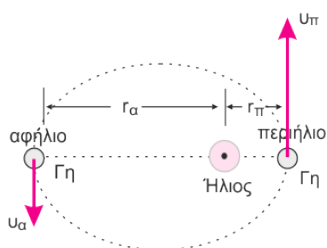
ΕΝΟΤΗΤΑ 4: ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Η Γη στρέφεται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Το κοντινότερο σημείο στον Ήλιο ονομάζεται Περιήλιο (π) και το πιο απομακρυσμένο Αφήλιο (α). Αν θεωρήσουμε τη Γη υλικό σημείο τότε για τις αντίστοιχες αποστάσεις ισχύει $r_{\alpha} = 2r_{\pi}$, τότε:



α) Για τις ταχύτητες διέλευσης της Γης από το αφήλιο και το περιήλιο ισχύει $u_{\alpha} = 2u_{\pi}$.

β) Για τις κινητικές ενέργειες διέλευσης της Γης από το αφήλιο και το περιήλιο ισχύει $K_{\pi} = 4K_{\alpha}$.

Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς.

Λύση

α) Η πρόταση α είναι Λάθος (Λ).

Θεωρούμε τη Γη ως υλικό σημείο που περιστρέφεται γύρω από άξονα που είναι κάθετος στο επίπεδο της τροχιάς της και περνά από το κέντρο του Ήλιου. Η βαρυτική δύναμη που δέχεται η Γη από τον Ήλιο διέρχεται από τον άξονα περιστροφής, οπότε δεν προκαλεί ροπή. Η στροφορμή της Γης δηλαδή παραμένει σταθερή. Έτσι, αν L_{α} είναι η στροφορμή της Γης στο Αφήλιο και L_{π} η στροφορμή της στο Περιήλιο, ισχύει γι αυτήν η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής:

$$L_{\alpha} = L_{\pi} \Rightarrow m \cdot v_{\alpha} \cdot r_{\alpha} = m \cdot v_{\pi} \cdot r_{\pi} \Rightarrow v_{\alpha} \cdot 2r_{\pi} = v_{\pi} \cdot r_{\pi} \Rightarrow v_{\pi} = 2v_{\alpha}$$

Συνεπώς, η πρόταση α είναι Λάθος (Λ).

Β) Η πρόταση Β είναι Σωστή (Σ) .

Για την κινητική ενέργεια της Γης στο περιήλιο ισχύει:

$$K_{\pi} = \frac{1}{2} m \cdot v_{\pi}^2 = \frac{1}{2} m \cdot (2v_{\alpha})^2 = \frac{1}{2} m \cdot 4v_{\alpha}^2 = 4K_{\alpha} \Rightarrow K_{\pi} = 4K_{\alpha}$$

Συνεπώς, η πρόταση Β είναι Σωστή (Σ) .

Ερώτηση 2.

Η Γη, την οποία θεωρούμε ως ομογενή σφαίρα, έχει μάζα M και ακτίνα R και περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της με περίοδο $24h$. Αν η ακτίνα της Γης γίνει, λόγω συστολής, 5% μικρότερη από αυτήν που έχει σήμερα, διατηρώντας τη μάζα της, να βρείτε τη νέα της περίοδο. Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς σφαίρας ως προς άξονα

που διέρχεται από το κέντρο της, $I_{cm} = \frac{2MR^2}{5}$.

Λύση

Η ακτίνα της Γης μετά τη συστολή της θα γίνει:

$$R' = R - 0,05 \cdot R \Rightarrow$$

$$R' = 0,95R$$

Αυτή η συστολή θα προκαλέσει μείωση της ροπής αδράνειας της Γης, η οποία θα γίνει:

$$I' = \frac{2MR'^2}{5}$$

Επειδή δεν έχουμε εξωτερικές ροπές, η στροφορμή της Γης παραμένει σταθερή. Έτσι, γράφουμε:

$$L = L' \Rightarrow I\omega = I'\omega' \Rightarrow \frac{2MR^2}{5} \cdot \frac{2\pi}{T} = \frac{2MR'^2}{5} \cdot \frac{2\pi}{T'} \Rightarrow \frac{R^2}{T} = \frac{R'^2}{T'} \Rightarrow$$

$$T' = \left(\frac{R'}{R}\right)^2 \cdot T \Rightarrow T' = \left(\frac{0,95R}{R}\right)^2 T \Rightarrow$$

$$T' = 0,95^2 T \Rightarrow T' = 21,66h.$$

Ερώτηση 3.

Ένας ομογενής δίσκος στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω_1 . Ένα κομμάτι γύψου μάζας m πέφτει κατακόρυφα και κολλάει στο δίσκο σε απόσταση l από τον άξονα περιστροφής.

- α) Ο γύψος ελάχιστα πριν ακουμπήσει στον δίσκο, έχει ως προς τον άξονα περιστροφής του δίσκου στροφορμή ίση με μηδέν.
- β) Αμέσως μετά την κρούση η στροφορμή του συστήματος δίσκος-γύψος μειώνεται.
- γ) Η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου μειώνεται μετά την κρούση.
- δ) Στην κρούση αυτή δεν ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

Να χαρακτηρίσετε κάθε πρόταση ως Σωστή (Σ) ή Λάθος (Λ) και να αιτιολογήσετε τους χαρακτηρισμούς.

Λύση

α) Η πρόταση α είναι Σωστή (Σ).

Η ταχύτητα του γύψου ελάχιστα πριν αυτός συγκρουστεί με το δίσκο, είναι κατακόρυφη προς τα κάτω, δηλαδή είναι παράλληλη με τον άξονα περιστροφής. Η ορμή του γύψου έχει την κατεύθυνση της ταχύτητας, άρα είναι κι αυτή παράλληλη με τον άξονα περιστροφής. Για να υπάρχει στροφορμή πρέπει το διάνυσμα της ορμής να έχει κάποια συνιστώσα κάθετη στο επίπεδο που ορίζεται από το γύψο και τον άξονα περιστροφής, κάτι που εδώ δεν συμβαίνει, δηλαδή ο γύψος ελάχιστα πριν ακουμπήσει στον δίσκο έχει πράγματι στροφορμή ίση με μηδέν.

Συνεπώς, η πρόταση Α είναι Σωστή (Σ).

β) Η πρόταση β είναι Λάθος (Λ).

Η δύναμη που ασκεί ο γύψος στο δίσκο είναι εσωτερική του συστήματος, άρα δεν προκαλεί μεταβολή στην στροφορμή. Ισχύει δηλαδή η Αρχή Διατήρησης Στροφορμής. Έτσι, η στροφορμή του συστήματος δίσκος-γύψος παραμένει σταθερή μετά την κρούση. Συνεπώς, η πρόταση Β είναι Λάθος (Λ).

γ) Η πρόταση γ είναι Σωστή (Σ).

Σύμφωνα με την Αρχή Διατήρησης Στροφορμής έχουμε:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow$$

$$L_{\delta\acute{\iota}\sigma\kappa\omicron\upsilon} = L_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \Rightarrow$$

$$I_{\delta\acute{\iota}\sigma\kappa\omicron\upsilon} \cdot \omega_0 = I_{\sigma\upsilon\sigma\tau} \cdot \omega$$

Επειδή ισχύει:

$I_{\delta\acute{\iota}\sigma\kappa\omicron\upsilon} < I_{\sigma\upsilon\sigma\tau}$ (λόγω προσθήκης της μάζας του γύψου), θα είναι:

$$\omega_0 > \omega .$$

Συνεπώς, η πρόταση γ είναι Σωστή (Σ) .

δ) Η πρόταση δ είναι Σωστή (Σ) .

Στο σύστημα ασκείται η εξωτερική δύναμη που ασκεί ο άξονας περιστροφής στο δίσκο. Το σύστημα δεν είναι μονωμένο, άρα δεν ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής.

Συνεπώς, η πρόταση δ είναι Σωστή (Σ) .

Ερώτηση 4.

Δυο χορευτές του καλλιτεχνικού πατινάζ πιάνονται αντικριστά με τεντωμένα χέρια και περιστρέφονται. Κάποια στιγμή λυγίζουν τα χέρια τους ώστε τα σώματά τους να πλησιάσουν μεταξύ τους. Ποιό από τα παρακάτω μεγέθη θα αυξηθεί;

α) Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του συστήματος.

β) Η ροπή αδράνειας του συστήματος.

γ) Η στροφορμή του συστήματος.

δ) Η περίοδος περιστροφής.

Να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η α.

Το σύστημα των δύο χορευτών είναι ένα ελεύθερο στερεό το οποίο στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του συστήματος και το οποίο βρίσκεται κάπου μεταξύ των δύο χορευτών.

Όταν λυγίσουν τα χέρια τους θα μικρύνουν οι αποστάσεις των μαζών τους από τον άξονα περιστροφής με συνέπεια να ελαττωθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος.

Οι δυνάμεις που προκάλεσαν τη μείωση της ροπής αδράνειας του συστήματος είναι εσωτερικές. Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούνται στο σύστημα είναι τα βάρη και οι δυνάμεις στήριξης οι οποίες είναι παράλληλες με τον άξονα περιστροφής, οπότε δεν προκαλούν ροπές. Επειδή λοιπόν η συνολική ροπή των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται είναι μηδέν θα ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής για το σύστημα, δηλαδή:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \Rightarrow I_{\alpha\rho\chi} \cdot \omega_{\alpha\rho\chi} = I_{\tau\epsilon\lambda} \omega_{\tau\epsilon\lambda}$$

Επειδή $I_{\alpha\rho\chi} > I_{\tau\epsilon\lambda}$ θα είναι και $\omega_{\alpha\rho\chi} < \omega_{\tau\epsilon\lambda}$

Άρα σωστή πρόταση είναι η α.

Ερώτηση 5.

Ένα σωματίο μάζας m περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα. Αν η απόσταση του σωματίου από τον άξονα διπλασιαστεί, χωρίς να μεταβληθεί η γωνιακή του ταχύτητα, η στροφορμή του ως προς τον άξονα περιστροφής:

- α) διπλασιάζεται.
- β) τετραπλασιάζεται.
- γ) παραμένει σταθερή.
- δ) υποδιπλασιάζεται.

Ποιά είναι η σωστή πρόταση; Να αιτιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Α' τρόπος:

Σωστή πρόταση είναι η β.

Ένα υλικό σημείο που εκτελεί κυκλική τροχιά έχει στροφορμή που βρίσκεται από τη σχέση $L = m \cdot v \cdot r$.

Επίσης η γραμμική ταχύτητα, v και η γωνιακή, ω , συνδέονται με τη σχέση $v = \omega \cdot r$.

Έτσι αν η αρχική ακτίνα είναι r_1 και η τελική r_2 μπορούμε να γράψουμε

$$L_1 = m \cdot v_1 \cdot r_1 = m(\omega \cdot r_1)r_1 \Rightarrow L_1 = m \cdot \omega \cdot r_1^2$$

$$L_2 = m v_2 r_2 = m(\omega r_2)r_2 \Rightarrow L_2 = m \omega r_2^2 \Rightarrow L_2 = m \omega (2r_1)^2 = m \omega r_1^2 \cdot 4$$

Άρα $L_2 = 4L_1$.

Συνεπώς, σωστή πρόταση είναι η β.

Β' Τρόπος:

Σωστή πρόταση είναι η β.

Όταν αλλάξει η απόσταση του σωματίου από τον άξονα περιστροφής, θα αλλάξει και η ροπή αδράνειας του. Σύμφωνα με τη σχέση $I = m \cdot r^2$, βάζοντας $r' = 2r$, παίρνουμε:

$$I' = m \cdot (2r)^2 \Rightarrow$$

$$I' = 4m \cdot r^2 \Rightarrow$$

$$I' = 4I$$

Συνεπώς, η νέα στροφορμή του συστήματος θα γίνει:

$$L' = I' \cdot \omega = 4I \cdot \omega \Rightarrow$$

$$L' = 4L$$

Συνεπώς, σωστή πρόταση είναι η β.

Ερώτηση 6.

Στα άκρα μιας οριζόντιας αβαρούς ράβδου μήκους ℓ βρίσκονται δύο όμοιες μάζες $m_1=m_2=m$. Το σύστημα περιστρέφεται με συχνότητα f_1 γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της ράβδου. Αν λόγω εσωτερικών δυνάμεων υποδιπλασιαστεί η απόσταση κάθε μάζας από τον άξονα περιστροφής, τότε:

- α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος υποδιπλασιάζεται και η στροφορμή του συστήματος υποδιπλασιάζεται.
- β) Η ροπή αδράνειας του συστήματος υποτετραπλασιάζεται και η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.
- γ) Η ροπή αδράνειας του συστήματος παραμένει σταθερή και η στροφορμή του συστήματος υποδιπλασιάζεται.
- δ) Η ροπή αδράνειας του συστήματος υποδιπλασιάζεται και η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση και να δικαιολογήσετε την επιλογή σας.

Λύση

Σωστή πρόταση είναι η β.

Η αρχική ροπή αδράνειας του συστήματος είναι:

$$I = I_p + I_{\sigma\phi,1} + I_{\sigma\phi,2} = 0 + m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 2m \cdot \frac{\ell^2}{4} = m \cdot \frac{\ell^2}{2}$$

(Η ροπή αδράνειας της ράβδου είναι μηδέν γιατί αυτή είναι αβαρής).

Η ροπή αδράνειας του συστήματος μετά την μετακίνηση των σφαιρών γίνεται:

$$I' = I'_{\sigma\phi,1} + I'_{\sigma\phi,2} = m \cdot \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + m \cdot \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = 2m \cdot \frac{\ell^2}{16} = m \cdot \frac{\ell^2}{8}$$

Άρα η ροπή αδράνειας του συστήματος υποτετραπλασιάστηκε.

Επειδή στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές θα ισχύει η Αρχή Διατήρησης Στροφορμής:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda}$$

Δηλαδή, η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή.

Συνεπώς, σωστή πρόταση είναι η β.

ΘΕΜΑ Γ

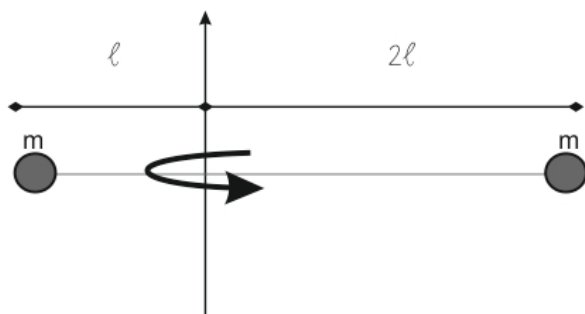
Άσκηση 1.

Δύο σημειακές σφαίρες που η καθεμιά έχει μάζα $m = 0,1\text{kg}$ συνδέονται μεταξύ τους με οριζόντια αβαρή ράβδο. Το σύστημα περιστρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα, ο οποίος τέμνει τη ράβδο σε σημείο που απέχει από τη μία μάζα $\ell = 1\text{m}$ και από την άλλη $\ell' = 2\ell = 2\text{m}$. Το σύστημα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega = 10\text{rad/s}$ αντίθετα από τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

α) Να βρεθεί η ροπή αδράνειας του συστήματος.

β) Να υπολογιστεί η στροφορμή του συστήματος.

γ) Να σχεδιαστεί το διάνυσμα της στροφορμής του συστήματος.



Λύση

α) Η ροπή αδράνειας I του συστήματος ως προς τον άξονα περιστροφής του ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας της ράβδου και των δύο σημειακών σφαιρών. Είναι δηλαδή:

$$I = I_{\text{ραβδ.}} + I_{\text{σφ1}} + I_{\text{σφ2}}$$

Όμως η ροπή αδράνειας της ράβδου είναι μηδέν γιατί αυτή είναι αβαρής, οπότε έχουμε:

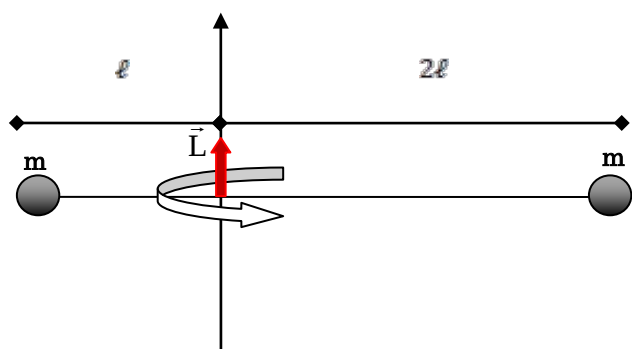
$$I = m \cdot \ell^2 + m \cdot (2\ell)^2 = m \cdot \ell^2 + m \cdot 4\ell^2 = 5m\ell^2 = (5 \cdot 0,1 \cdot 1^2)\text{kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow$$

$$I = 0,5\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

β) Η στροφορμή του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

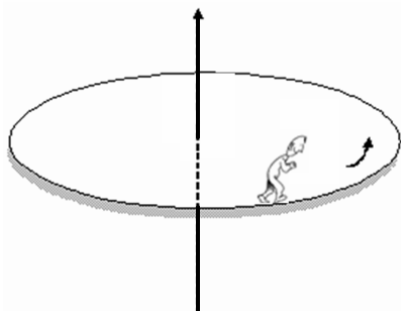
$$L = I\omega = 0,5 \cdot 10 \text{ kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}} = 5\text{kg} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$$

γ) Το διάνυσμά της στροφορμής σχεδιάζεται πάνω στον άξονα περιστροφής και η κατεύθυνσή του βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Άσκηση 2.

Ένας άνθρωπος μάζας $m = 60\text{kg}$ στέκεται ακίνητος στην περιφέρεια ακίνητης οριζόντιας πλατφόρμας μάζας $M = 160\text{kg}$ και ακτίνας $R = 1,5\text{m}$. Η πλατφόρμα μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της. Την στιγμή $t=0$, ο άνθρωπος αρχίζει να περπατά πάνω στην περιφέρεια της πλατφόρμας, με ταχύτητα σταθερού μέτρου, $v = 2\text{m/s}$ ως προς το έδαφος, κινούμενος αντίθετα από τη φορά των δεικτών του ρολογιού.



α) Να βρεθεί το μέτρο και η κατεύθυνση της στροφορμής του ανθρώπου. Να σχεδιαστεί το διάνυσμα της στροφορμής του. Ο άνθρωπος μπορεί να θεωρηθεί σημειακό αντικείμενο.

β) Θα κινηθεί η πλατφόρμα; Αν ναι, με ποια γωνιακή ταχύτητα και προς ποια κατεύθυνση;

γ) Μετά από πόσο χρονικό διάστημα ο άνθρωπος θα ξαναβρεθεί στη θέση της πλατφόρμας από την οποία ξεκίνησε;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς άξονα που είναι κάθετος σ' αυτήν και διέρχεται από το κέντρο της, $I_{\text{cm}} = \frac{MR^2}{2}$.

Λύση

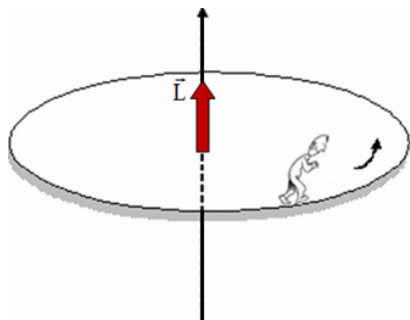
α) Ο άνθρωπος μπορεί να θεωρηθεί σημειακό αντικείμενο, άρα η στροφορμή του θα υπολογιστεί από τη σχέση:

$$L_{\text{ανθρ}} = m \cdot v \cdot R$$

Αντικαθιστώντας βρίσκουμε:

$$L_{\text{ανθρ}} = 60 \cdot 2 \cdot 1,5 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \quad \text{ή} \quad L_{\text{ανθρ}} = 180 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

Το διάνυσμά της στροφορμής του ανθρώπου βρίσκεται πάνω στον άξονα που διέρχεται από το κέντρο της κυκλικής τροχιάς του και έχει κατεύθυνση που βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού όπως φαίνεται στο σχήμα.



β) Επειδή στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές θα ισχύει η Αρχή Διατήρησης Στροφορμής. Έτσι για να διατηρηθεί η ολική στροφορμή του συστήματος μηδέν θα πρέπει η πλατφόρμα να περιστραφεί και μάλιστα σε φορά αντίθετη από αυτή του ανθρώπου. Άρα η πλατφόρμα θα περιστραφεί κατά τη φορά των δεικτών του ρολογιού, με γωνιακή ταχύτητα που υπολογίζεται με εφαρμογή της αρχής διατήρησης της στροφορμής.

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} \quad \text{ή} \quad 0 = \vec{L}_{\text{ανθρ}} + \vec{L}_{\text{πλατφ}} \quad \text{ή} \quad \vec{L}_{\text{πλατφ}} = -\vec{L}_{\text{ανθρ}} \quad \text{ή}$$

$$I_{\text{πλατφ}} \cdot \omega_{\text{πλατφ}} = -180 \frac{\text{Kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} \quad (1)$$

Όμως η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας είναι:

$$I_{\text{πλατφ}} = \frac{MR^2}{2} \quad \text{ή} \quad I_{\text{πλατφ}} = 160 \cdot \frac{1,5^2}{2} \text{Kg} \cdot \text{m}^2 \quad \text{ή} \quad I_{\text{πλατφ}} = 180 \text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

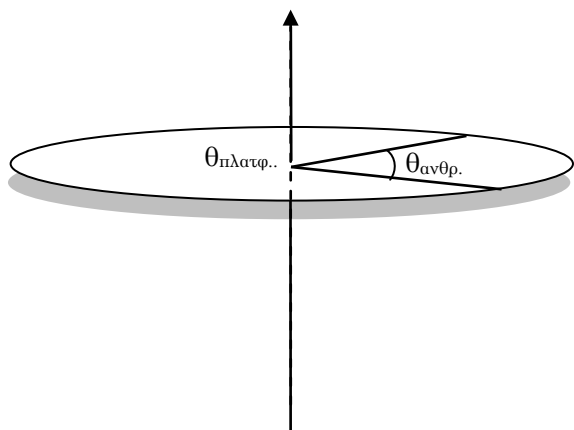
Έτσι, από την (1) παίρνουμε:

$$\omega_{\text{πλατφ}} = -1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

γ) Επειδή η πλατφόρμα στρέφεται αντίθετα από τον άνθρωπο, ο άνθρωπος για να ξαναβρεθεί στο ίδιο σημείο από το οποίο ξεκίνησε δεν χρειάζεται να διαγράψει γωνία 2π αλλά μικρότερη. Αν συμβολίσουμε με $\theta_{\text{ανθρ}}$ τη γωνία που διέγραψε ο άνθρωπος και με $\theta_{\text{πλατφ}}$ τη γωνία που διέγραψε η πλατφόρμα, τότε ισχύει:

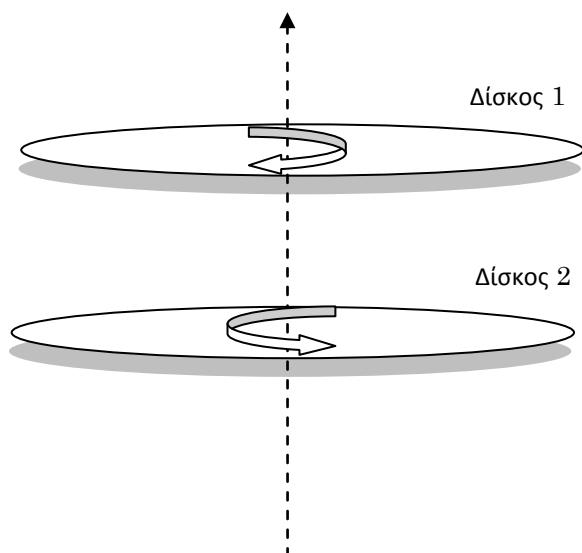
$$\theta_{\text{ανθρ}} + \theta_{\text{πλατφ}} = 2\pi \Rightarrow \omega_{\text{ανθρ}} \cdot \Delta t + \omega_{\text{πλατφ}} \cdot \Delta t = 2\pi \Rightarrow$$

$$\left(\frac{u}{R} + \omega_{\text{πλατφ}} \right) \cdot \Delta t = 2\pi \Rightarrow \Delta t = \frac{2\pi}{\frac{2}{1,5} + 1} \text{s} \Rightarrow \Delta t = \frac{3\pi}{3,5} \text{s}$$



Άσκηση 3.

Οριζόντιος ομογενής δίσκος (1) μάζας $m = 1\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,1\text{m}$, περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_1 = 10\text{ rad/s}$ κατά τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού. Δεύτερος, όμοιος δίσκος (2) περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega_2 = 5\text{ rad/s}$ με φορά αντίθετη από αυτήν της κίνησης των δεικτών του ρολογιού, γύρω από τον ίδιο κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από τα κέντρα και των δύο δίσκων και είναι κάθετος σε αυτούς.



α) Να σχεδιάσετε τις στροφορμές των δύο δίσκων ως προς τον κοινό άξονα περιστροφής και να υπολογίσετε τα μέτρα τους.

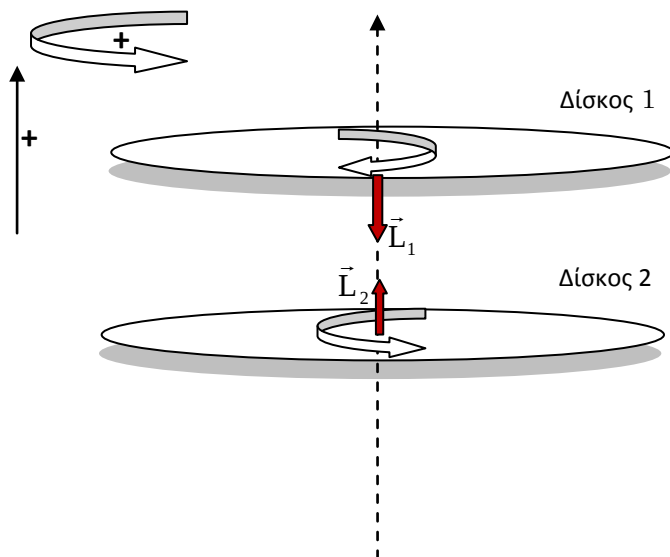
β) Τη χρονική στιγμή $t=0$ ο δίσκος 1 αφήνεται πάνω στο δίσκο 2, οπότε λόγω τριβών οι δύο δίσκοι αποκτούν την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Να υπολογιστεί η κοινή γωνιακή τους ταχύτητα.

γ) Από τη στιγμή που οι δίσκοι έρχονται σε επαφή, μέχρι να αποκτήσουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα πέρασε χρόνος $\Delta t = 0,1\text{s}$. Να υπολογίσετε το μέτρο της σταθερής ροπής της τριβής που ασκήθηκε σε κάθε δίσκο στο χρονικό διάστημα αυτό.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ενός δίσκου ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτόν και διέρχεται από το κέντρο μάζας του, $I_{\text{cm}} = \frac{MR^2}{2}$.

Λύση

α) Τα διανύσματα των στροφορμών των δύο δίσκων σχεδιάζονται πάνω στον κοινό άξονα περιστροφής. Η κατεύθυνση κάθε διανύσματος βρίσκεται με τον κανόνα του δεξιού χεριού, όπως φαίνεται στο σχήμα.



Τα μέτρα των στροφορμών υπολογίζονται ως εξής:

$$L_1 = I_1 \cdot \omega_1 \Rightarrow$$

$$L_1 = \frac{m \cdot R^2}{2} \cdot \omega_1 = \frac{1 \cdot 0,1^2}{2} \cdot 10 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \Rightarrow L_1 = 0,05 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

και

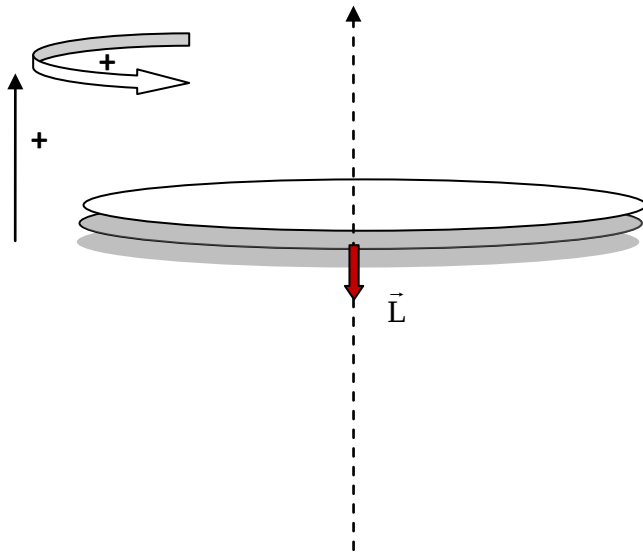
$$L_2 = I_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow$$

$$L_2 = \frac{m \cdot R^2}{2} \cdot \omega_2 = \frac{1 \cdot 0,1^2}{2} \cdot 5 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \Rightarrow L_2 = 0,025 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

β) Επειδή στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές θα ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής, την οποία εφαρμόζουμε για την αρχική και τελική κατάσταση του συστήματος:

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} \Rightarrow \vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_{\text{τελ}} \Rightarrow -I_1 \cdot \omega_1 + I_2 \cdot \omega_2 = 2I_{\text{ολ}} \cdot \omega \Rightarrow -I_1 \cdot \omega_1 + I_1 \cdot \omega_2 = 2I_1 \cdot \omega \Rightarrow$$

$$\omega = \frac{(-\omega_1 + \omega_2)}{2} \Rightarrow \omega = \frac{(-10 + 5)}{2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = -2,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$



Άρα το σύστημα των δύο δίσκων τελικά θα περιστρέφεται με φορά ίδια με αυτήν των δεικτών του ρολογιού και η κατεύθυνση του διανύσματος της στροφορμής του συστήματος είναι αυτή που φαίνεται στο σχήμα.

γ) Μεταξύ των δύο δίσκων αναπτύχθηκε δύναμη τριβής (δράση - αντίδραση) που η ροπή τους προκάλεσε μεταβολή στις στροφορμές των δύο δίσκων. Επειδή η τριβή είναι σταθερή θα δημιουργηθεί σταθερή ροπή σε κάθε δίσκο. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή ξεχωριστά για κάθε δίσκο.

Για τον πρώτο δίσκο:

$$\Sigma \tau_1 = \frac{dL_1}{dt} \Rightarrow \Sigma \tau_1 = \frac{\Delta L_1}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \tau_1 = \frac{L_{1(\text{τελ})} - L_{1(\text{αρχ})}}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \tau_1 = \frac{I_1 (\omega_{1(\text{τελ})} - \omega_{1(\text{αρχ})})}{\Delta t} \quad (1)$$

$$I_1 = \frac{m \cdot R^2}{2} = \frac{1 \cdot 0,1^2}{2} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$\omega_{1(\text{τελ})} = \omega = -2,5 \text{ rad/s} \quad \omega_{1(\text{αρχ})} = -10 \text{ rad/s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (1) παίρνουμε $\Sigma \tau_1 = 0,375 \text{ Nm}$

Για το δεύτερο δίσκο:

$$\Sigma \tau_2 = \frac{dL_2}{dt} \Rightarrow \Sigma \tau_2 = \frac{\Delta L_2}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \tau_2 = \frac{L_{2(\text{τελ})} - L_{2(\text{αρχ})}}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \tau_2 = \frac{I_2 (\omega_{2(\text{τελ})} - \omega_{2(\text{αρχ})})}{\Delta t} \quad (2)$$

$$I_2 = I_1 = 5 \cdot 10^{-3} \text{ kgm}^2$$

$$\omega_{2(\text{τελ})} = \omega = -2,5 \text{ rad/s}$$

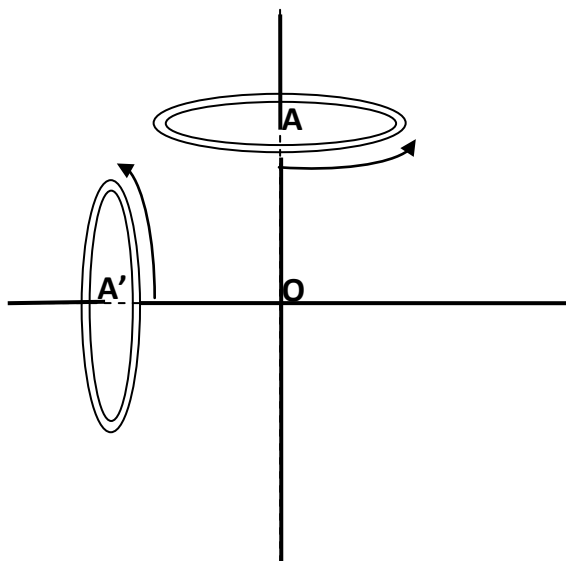
$$\omega_{2(\text{αρχ})} = 5 \text{ rad/s}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε $\Sigma \tau_2 = -0,375 \text{ Nm}$, άρα έχει μέτρο $0,375 \text{ Nm}$

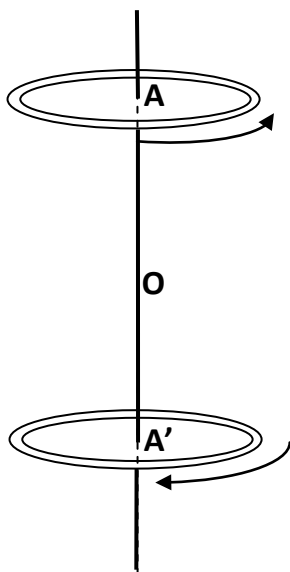
Άσκηση 4.

Ένας τροχός μάζας $m = 2\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,4\text{m}$ στρέφεται σε οριζόντιο επίπεδο με γωνιακή ταχύτητα μέτρου $\omega = 20\text{ rad/sec}$ γύρω από κατακόρυφο άξονα OA που περνάει από το κέντρο του τροχού (βλέπε σχήμα). Ασκώντας στο σημείο A κατάλληλη δύναμη στρέφουμε τον άξονα περιστροφής αρχικά κατά 90° και στη συνέχεια κατά 180° σε σχέση με την αρχική του θέση χωρίς να μεταβάλλουμε το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του τροχού.

α) Να βρείτε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του τροχού για τη γωνία στροφής των 90° .



β) Να βρείτε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του τροχού για τη γωνία στροφής των 180° .



γ) Να σχεδιάσετε και στις δύο περιπτώσεις το διάνυσμα της μέσης ροπής που ασκήθηκε στον τροχό.

δ) Να βρείτε το μέτρο της μέσης ροπής που προκάλεσε την στροφή του άξονα περιστροφής κατά 180° , αν η χρονική διάρκεια της στροφής είναι $\Delta t = 2\text{s}$.

Θεωρούμε ότι όλη η μάζα του τροχού είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του.

Λύση

α) Η ροπή αδράνειας ενός τροχού του οποίου όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρειά του δίνεται από τη σχέση:

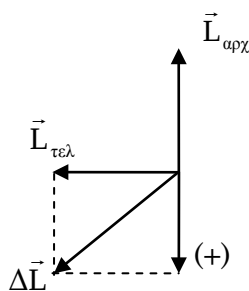
$$I = m \cdot R^2 = 2 \cdot 0,4^2 \text{ Kg m}^2 = 0,32 \text{ kg m}^2$$

Σχόλιο: Αυτόν τον τύπο μπορούμε να τον χρησιμοποιούμε χωρίς απόδειξη.

Η μεταβολή της στροφορμής του τροχού για γωνία περιστροφής 90° θα υπολογιστεί διανυσματικά ως εξής:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}} \Rightarrow \Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} + (-\vec{L}_{\text{αρχ}})$$

Κατασκευάζουμε το σχήμα στο οποίο φαίνονται οι στροφορμές πριν και μετά την περιστροφή, καθώς και η μεταβολή της στροφορμής.



Το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής υπολογίζεται από το Πυθαγόρειο θεώρημα:

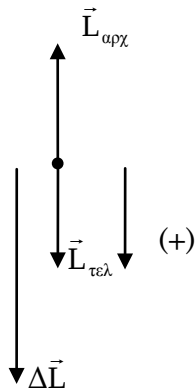
$$\Delta L = \sqrt{L_{\alpha\alpha\chi}^2 + L_{\tau\epsilon\lambda}^2} = \sqrt{L^2 + L^2} = L\sqrt{2} = I \cdot \omega\sqrt{2} = 0,32 \cdot 20\sqrt{2} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \Rightarrow$$

$$\Delta L = 6,4\sqrt{2} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}}$$

β) Η μεταβολή της στροφορμής του τροχού για γωνία περιστροφής 180° θα υπολογιστεί διανυσματικά ως εξής:

$$\Delta \vec{L} = \vec{L}_{\text{τελ}} - \vec{L}_{\text{αρχ}}$$

Κατασκευάζουμε το σχήμα στο οποίο φαίνονται οι στροφορμές πριν και μετά την περιστροφή, καθώς και η μεταβολή της στροφορμής.



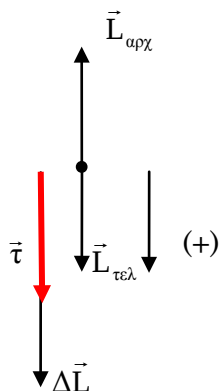
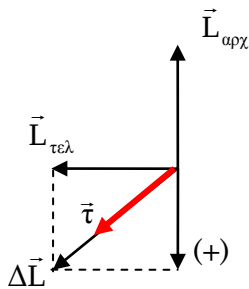
Άρα, για το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής έχουμε :

$$\Delta L = L - (-L) = L + L = 2L = 2I\omega \Rightarrow \Delta L = 2 \cdot 0,32 \cdot 20 \text{ kgm}^2 / \text{s} \Rightarrow$$

$$\Delta L = 12,8 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

γ) Από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση (γενικότερη διατύπωση) έχουμε: $\Sigma \vec{\tau} = \frac{\Delta \vec{L}}{\Delta t}$ ή $\Delta \vec{L} = \Sigma \vec{\tau} \cdot \Delta t$

Από την σχέση αυτή φαίνεται ότι τα $\Sigma \vec{\tau}$ και $\Delta \vec{L}$ είναι συγγραμμικά, δηλαδή τα διανύσματά τους είναι πάντα στην ίδια κατεύθυνση. Το διάνυσμα της μέσης ροπής που ασκήθηκε στον τροχό σε κάθε περίπτωση φαίνεται στα παρακάτω σχήματα.

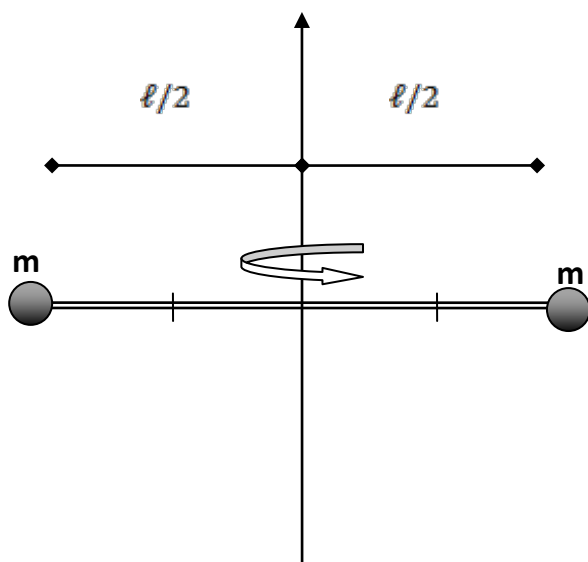


δ) Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή παίρνουμε:

$$\Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{12,8}{2} \text{ Nm} \Rightarrow \Sigma \tau = 6,4 \text{ Nm}$$

Άσκηση 5.

Δύο σημειακές μεταλλικές σφαίρες από σιδηρομαγνητικό υλικό, που η καθεμιά έχει μάζα $m = 0,05\text{kg}$ είναι τοποθετημένες σε μια πλαστική κούφια αβαρή ράβδο, μήκους $\ell = 1\text{m}$ με τέτοιο τρόπο ώστε να μπορούν να κινούνται χωρίς τριβές πάνω σε αυτή. Στο μέσον της ράβδου και εσωτερικά είναι τοποθετημένος ένας αβαρής ηλεκτρομαγνήτης τον οποίο μπορούμε να ενεργοποιούμε από απόσταση. Το σύστημα μπορεί να στρέφεται στο οριζόντιο επίπεδο γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο της ράβδου. Αρχικά ο ηλεκτρομαγνήτης είναι απενεργοποιημένος, το σύστημα στρέφεται με συχνότητα $f = \frac{10}{\pi}\text{Hz}$ και οι σφαίρες βρίσκονται στα άκρα της ράβδου συγκρατούμενες με λεπτό αβαρές νήμα που διατρέχει την κούφια ράβδο. Ενεργοποιούμε τον ηλεκτρομαγνήτη οπότε οι σφαίρες μετακινούνται ταυτόχρονα και πλησιάζουν σε απόσταση $\frac{\ell}{4}$ η καθεμιά από το μέσον της ράβδου Ο, όπου και σταματούν με τη βοήθεια κατάλληλου μηχανισμού.



- α) Να υπολογιστεί η αρχική ροπή αδράνειας του συστήματος.
- β) Να υπολογιστεί η αρχική στροφορμή του συστήματος.
- γ) Να υπολογιστεί η νέα συχνότητα περιστροφής του συστήματος.
- δ) Πόσο τοις εκατό θα μεταβληθεί η συχνότητα περιστροφής του συστήματος μετά τη μετακίνηση των σφαιρών;

Λύση

α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος ισούται με το άθροισμα των ροπών αδράνειας της ράβδου και των δύο σημειακών σφαιρών. Είναι δηλαδή:

$$I = I_{\text{ραβδ}} + I_{\text{σφ1}} + I_{\text{σφ2}} = 0 + m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 + m \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = 2m \cdot \frac{\ell^2}{4} = 2 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{4} \text{kgm}^2 \text{ ή}$$

$$I = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{kgm}^2$$

β) Η στροφορμή του συστήματος δίνεται από τη σχέση:

$$L = I\omega = I \cdot 2\pi f = 0,025 \cdot 2\pi \frac{10 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}{\pi \text{ s}} \Rightarrow L = 0,5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}}$$

γ) Η ροπή αδράνειας του συστήματος μετά την μετακίνηση των σφαιρών γίνεται:

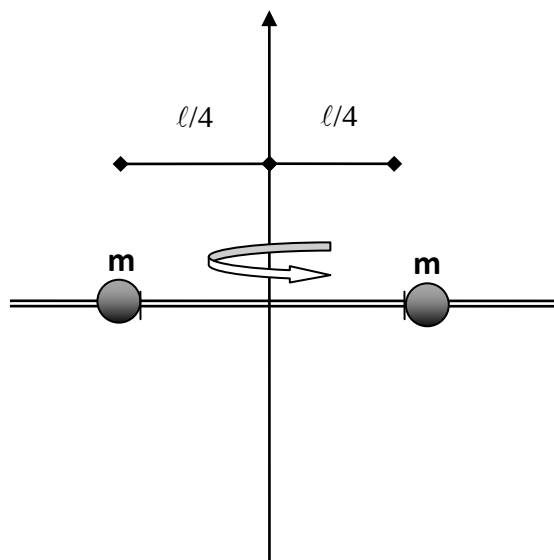
$$I' = I'_{\sigma\phi 1} + I'_{\sigma\phi 2} = m \cdot \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 + m \cdot \left(\frac{\ell}{4}\right)^2 = 2m \cdot \frac{\ell^2}{16} = 2 \cdot 0,05 \cdot \frac{1}{16} \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ ή}$$

$$I' = 0,625 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$$

Επειδή στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές θα ισχύει η Αρχή Διατήρησης Στροφορμής:

$$L_{\alpha\rho\chi} = L_{\tau\epsilon\lambda} \text{ ή } L_{\alpha\rho\chi} = I' \cdot \omega' \text{ ή } 0,5 \frac{\text{kg} \cdot \text{m}^2}{\text{s}} = 0,625 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2 \cdot \omega' \text{ ή } \omega' = 80 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

$$f' = \frac{\omega'}{2\pi} = \frac{80}{2\pi} \text{ Hz} \text{ ή } f' = \frac{40}{\pi} \text{ Hz} .$$



δ) Η επί τοις εκατό μεταβολή της συχνότητας περιστροφής του συστήματος μετά τη μετακίνηση των σφαιρών θα είναι:

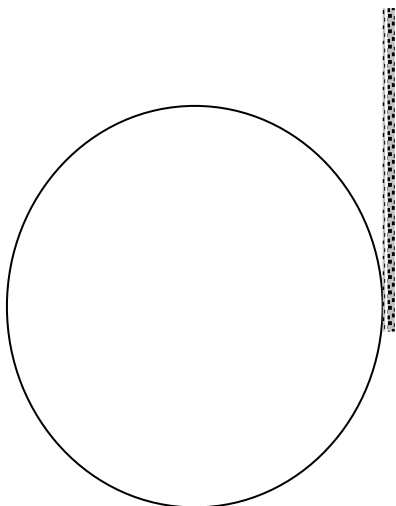
$$\Delta f \% = \frac{f_{\tau\epsilon\lambda} - f_{\alpha\rho\chi}}{f_{\alpha\rho\chi}} 100\% = \frac{\frac{40}{\pi} - \frac{10}{\pi}}{\frac{10}{\pi}} 100\% = 3 \cdot 100\% \Rightarrow$$

$$\Delta f \% = 300\%$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Ένα γιο-γιο αποτελείται από κύλινδρο μάζας $m = 0,1\text{kg}$ και ακτίνας $R = \frac{1}{15}\text{m}$, γύρω από τον οποίο είναι τυλιγμένο αβαρές νήμα. Κρατάμε ακίνητο το ελεύθερο άκρο του νήματος και αφήνουμε τον κύλινδρο να πέσει. Αυτός εκτελεί σύνθετη κίνηση κινούμενος κατακόρυφα χωρίς να ολισθαίνει.



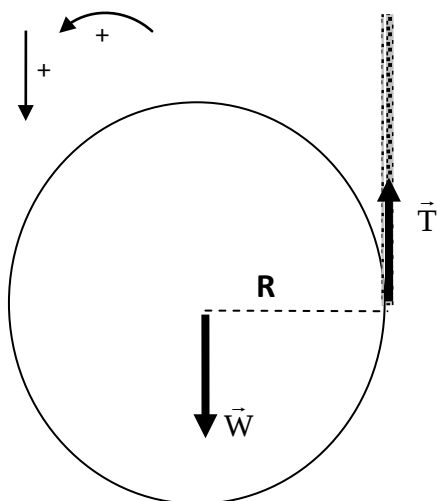
Να βρείτε:

- α) τη γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου καθώς κατέρχεται.
- β) το ρυθμό αύξησης της στροφορμής του κυλίνδρου καθώς κατέρχεται
- γ) την στροφορμή του κυλίνδρου όταν έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $\ell = 30\text{cm}$.
- δ) την ταχύτητα του χαμηλότερου σημείου του δίσκου, τη στιγμή που έχει ξετυλιχτεί νήμα μήκους $\ell = 30\text{cm}$.

Δίνεται η ροπή αδράνειας ομογενούς κυλίνδρου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του, $I_{\text{cm}} = \frac{MR^2}{2}$ και $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Λύση

- α) Οι δυνάμεις που ασκούνται στο γιο-γιο είναι το βάρος του w και η τάση του νήματος, T .



Ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση γράφεται:

$$\Sigma F = m \cdot a_{cm} \quad \text{ή} \quad w - T = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

Το γιο γιο περιστρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του, οπότε η μόνη δύναμη που προκαλεί ροπή είναι η τάση του νήματος και ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση γράφεται:

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{γων} \Rightarrow T \cdot R = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot a_{γων} \Rightarrow T = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R \cdot a_{γων} \quad (2)$$

Η σχέση που συνδέει τη μεταφορική επιτάχυνση a_{cm} του κέντρου μάζας με τη γωνιακή επιτάχυνση $a_{γων}$ βρίσκεται ως εξής:

Όταν το κέντρο μάζας του γιο-γιο κατέβει κατά Δy θα ξετυλιχτεί νήμα μήκους $\Delta \ell$, για το οποίο ισχύει: $\Delta y = \Delta \ell \Rightarrow \Delta y = \Delta \theta \cdot R$. Διαιρώντας με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα

$$\Delta t \text{ παίρνουμε: } \frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta \theta}{\Delta t} \cdot R \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R$$

Παίρνοντας ρυθμούς μεταβολής και των δύο μερών της ισότητας καταλήγουμε στη σχέση:

$$a_{cm} = a_{γων} \cdot R \quad (3)$$

Από την (1) με τη βοήθεια των (2) και (3) παίρνουμε

$$m \cdot g - \frac{1}{2} \cdot m \cdot R \cdot a_{γων} = m \cdot a_{γων} \cdot R \Rightarrow a_{γων} = \frac{2g}{3R} \Rightarrow a_{γων} = \frac{2 \cdot 10 \text{ rad}}{3 \cdot \frac{1}{15} \text{ s}^2} \Rightarrow a_{γων} = 100 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

β) Από τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση στη γενικευμένη του μορφή παίρνουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \quad \text{και επειδή } \tau = \text{σταθερό παίρνουμε:}$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau = T \cdot R = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R \cdot a_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow$$

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{1}{2} \cdot 0,1 \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^2 \cdot 100 \text{ Nm} \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{1}{45} \text{ Nm}$$

γ) Από την τελευταία σχέση παίρνουμε:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = \frac{1}{45} \text{ (S.I.)} \Rightarrow L - L_0 = \frac{1}{45} (t - t_0) \text{ (S.I.)} \Rightarrow L = \frac{1}{45} t \text{ (S.I.)} \quad (4)$$

Αρκεί να βρούμε το χρονικό διάστημα που απαιτείται για να ξετυλιχτεί νήμα μήκους $\ell = 30 \text{ cm}$.

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου, η οποία είναι ομαλά επιταχυνόμενη χωρίς αρχική ταχύτητα, ισχύουν οι σχέσεις:

$$v_{\text{cm}} = \alpha_{\text{cm}} \cdot t \quad (5)$$

$$\text{και } y = \ell = \frac{\alpha_{\text{cm}} \cdot t^2}{2} \quad (6)$$

Από τη σχέση (3) με αντικατάσταση παίρνουμε $\alpha_{\text{cm}} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R = \frac{20 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}$

Με αντικατάσταση στη σχέση (6) των ℓ και α_{cm} παίρνουμε $t = 0,3 \text{ s}$

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) και $t = 0,3 \text{ s}$ παίρνουμε $L = \frac{1}{150} \text{ kgm}^2 / \text{s}$

δ) Το χαμηλότερο σημείο του δίσκου (σημείο Γ) έχει δύο ταχύτητες, τη μεταφορική του κέντρου μάζας v_{cm} και τη γραμμική λόγω περιστροφής $\omega \cdot R = v$.

Οι δύο ταχύτητες έχουν ίσα μέτρα $v = v_{\text{cm}}$.

Το μέτρο της v_{cm} βρίσκεται με αντικατάσταση στη σχέση (5), του χρόνου καθόδου ($t = 0,3 \text{ s}$) και της μεταφορικής επιτάχυνσης ($\alpha_{\text{cm}} = \frac{20 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}$)

$$\text{Προκύπτει } v_{\text{cm}} = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}.$$

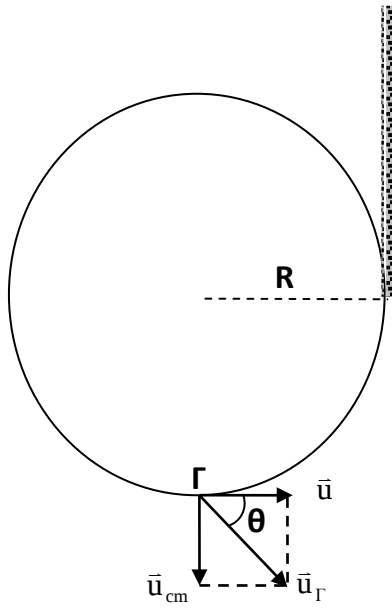
Συνθέτουμε τις δύο ταχύτητες, όπως στο σχήμα. Για το μέτρο της ταχύτητας του σημείου Γ εφαρμόζουμε το Πυθαγόρειο θεώρημα και έχουμε:

$$v_{\Gamma} = \sqrt{v_{\text{cm}}^2 + v^2} = \sqrt{v^2 + v^2} = v\sqrt{2} \Rightarrow$$

$$v_{\Gamma} = 2\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η διεύθυνση της ταχύτητας υπολογίζεται ως εξής:

$$\varepsilon\varphi\theta = \frac{v_{cm}}{v} = 1, \text{ άρα } \theta = 45^0$$



Πρόβλημα 2.

Συμπαγής και ομογενής τροχός μάζας $m=10\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,2\text{m}$ κυλίζει ανερχόμενος κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου γωνίας κλίσης $\varphi=30^\circ$. Την χρονική στιγμή $t=0$ το κέντρο μάζας του τροχού έχει ταχύτητα μέτρου $v=10\text{m/s}$. Να υπολογίσετε:

α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας και το μέτρο της στροφορμής του τροχού τη χρονική στιγμή $t=0$.

β) την επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού καθώς ανέρχεται.

γ) το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής του τροχού καθώς ανέρχεται.

δ) την ταχύτητα του κέντρου μάζας του τροχού, όταν αυτός ανερχόμενος έχει διαγράψει $N = \frac{54}{4\pi}$ περιστροφές.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του τροχού ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτόν και διέρχεται από το κέντρο μάζας του, $I_{\text{cm}} = \frac{MR^2}{2}$ και $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

Λύση

$$\alpha) \text{ Ισχύει } v = \omega \cdot R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} = \frac{10}{0,2} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

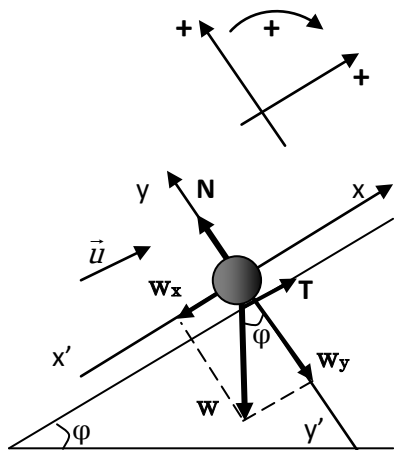
Η στροφορμή δίνεται από την σχέση:

$$L = I \cdot \omega = m \cdot \left(\frac{R^2}{2}\right) \cdot \omega = 10 \cdot \left(\frac{0,2^2}{2}\right) \cdot 50 \frac{\text{Kgm}^2}{\text{s}} = 10 \frac{\text{Kgm}^2}{\text{s}}$$

β) Η μεταφορική επιτάχυνση του τροχού θα προκύψει από το συνδυασμό των σχέσεων που προκύπτουν από την εφαρμογή του θεμελιώδη νόμου της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση, για τη στροφική κίνηση και της σχέσης που συνδέει τη μεταφορική με τη γωνιακή επιτάχυνση.

Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα.

Παίρνουμε ως θετικές φορές τις φορές των αρχικών ταχυτήτων (μεταφορικής και γωνιακής).



Ο θεμελιώδης νόμος της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση δίνει

$$\Sigma F = m \cdot a_{cm} \Rightarrow -mg \cdot \eta\mu\phi + T = m \cdot a_{cm} \quad (1)$$

όπου $mg \cdot \eta\mu\phi$ η συνιστώσα του βάρους του τροχού στον άξονα $x'x$, T η στατική τριβή και a_{cm} η επιτάχυνση του κέντρου μάζας του τροχού.

Επίσης ισχύει:

$$a_{cm} = a_{γων} \cdot R \quad (2)$$

Η μόνη δύναμη που προκαλεί ροπή είναι η στατική τριβή. Έτσι, από το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση και με την βοήθεια της (2), παίρνουμε:

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{γων} \Rightarrow -T \cdot R = \frac{1}{2} \cdot m \cdot R^2 \cdot \frac{a_{cm}}{R} \Rightarrow T = -\frac{1}{2} m a_{cm} \quad (3)$$

Από την (1) με τη βοήθεια της (3) παίρνουμε:

$$-m \cdot g \cdot \eta\mu\phi - \frac{1}{2} \cdot m \cdot a_{cm} = m \cdot a_{cm} \Rightarrow a_{cm} = \frac{-g \cdot \eta\mu\phi}{1 + \frac{1}{2}} \Rightarrow$$

$$a_{cm} = \frac{-10 \cdot 0,5 \text{ m}}{\frac{3}{2} \text{ s}^2} \Rightarrow a_{cm} = \frac{-5 \text{ m}}{1,5 \text{ s}^2} \Rightarrow a_{cm} = -\frac{10 \text{ m}}{3 \text{ s}^2}$$

γ) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής του τροχού είναι:

$$\Sigma \tau = \frac{dL}{dt} \Rightarrow \text{επειδή } \tau = \text{σταθερό} \Rightarrow \Sigma \tau = \frac{\Delta L}{\Delta t} \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = -T \cdot R \quad (4)$$

Η στατική τριβή υπολογίζεται από τη σχέση (3):

$$T = -\frac{1}{2} \cdot 10 \cdot \left(-\frac{10}{3}\right) \text{ N} \Rightarrow T = \frac{50}{3} \text{ N}$$

Έτσι, από τη σχέση (4) παίρνουμε:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = -\frac{50}{3} \cdot 0,2 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = -\frac{10}{3} \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

δ) Για την κίνηση του κέντρου μάζας ισχύουν οι σχέσεις της ευθύγραμμης ομαλά μεταβαλλόμενης κίνησης:

$$v = v_0 + \alpha_{\text{cm}} t \quad (5)$$

$$\text{και } s = v_0 t + \frac{\alpha_{\text{cm}} t^2}{2} \quad (6)$$

$$\text{Όμως } s = R \cdot \theta = R \cdot N \cdot 2\pi = 0,2 \left(\frac{54}{4\pi}\right) \cdot 2\pi \text{ m} \Rightarrow s = 5,4\text{m}$$

Με αντικατάσταση των α_{cm} και s στην (6) βρίσκουμε:

$$(6) \Rightarrow 5,4 = 10 \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \frac{10}{3} \cdot t^2 \Rightarrow 10 \cdot t^2 - 60 \cdot t + 32,4 = 0$$

Από τη λύση της δευτεροβάθμιας προκύπτουν για το χρόνο οι τιμές $t_1 = 0,6\text{s}$ και $t_2 = 5,4\text{s}$. Αποδεκτή τιμή είναι $t_1 = 0,6\text{s}$. Η $t_2 = 5,4\text{s}$ δηλώνει τη χρονική στιγμή που ο τροχός θα ξαναπεράσει από το ίδιο σημείο κατερχόμενος.

Αντικαθιστώντας τη χρονική στιγμή $t_1 = 0,6\text{s}$ στην (5) βρίσκουμε:

$$v = \left(10 - \frac{10}{3} \cdot 0,6\right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v = 8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Πρόβλημα 3.

Η κυκλική εξέδρα μιας παιδικής χαράς έχει ακτίνα $R = 1\text{m}$, μάζα $M = 80\text{kg}$, είναι ακίνητη και μπορεί να στρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Ένα αγόρι μάζας $m = 20\text{kg}$ ενώ τρέχει στο έδαφος γύρω γύρω έξω από την εξέδρα με ταχύτητα μέτρου $v = 3\text{ m/s}$, ξαφνικά πηδάει στην περιφέρεια της εξέδρας και μένει εκεί χωρίς να ολισθήσει. Να βρείτε:

α) τη γωνιακή ταχύτητα του συστήματος, όταν το αγόρι ανέβει στην περιφέρεια της εξέδρας.

β) τη δύναμη της στατικής τριβής που ασκείται στο αγόρι, αν στέκεται στη περιφέρεια της εξέδρας χωρίς να κρατιέται από τα στηρίγματα.

γ) τη σταθερή εξωτερική δύναμη που πρέπει να ασκήσουμε εφαπτομενικά στην εξέδρα, ώστε αυτή να σταματήσει να περιστρέφεται μετά από χρόνο $t = 3\text{s}$.

δ) πόσες περιστροφές έκανε η εξέδρα στο χρονικό διάστημα των 3s .

Δίνεται η ροπή αδράνειας της πλατφόρμας ως προς άξονα που είναι κάθετος σ' αυτήν και διέρχεται από το κέντρο μάζας της, $I_{\text{cm}} = \frac{MR^2}{2}$.

Λύση

α) Οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ αγοριού και πλατφόρμας είναι εσωτερικές, οπότε και οι ασκούμενες ροπές είναι εσωτερικές, άρα ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής:

$$\vec{L}_{\text{αρχ}} = \vec{L}_{\text{τελ}} \Rightarrow \vec{L}_{\text{παιδ}} = \vec{L}_{\text{συστ}} \Rightarrow m \cdot v \cdot R = I_{\text{συστ}} \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{m \cdot v \cdot R}{I_{\text{συστ}}} \quad (1)$$

Η ροπή αδράνειας του συστήματος είναι:

$$I_{\text{συστ}} = I_{\text{cm}} + I_{\text{παιδ}} = \frac{1}{2} M \cdot R^2 + m \cdot R^2 = \left(\frac{1}{2} 80 \cdot 1^2 + 20 \cdot 1^2 \right) \text{kgm}^2 \quad \text{ή} \quad I_{\text{συστ}} = 60 \text{Kgm}^2$$

Έτσι, από την (1) παίρνουμε:

$$\omega = \frac{20 \cdot 3 \cdot 1 \text{ rad}}{60 \text{ s}} \Rightarrow \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) Το αγόρι εκτελεί κυκλική κίνηση, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων που δέχεται και είναι κάθετη στη γραμμική του ταχύτητα (ταχύτητα λόγω περιστροφής) παίζει το ρόλο της κεντρομόλου δύναμης. Η μόνη οριζόντια δύναμη που μπορεί να ασκηθεί στο αγόρι είναι η στατική τριβή από το δάπεδο. Άρα για να βρούμε τη στατική τριβή αρκεί να υπολογίσουμε την κεντρομόλο δύναμη που δέχεται το αγόρι.

$$T_{\text{στ}} = F_{\text{κεντρ}} = m\omega^2 R \Rightarrow T_{\text{στ}} = 20 \cdot 1^2 \cdot 1 \text{N} \Rightarrow T_{\text{στ}} = 20 \text{N}$$

γ) Από το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης στη γενικευμένη του μορφή παίρνουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau \Rightarrow F \cdot R = \frac{0 - L}{\Delta t} \Rightarrow F = \frac{-I_{\text{συστ}} \cdot \omega}{R \cdot \Delta t} = \frac{-60 \cdot 1}{1 \cdot 3} \text{ N} \Rightarrow F = -20 \text{ N}$$

δ) Σε πλήρη αντιστοιχία με τις σχέσεις που ισχύουν στην ευθύγραμμη ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση, μπορούμε να γράψουμε για την ομαλά μεταβαλλόμενη στροφική κίνηση τις σχέσεις:

$$\omega = \omega_0 + a_{\gamma\omega\nu} \cdot t \quad (2)$$

$$\theta = \omega_0 t + \frac{1}{2} a_{\gamma\omega\nu} \cdot t^2 \quad (3)$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) υπολογίζουμε την γωνιακή επιτάχυνση του συστήματος

$$0 = 1 + a_{\gamma\omega\nu} \cdot 3 \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = -\frac{1}{3} \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (3) υπολογίζουμε τη γωνία στροφής του συστήματος μέχρι να σταματήσει.

$$\theta = 1 \cdot 3 + \frac{1}{2} \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) \cdot 3^2 \text{ rad} \Rightarrow \theta = 1,5 \text{ rad}$$

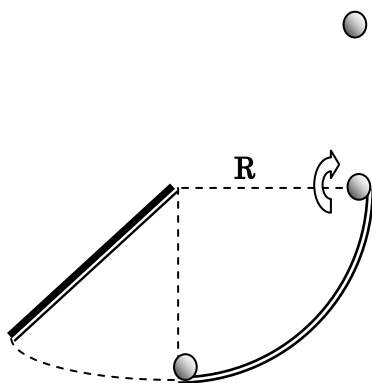
Δηλαδή το σύστημα θα σταματήσει αφού διαγράψει συνολική γωνία στροφής 1,5rad.

Έτσι, ο αριθμός των περιστροφών του συστήματος μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του είναι:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{1,5}{2\pi} \text{ περιστροφές} \Rightarrow N = \frac{0,75}{\pi} \text{ περιστροφές.}$$

Πρόβλημα 4.

Μια κατακόρυφη ράβδος μάζας $M = 3\text{kg}$ και μήκους $\ell = 1\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται στο κατακόρυφο επίπεδο γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το πάνω άκρο της και είναι κάθετος σε αυτή. Εκτρέπουμε τη ράβδο από τη θέση ισορροπίας της και την αφήνουμε ελεύθερη. Τη στιγμή που περνάει από την κατακόρυφη θέση, το κάτω άκρο της συγκρούεται με σφαίρα ακτίνας $r = 0,1\text{m}$ και μάζας $m = 1\text{kg}$ που βρίσκεται ακίνητη στο κατώτατο σημείο τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R = 1\text{m}$, του οποίου το κέντρο συμπίπτει με το σημείο εξάρτησης της ράβδου. Το κάτω άκρο της ράβδου την στιγμή της κρούσης έχει ταχύτητα $v_1 = 5\text{ m/s}$. Αμέσως μετά την κρούση η ράβδος ακινητοποιείται.



Η σφαίρα ανέρχεται στο τεταρτοκύκλιο στην αρχή ολισθαίνοντας και μετά κυλιόμενη. Τελικά εγκαταλείπει το ανώτερο άκρο του τεταρτοκυκλίου με γωνιακή ταχύτητα $\omega_3 = 8\text{ rad/s}$. Να βρεθούν:

- α) η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.
- β) η ταχύτητα v_2 της σφαίρας αμέσως μετά την κρούση.
- γ) το ύψος h , πάνω από το τεταρτοκύκλιο, στο οποίο θα φτάσει η σφαίρα.
- δ) η γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας στο ανώτατο σημείο της τροχιάς της.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος σ' αυτήν και διέρχεται από το κέντρο μάζας της, $I_{\text{cm}} = \frac{M\ell^2}{12}$ και $g = 10\text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Εφαρμόζουμε το θεώρημα των παραλλήλων αξόνων (θεώρημα Steiner) για να υπολογίσουμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.

$$I_p = I_{\text{cm}} + M \cdot d^2 = \frac{1}{12} M \cdot \ell^2 + M \cdot \left(\frac{\ell}{2}\right)^2 = \frac{1}{3} M \cdot \ell^2 = \frac{1}{3} 3 \cdot 1^2 \text{kgm}^2 \Rightarrow$$

$$I_p = 1 \text{kgm}^2$$

β) Στην κρούση ισχύει η Αρχή Διατήρησης Στροφορμής:

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow I_p \cdot \omega = m \cdot v_2 \cdot \ell \Rightarrow \frac{1}{3} M \cdot \ell^2 \cdot \frac{v_1}{\ell} = m \cdot v_2 \cdot \ell \Rightarrow$$

$$v_2 = \frac{M \cdot v_1}{3 \cdot m} = \frac{3 \cdot 5 \text{ m}}{3 \cdot 1 \text{ s}} \Rightarrow v_2 = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Η ταχύτητα της σφαίρας στο ανώτατο σημείο του τεταρτοκυκλίου είναι:

$$v_3 = \omega_3 \cdot r = 8 \cdot 0,1 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_3 = 0,8 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Όταν η σφαίρα φτάσει στο ανώτατο σημείο της τροχιάς της δεν θα έχει μεταφορική ταχύτητα. Στη διάρκεια της ανόδου η μόνη δύναμη που της ασκείται είναι το βάρος της, άρα η επιτάχυνση που δέχεται ισούται με την επιτάχυνση της βαρύτητας (g).

Έτσι, για την επιβραδυνόμενη κίνηση της κατακόρυφης ανόδου της σφαίρας θα ισχύει:

$$v = v_3 - gt \Rightarrow v_3 = gt_{av} \Rightarrow t_{av} = \frac{v_3}{g} = \frac{0,8}{10} \text{ s} \Rightarrow t_{av} = 0,08 \text{ s}$$

Άρα το ζητούμενο ύψος θα είναι:

$$h = v_3 t - \frac{1}{2} g t^2 = \left(0,8 \cdot 0,08 - \frac{1}{2} 10 \cdot 0,08^2 \right) \text{ m} = (0,064 - 0,032) \text{ m} = 0,032 \text{ m}$$

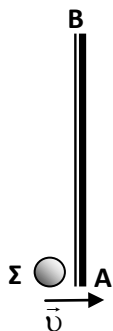
$$h = 3,2 \text{ cm}$$

δ) Η μόνη δύναμη που ασκείται στη σφαίρα στη διάρκεια της κατακόρυφης ανόδου της (μετά την εγκατάλειψη του τεταρτοκυκλίου) είναι το βάρος της, το οποίο ασκείται στο κέντρο μάζας της. Δηλαδή η σφαίρα δεν δέχεται ροπές, έτσι η στροφορμή της και η γωνιακή της ταχύτητα διατηρούνται σταθερές. Άρα η γωνιακή της ταχύτητα στο ανώτατο σημείο της τροχιάς της είναι ίση με $\omega_3 = 8 \text{ rad / s}$.

Πρόβλημα 5.

Μια ξύλινη ράβδος μήκους $\ell = 0,4\text{m}$ και μάζας $M = 0,04\text{kg}$ ισορροπεί ελεύθερη σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Ένα σώμα Σ μάζας $m = 0,01\text{kg}$ που κινείται οριζόντια με ταχύτητα $v = 4\text{ m/s}$ χτυπά κάθετα στο άκρο A της ράβδου. Μετά την κρούση το σώμα Σ ακινητοποιείται. Αν γνωρίζουμε ότι το σώμα Σ ως προς το κέντρο μάζας της ράβδου έχει στροφορμή που βρίσκεται από τη σχέση $L = \frac{mv\ell}{2}$, να βρείτε:

- α) την ταχύτητα του κέντρου μάζας της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.
- β) τον άξονα γύρω από τον οποίο θα περιστραφεί η ράβδος και τη γωνιακή ταχύτητα που θα αποκτήσει.
- γ) τον αριθμό των περιστροφών που θα εκτελέσει η ράβδος στο χρονικό διάστημα που απαιτείται για να μετατοπιστεί το κέντρο μάζας της κατά 1m .
- δ) Την ταχύτητα του πάνω άκρου της ράβδου (B), όταν αυτή θα έχει συμπληρώσει $1,5$ περιστροφές.



Δίνεται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το κέντρο μάζας της, $I_{\text{cm}} = \frac{M\ell^2}{12}$.

Λύση

α) Η ράβδος είναι ένα ελεύθερο στερεό. Επειδή το σύστημα ράβδος-σώμα δεν δέχεται εξωτερικές δυνάμεις ισχύει η Αρχή Διατήρησης της Ορμής για το σύστημα:

$$\vec{p}_{\text{πριν}} = \vec{p}_{\text{μετά}} \Rightarrow m \cdot v = M \cdot v_{\text{cm}} \Rightarrow 0,01 \cdot 4 = 0,04 \cdot v_{\text{cm}} \Rightarrow v_{\text{cm}} = 1\text{m/s}$$

β) Η ράβδος είναι ένα ελεύθερο στερεό που δέχτηκε δύναμη (από το σώμα) η οποία δε διέρχεται από το κέντρο μάζας της. Άρα η ράβδος θα περιστραφεί γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν η δύναμη F και ο μοχλοβραχίονάς της.

Η ροπή της δύναμης που δέχτηκε η ράβδος από το σώμα Σ κατά την κρούση είναι εσωτερική του συστήματος, άρα για το σύστημα σώμα - ράβδος ισχύει η Αρχή Διατήρησης Στροφορμής:

$$\vec{L}_{αρχ} = \vec{L}_{τελ} \Rightarrow \vec{L}_{σωμ} = \vec{L}_{συστ} \Rightarrow \frac{m \cdot v \cdot \ell}{2} = 0 + I_{cm} \cdot \omega \Rightarrow$$

$$\frac{m \cdot v \cdot \ell}{2} = \frac{M \ell^2}{12} \cdot \omega \Rightarrow \omega = \frac{6 \cdot m \cdot v}{M \cdot \ell} \Rightarrow$$

$$\omega = \left(\frac{6 \cdot 0,01 \cdot 4}{0,04 \cdot 0,4} \right) \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 15 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

γ) Το κέντρο μάζας εκτελεί ευθύγραμμη ομαλή κίνηση, άρα για τη μετατόπιση ισχύει:

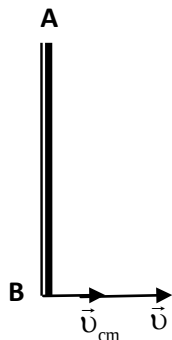
$$\Delta x_{cm} = v_{cm} \cdot t \Rightarrow 1 = 1t \Rightarrow t = 1\text{s}$$

$$\text{Επίσης, } \theta = \omega \cdot t \Rightarrow \theta = 15 \cdot 1\text{rad} \Rightarrow \theta = 15\text{rad}$$

$$\text{Έτσι, } N = \frac{\theta}{2\pi} = \frac{15}{2\pi} \text{ στροφές} \Rightarrow N = \frac{7,5}{\pi} \text{ στροφές}$$

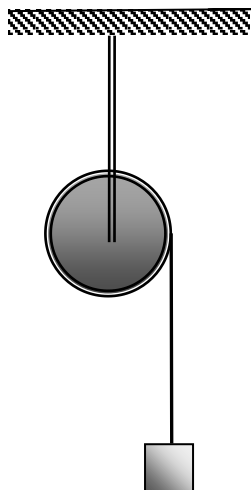
δ) Κάθε σημείο της ράβδου έχει δύο ταχύτητες, την ταχύτητα του κέντρου μάζας και τη γραμμική ταχύτητα. Μετά από 1,5 περιστροφή το πάνω σημείο (B) βρίσκεται στην κάτω θέση και οι δύο ταχύτητες έχουν την ίδια κατεύθυνση. Γράφουμε λοιπόν:

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{cm} + \vec{v}_{\omega} \Rightarrow v_B = v_{cm} + \frac{\omega \cdot \ell}{2} = \left(1 + \frac{15 \cdot 0,4}{2} \right) \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_B = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$



Πρόβλημα 6.

Μία κατακόρυφη τροχαλία έχει τυλιγμένο γύρω της ένα λεπτό αβαρές σχοινί, στο ελεύθερο άκρο του οποίου είναι δεμένο ένα σώμα (Σ) μάζας $m_{\Sigma} = 1\text{kg}$. Η τροχαλία έχει ακτίνα $R = 0,1\text{m}$, μάζα $M = 2\text{kg}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα, ο οποίος ταυτίζεται με τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της τροχαλίας. Τη χρονική στιγμή $t = 0$, αφήνουμε το σύστημα να κινηθεί.



Να βρείτε:

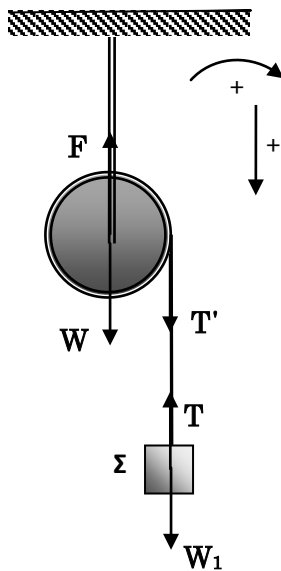
- α) Την επιτάχυνση που θα αποκτήσει το σώμα Σ .
- β) Το μέτρο της δύναμης που ασκεί ο άξονας περιστροφής στην τροχαλία.
- γ) Για τη χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$ ζητούνται:
 - 1) Η στροφορμή της τροχαλίας.
 - 2) Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας.

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_{\text{cm}} = \frac{MR^2}{2}$.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$. Τριβές δεν υπάρχουν.

Λύση

α) Στο σώμα Σ ασκούνται το βάρος του w_1 και η τάση του νήματος T . Αφού το νήμα είναι αβαρές το νήμα ασκεί και στην τροχαλία δύναμη με μέτρο $T' = T$. Στην τροχαλία ασκούνται επίσης το βάρος της W και μια δύναμη F από τον άξονα περιστροφής.



Γράφουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για την κίνηση του σώματος:

$$w_1 - T = m_{\Sigma} \alpha_{\Sigma} \quad (1),$$

όπου α_{Σ} η επιτάχυνση του σώματος.

Γράφουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη στροφική κίνηση της τροχαλίας:

$$\Sigma \tau = I a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow TR = \frac{1}{2} MR^2 \cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (2),$$

Η σχέση που συνδέει τη μεταφορική επιτάχυνση α_{Σ} του σώματος Σ με τη γωνιακή επιτάχυνση $a_{\gamma\omega\nu}$ της τροχαλίας βρίσκεται ως εξής:

Όταν η τροχαλία στραφεί κατά γωνία $\Delta\theta$ θα ξετυλιχτεί νήμα μήκους $\Delta s = \Delta\theta \cdot R$ και το σώμα θα κατέβει κατά $\Delta y = \Delta s$. Άρα έχουμε $\Delta y = \Delta\theta \cdot R$. Διαιρώντας 1^ο και 2^ο μέλος με το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt που απαιτήθηκε για την παραπάνω μεταβολή παίρνουμε: $\frac{\Delta y}{\Delta t} = \frac{\Delta\theta}{\Delta t} \cdot R \Rightarrow v_{\Sigma} = \omega \cdot R$

Παίρνοντας ρυθμούς μεταβολής και των δύο μερών της ισότητας καταλήγουμε στη σχέση:

$$\alpha_{\Sigma} = a_{\gamma\omega\nu} \cdot R$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (2) παίρνουμε $T = \frac{1}{2} M \alpha_{\Sigma}$. (3)

Από τις εξισώσεις (1) και (3) παίρνουμε:

$$m_{\Sigma} g - \frac{1}{2} M \alpha_{\Sigma} = m_{\Sigma} \alpha_{\Sigma}, \text{ από την οποία προκύπτει:}$$

$$\alpha_{\Sigma} = \frac{g}{1 + \frac{M}{2m_{\Sigma}}} = \frac{10}{1 + \frac{2}{2 \cdot 1}} \text{ m/s}^2 \Rightarrow \alpha_{\Sigma} = 5 \text{ m/s}^2$$

β) Το κέντρο περιστροφής της τροχαλίας παραμένει ακίνητο, οπότε $\Sigma \vec{F} = 0$ ή

$\vec{W} + \vec{T} + \vec{F} = 0$ και επειδή το βάρος και η τάση του σχοινιού είναι κατακόρυφες δυνάμεις, κατακόρυφη θα είναι και η δύναμη F. Οπότε:

$$F = Mg + T = Mg + \frac{1}{2} M \alpha_{\Sigma} = M(g + \frac{\alpha_{\Sigma}}{2})$$

$$F = 2(10 + \frac{5}{2})\text{N} \Rightarrow F = 25\text{N}$$

γ)

1) Η στροφορμή δίνεται από τη σχέση $L = I\omega$.

$$\text{Από την εξίσωση } \alpha_{\Sigma} = a_{\gamma\omega\nu} R \text{ έχουμε } a_{\gamma\omega\nu} = \frac{\alpha_{\Sigma}}{R} \Rightarrow a_{\gamma\omega\nu} = \frac{5}{0,1} \text{ rad/s}^2 = 50 \text{ rad/s}^2.$$

$$\text{Οπότε } \omega = a_{\gamma\omega\nu} \cdot t = 50 \cdot 2 \text{ rad/s} = 100 \text{ rad/s}$$

$$I = \frac{MR^2}{2} = \frac{2 \cdot 0,1^2}{2} \text{ kgm}^2 \Rightarrow I = 0,01 \text{ kgm}^2$$

Με αντικατάσταση στον τύπο της στροφορμής παίρνουμε:

$$L = 1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

$$2) \frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau \quad (4)$$

Η μόνη δύναμη που ασκεί ροπή στην τροχαλία είναι η τάση του νήματος, για την οποία από τη σχέση (3) παίρνουμε:

$$T = M \frac{\alpha_{\Sigma}}{2} = 2 \frac{5}{2} \text{ N} \Rightarrow T = 5 \text{ N}.$$

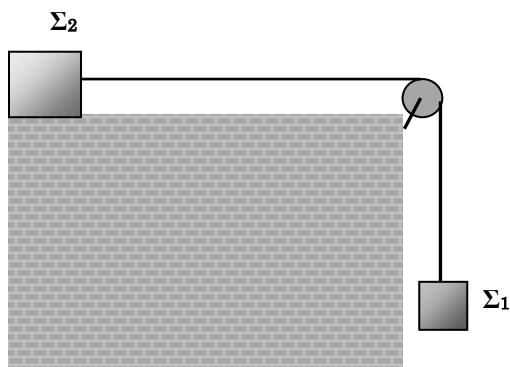
Έτσι, με αντικατάσταση στη σχέση (4) παίρνουμε:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = T \cdot R = 5 \cdot 0,1 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2} = 0,5 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}^2}$$

Η τιμή αυτή είναι σταθερή σε όλη τη διάρκεια της κίνησης.

Πρόβλημα 7.

Δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 που έχουν μάζες $m_1 = 2\text{kg}$ και $m_2 = 1\text{kg}$ αντίστοιχα, συνδέονται μεταξύ τους με αβαρές νήμα το οποίο διέρχεται από το αυλάκι ομογενούς τροχαλίας μάζας $M = 2\text{kg}$ και ακτίνας $R = 20\text{cm}$. Το σώμα Σ_1 κρέμεται κατακόρυφα και το Σ_2 βρίσκεται σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ αφήνουμε το σύστημα ελεύθερο να κινηθεί.



Να υπολογίσετε:

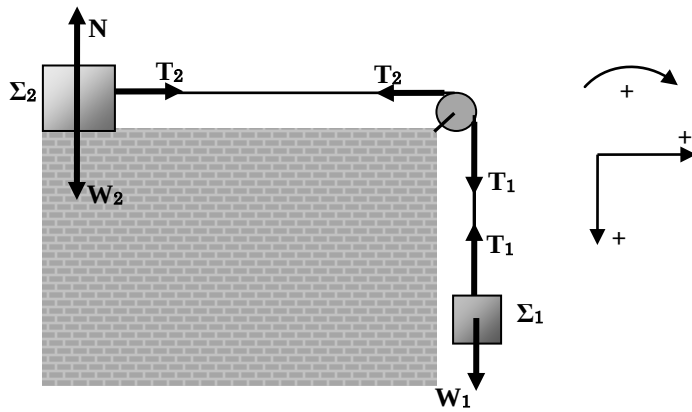
- α) το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 .
- β) τις τιμές των τάσεων T_1 και T_2 των δύο νημάτων.
- γ) το ρυθμό μεταβολής της στροφορμής της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της.
- δ) τη στροφορμή της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της, την χρονική στιγμή $t = 2\text{s}$.

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I_{\text{cm}} = \frac{MR^2}{2}$.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Το σώμα Σ_1 θα κινηθεί προς τα κάτω. Τα σώματα έχουν ίδια κατά μέτρο επιτάχυνση και αποκτούν ίσες κατά μέτρο ταχύτητες. Αν δεν συνέβαινε αυτό το νήμα θα έπαυε να είναι τεντωμένο. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για την μεταφορική κίνηση των δύο σωμάτων και για την στροφική κίνηση της τροχαλίας.



Σώμα Σ₁: $\Sigma F_1 = m_1 \cdot \alpha \Rightarrow m_1 g - T_1 = m_1 \cdot \alpha \Rightarrow T_1 = m_1 g - m_1 \cdot \alpha$ (1)

Σώμα Σ₂: $\Sigma F_2 = m_2 \cdot \alpha \Rightarrow T_2 = m_2 \cdot \alpha$ (2)

Τροχαλία: $\Sigma \tau = I \cdot a_{\gamma\omega\nu} \Rightarrow >$

$$T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = \frac{1}{2} M \cdot R^2 \cdot \frac{\alpha}{R} \Rightarrow T_1 - T_2 = \frac{1}{2} M \cdot \alpha$$
 (3)

Από την (3) με τη βοήθεια των (1) και (2) παίρνουμε:

$$m_1 g - m_1 \alpha - m_2 \alpha = \frac{1}{2} M \cdot \alpha \Rightarrow 2 \cdot 10 - 2\alpha - 1 \cdot \alpha = \frac{1}{2} 2 \cdot \alpha \Rightarrow 20 = 4\alpha \Rightarrow$$

$$\alpha = 5 \text{ m/s}^2.$$

β) Από την (1) έχουμε:

$$T_1 = m_1 g - m_1 \cdot \alpha = (2 \cdot 10 - 2 \cdot 5) \text{ N} \Rightarrow T_1 = 10 \text{ N}$$

Από τη (2) έχουμε:

$$T_2 = m_2 \cdot \alpha = 1 \cdot 5 \text{ N} \Rightarrow T_2 = 5 \text{ N}$$

γ) Οι εξωτερικές δυνάμεις που ασκούν ροπή στην τροχαλία, είναι οι δύο τάσεις των νημάτων. Έτσι, έχουμε:

$$\frac{dL}{dt} = \Sigma \tau \Rightarrow \text{επειδή } \tau = \text{σταθ} \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = \Sigma \tau \Rightarrow \frac{\Delta L}{\Delta t} = T_1 \cdot R - T_2 \cdot R = (10 \cdot 0,2 - 5 \cdot 0,2) \text{ Nm} = 1 \text{ Nm}$$

δ) Ισχύει:

$$\frac{\Delta L}{\Delta t} = T_1 \cdot R - T_2 \cdot R \Rightarrow \Delta L = (T_1 \cdot R - T_2 \cdot R) \Delta t \Rightarrow L - 0 = (10 \cdot 0,2 - 5 \cdot 0,2) \cdot 2 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}} \Rightarrow L = 2 \frac{\text{kgm}^2}{\text{s}}$$

Ημερομηνία τροποποίησης: 19/07/2011

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΛΥΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένα ομογενές σώμα με κανονικό γεωμετρικό σχήμα κυλίνεται, χωρίς να ολισθαίνει. Η κινητική ενέργεια του σώματος λόγω της μεταφορικής κίνησης είναι ίση με την κινητική του ενέργεια λόγω της στροφικής κίνησης γύρω από τον άξονα που περνά από το κέντρο μάζας του. Το γεωμετρικό σχήμα του σώματος είναι:

α) δίσκος.

β) λεπτός δακτύλιος.

γ) σφαίρα.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή λύση είναι η α.

$$K_{\text{μετ}} = K_{\text{περ}} \Rightarrow \frac{1}{2} M v^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \xrightarrow{v=\omega R} \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow I = M R^2$$

Δηλαδή πρέπει όλη η μάζα να είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια του στερεού. Άρα το ζητούμενο γεωμετρικό σχήμα είναι ο λεπτός δακτύλιος.

Ερώτηση 2.

Δύο ομογενείς δακτύλιοι Α, Β των οποίων το πάχος είναι αμελητέο σε σχέση με την ακτίνα τους, έχουν την ίδια ακτίνα και μάζες m_A και $m_B = 2m_A$. Οι δακτύλιοι περιστρέφονται ο καθένας γύρω από άξονα που διέρχεται από το κέντρο τους και είναι κάθετος στο επίπεδό τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Η ροπή αδράνειας του δακτυλίου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι: $I = MR^2$. Εφαρμόζοντας κατάλληλη δύναμη και στους δύο, ακινητοποιούνται. Περισσότερο έργο δαπανήθηκε στον:

α) πρώτο (Α) δακτύλιο.

β) δεύτερο (Β) δακτύλιο.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή λύση είναι η β.

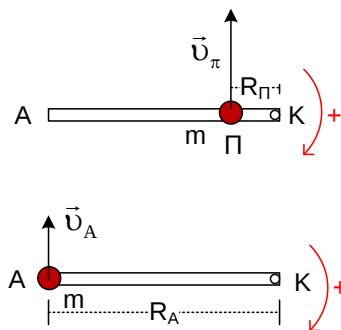
Σύμφωνα με το θεώρημα έργου ενέργειας το δαπανώμενο έργο ισούται αλγεβρικά με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του κάθε δακτυλίου:

$$W = K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = -K_{\text{αρχ}} = -\frac{1}{2}I\omega^2$$

Οι δακτύλιοι έχουν ίσες γωνιακές ταχύτητες. Επίσης έχουν ίσες ακτίνες αλλά ο (Β) έχει διπλάσια μάζα άρα θα έχει διπλάσια ροπή αδράνειας. Κατ' επέκταση και το δαπανώμενο έργο στο δακτύλιο (Β) θα είναι περισσότερο σε σχέση με αυτό που απαιτήθηκε για το δακτύλιο (Α).

Ερώτηση 3.

Η οριζόντια ράβδος ΑΚ του σχήματος είναι αβαρής και στρέφεται γύρω από κατακόρυφο άξονα που είναι κάθετος σε αυτήν και διέρχεται από το άκρο της Κ. Η μάζα m συγκρατείται σε απόσταση $ΠΚ=R_{\pi}$ από τον άξονα περιστροφής και το μέτρο της ταχύτητάς της είναι u_{π} . Η μάζα αφήνεται ελεύθερη να μετακινηθεί στο σημείο Α που απέχει απόσταση $ΑΚ=R_A=4R_{\pi}$. Για το λόγο των κινητικών ενεργειών που έχει η μάζα m στις παραπάνω θέσεις K_{π} και K_A αντίστοιχα, ισχύει:



α) $\frac{K_{\pi}}{K_A} = 1$.

β) $\frac{K_{\pi}}{K_A} = 4$.

γ) $\frac{K_{\pi}}{K_A} = 16$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή λύση είναι η γ.

Για τη μετακίνηση της μάζας m δεν ασκήθηκε κάποια δύναμη, οπότε ούτε και ροπή. Άρα η στροφορμή της μάζας ως προς τον άξονα περιστροφής παραμένει σταθερή. Σύμφωνα με την αρχή διατήρησης της στροφορμής ισχύει:

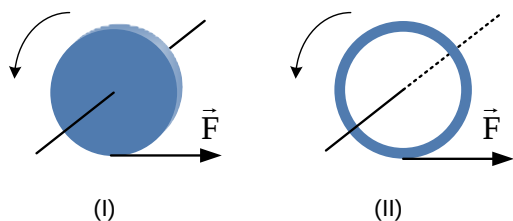
$$L_{\pi} = L_A \Rightarrow m \cdot u_{\pi} \cdot R_{\pi} = m \cdot u_A \cdot R_A \Rightarrow u_{\pi} \cdot R_{\pi} = u_A \cdot 4R_{\pi} \Rightarrow \frac{u_{\pi}}{u_A} = 4$$

Ο λόγος των κινητικών ενεργειών είναι:

$$\frac{K_{\pi}}{K_A} = \frac{\frac{1}{2} m u_{\pi}^2}{\frac{1}{2} m u_A^2} \Rightarrow \frac{K_{\pi}}{K_A} = \frac{u_{\pi}^2}{u_A^2} \Rightarrow \frac{K_{\pi}}{K_A} = \left(\frac{u_{\pi}}{u_A} \right)^2 \Rightarrow \frac{K_{\pi}}{K_A} = (4)^2 \Rightarrow \frac{K_{\pi}}{K_A} = 16$$

Ερώτηση 4.

Στο σχήμα φαίνεται ένας ομογενής συμπαγής κυκλικός δίσκος (I) και ένας ομογενής συμπαγής κυκλικός δακτύλιος (II), που έχουν την ίδια ακτίνα R και την ίδια μάζα m και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο τους.



Κάποια χρονική στιγμή ασκούνται στα σώματα αυτά δυνάμεις ίδιου μέτρου, εφαπτόμενες στην περιφέρεια. Οι γωνιακές ταχύτητες που θα αποκτήσουν μετά από περιστροφή κατά γωνία θ , θα είναι

α. $\omega_I = \omega_{II}$.

β. $\omega_I > \omega_{II}$.

γ. $\omega_I < \omega_{II}$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή Λύση είναι η β.

Το έργο που θα παραχθεί δίνεται από τον τύπο: $W = \tau\theta \Rightarrow W = F \cdot R \cdot \theta \Rightarrow W_I = W_{II}$

Άρα και στις δύο περιπτώσεις το παραγόμενο έργο είναι το ίδιο.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου-ενέργειας: $K_{\tau} - K_{\alpha} = \Sigma W \Rightarrow K_{\tau} - 0 = W \Rightarrow K_{\tau,I} = K_{\tau,II}$, δηλαδή και η κινητική ενέργεια που αποκτούν είναι ίδια.

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας βρίσκεται από τον τύπο της κινητικής ενέργειας:

$$K = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \Rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{2K}{I_1}} \text{ και } K = \frac{1}{2} I_{II} \omega_{II}^2 \Rightarrow \omega_{II} = \sqrt{\frac{2K}{I_{II}}} \text{ αντίστοιχα.}$$

Όμως $I_I < I_{II}$ διότι στο δακτύλιο όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη σε απόσταση R από τον άξονα περιστροφής ενώ στο δίσκο η μάζα κατανέμεται ομοιόμορφα σε αποστάσεις μικρότερες από R . Οπότε $I_I < I_{II} \Rightarrow \omega_I > \omega_{II}$.

Ερώτηση 5.

Ένας κύβος και μία σφαίρα έχουν την ίδια μάζα και εκτοξεύονται κατά μήκος δύο κεκλιμένων επιπέδων με την ίδια αρχική ταχύτητα u_{cm} . Ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβές στο ένα κεκλιμένο επίπεδο και η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει στο άλλο. Για το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσουν ισχύει:

α) $\frac{h_{\text{κύβου}}}{h_{\text{σφαίρας}}} > 1.$

β) $\frac{h_{\text{κύβου}}}{h_{\text{σφαίρας}}} = 1.$

γ) $\frac{h_{\text{κύβου}}}{h_{\text{σφαίρας}}} < 1.$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή λύση είναι η γ.

Και στα δύο σώματα οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές (βάρος). Στη σφαίρα ασκείται η στατική τριβή, αλλά δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της (επειδή ασκείται συνεχώς σε σημείο που έχει ταχύτητα μηδέν), οπότε για την σύνθετη κίνηση συνολικά δεν παράγει έργο. Επομένως ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Θ.Δ.Μ.Ε.) και για τα δύο σώματα, το οποίο εφαρμόζουμε από την αρχική θέση (στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου) ως τη στιγμή που σταματούν στιγμιαία (σε ύψος h). Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε αυτό που περνάει από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

$$E_{\text{μηχ.αρχ.}} = E_{\text{μηχ.τελ.}} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow K_{\alpha} + 0 = 0 + mgh \Rightarrow h = \frac{K_{\alpha}}{mg} \quad (1)$$

Τα δύο σώματα έχουν την ίδια μάζα και την ίδια αρχική ταχύτητα u_{cm} . Η αρχική κινητική ενέργεια είναι:

$$\text{Για τον κύβο: } K_{\text{κύβου}} = \frac{1}{2}mv_{cm}^2$$

$$\text{Και για τη σφαίρα: } K_{\text{σφαίρας}} = K_{\text{περ}} + K_{\text{μετ}} = K_{\text{περ}} + \frac{1}{2}mv_{cm}^2$$

Η σχέση (1) γίνεται:

$$\text{Για τον κύβο } h_{\text{κύβου}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg}$$

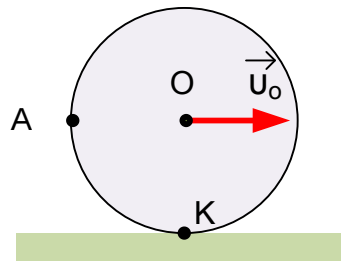
Και για τη σφαίρα: $h_{\text{σφαίρας}} = \frac{K_{\text{περ}} + \frac{1}{2}mv^2}{mg}$ και διαιρώντας κατά μέλη:

$$\frac{h_{\text{κύβου}}}{h_{\text{σφαίρας}}} = \frac{\frac{\frac{1}{2}mv^2}{mg}}{\frac{K_{\text{περ}} + \frac{1}{2}mv^2}{mg}} \Rightarrow \frac{h_{\text{κύβου}}}{h_{\text{σφαίρας}}} = \frac{\frac{1}{2}mv^2}{K_{\text{περ}} + \frac{1}{2}mv^2} \Rightarrow \frac{h_{\text{κύβου}}}{h_{\text{σφαίρας}}} < 1$$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Ο δίσκος του σχήματος έχει μάζα $M=2\text{kg}$, ακτίνα $R=0,2\text{m}$ κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Κάποια στιγμή η ταχύτητα του κέντρου του O έχει μέτρο $v_o=4\text{m/s}$. Το σημείο A βρίσκεται στην περιφέρεια του δίσκου και το AO είναι οριζόντιο. Να υπολογίσετε:



α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του δίσκου.

β) την ταχύτητα του σημείου A .

γ) την κινητική ενέργεια του δίσκου.

δ) την κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής του δίσκου ως προς ένα στιγμιαίο άξονα περιστροφής που περνάει από τα σημεία επαφής του δίσκου με το έδαφος και είναι παράλληλος στον αρχικό άξονα που περνάει από το O . Να θεωρήσετε ότι ο δίσκος κάνει μόνο περιστροφική κίνηση ως προς τον άξονα αυτό με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Τι παρατηρείτε;

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του O :

$$I_{\text{cm}} = \frac{1}{2}MR^2.$$

Λύση

α) Επειδή ο δίσκος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει η ταχύτητα του κέντρου μάζας του

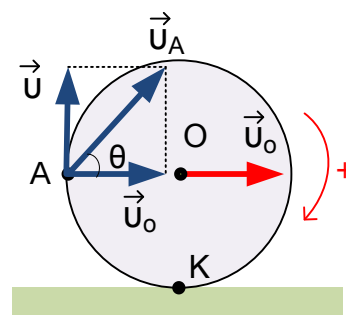
$$\text{δίσκου είναι: } v_o = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v_o}{R} \Rightarrow \omega = \frac{4\text{m/s}}{0,2\text{m}} \Rightarrow \omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) Το σημείο A έχει δύο ταχύτητες. Μία οριζόντια, ίση με v_o εξαιτίας της μεταφορικής της κίνησης και μία κατακόρυφη με φορά προς τα πάνω, εξαιτίας της στροφικής της κίνησης, που έχει μέτρο ίσο με $u=\omega R=20 \cdot 0,2=4\text{m/s}$ (Δηλαδή $u=v_o=4\text{m/s}$). Άρα η συνισταμένη ταχύτητα έχει μέτρο:

$$v_A = \sqrt{v_o^2 + u^2} \Rightarrow v_A = \sqrt{v_o^2 + v_o^2} \Rightarrow v_A = \sqrt{2}v_o \Rightarrow$$

$$v_A = v_o \sqrt{2} \Rightarrow v_A = 4\sqrt{2} \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{και κατεύθυνση: } \varepsilon\phi\theta = \frac{v}{v_o} = 1 \Rightarrow \theta = 45^\circ$$



γ) Η κινητική ενέργεια είναι:

$$K = K_{\text{μετ}} + K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} I_{\text{CM}} \omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 \Rightarrow$$
$$K = \frac{1}{2} M v_0^2 + \frac{1}{4} M v_0^2 \Rightarrow K = \frac{3}{4} M v_0^2 \Rightarrow K = \frac{3}{4} 2 \text{kg} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow K = 24 \text{J}$$

δ) Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον στιγμιαίο άξονα περιστροφής θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Steiner:

$$I = I_{\text{cm}} + M R^2 = \frac{1}{2} M R^2 + M R^2 \Rightarrow I = \frac{3}{2} M R^2$$

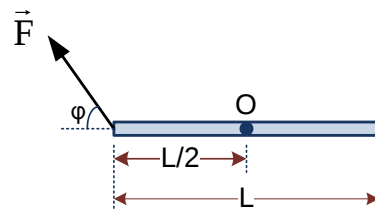
Η κινητική ενέργεια (λόγω περιστροφής) είναι:

$$K' = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow K' = \frac{1}{2} \frac{3}{2} M R^2 \omega^2 \Rightarrow K' = \frac{3}{4} M v_0^2 \Rightarrow K' = \frac{3}{4} 2 \text{kg} \cdot \left(4 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow K' = 24 \text{J}$$

Παρατηρούμε ότι η κινητική ενέργεια του δίσκου είναι ίδια στις δύο περιπτώσεις.

Άσκηση 2.

Η ομογενής και συμπαγής ράβδος του σχήματος έχει μάζα $M = 4\text{kg}$, μήκος $L = 6\text{m}$ και μπορεί να στρέφεται γύρω από άξονα που διέρχεται από το μέσο της O και είναι κάθετος σε αυτή. Στη ράβδο ασκείται συνεχώς μια δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου 8N που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με την προέκταση της ράβδου. Η γωνία αυτή παραμένει σταθερή σε όλη τη διάρκεια της περιστροφής της ράβδου. Να υπολογίσετε:



α) την κινητική ενέργεια της ράβδου τη στιγμή που η γωνιακή της ταχύτητα έχει μέτρο $\omega = 4\text{rad/s}$.

β) το έργο της δύναμης $\vec{F}$ μετά από δύο περιστροφές της ράβδου.

γ) το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη $\vec{F}$ μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο τη στιγμή που η στροφορμή της έχει μέτρο $L = 12\text{kg}\cdot\text{m}^2\cdot\text{s}^{-1}$.

δ) το ρυθμό μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου τη στιγμή που η κινητική της ενέργεια είναι 24J .

Δίνεται: Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$I = \frac{1}{12}ML^2$$

Λύση

α) Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$I = \frac{1}{12}ML^2 \Rightarrow I = \frac{1}{12}4\text{Kg}\cdot(6\text{m})^2 \Rightarrow I = \frac{1}{3}\text{Kg}\cdot36\text{m}^2 \Rightarrow I = 12\text{Kg}\cdot\text{m}^2$$

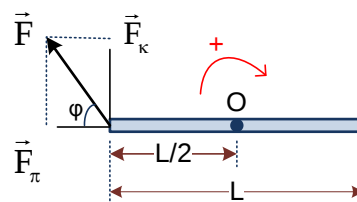
Η κινητική ενέργεια είναι:

$$K = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2}12\text{kg}\cdot\text{m}^2\left(4\frac{\text{rad}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow K = 96\text{J}$$

β) Η δύναμη αναλύεται σε δύο συνιστώσες:

$F_k = F \cdot \eta\mu\varphi \Rightarrow F_k = 8\text{N} \cdot \eta\mu30^\circ \Rightarrow F_k = 4\text{N}$ η οποία είναι κάθετη στη ράβδο και

$F_\pi = F \cdot \sigma\upsilon\nu\varphi$ η οποία είναι παράλληλη στη ράβδο.



Από τις δύο συνιστώσες μόνο η F_k δημιουργεί μία σταθερή ροπή στη ράβδο. Η ροπή της F_π είναι μηδέν αφού ο φορέας της διέρχεται από τον άξονα περιστροφής:

$$\tau = F_{\kappa} \frac{L}{2} \Rightarrow \tau = 4N \frac{6m}{2} \Rightarrow \tau = 12Nm$$

Η γωνία περιστροφής της ράβδου μετά από $N=2$ περιστροφές θα είναι $\theta = 2\pi N = 4\pi \text{rad}$.

Επειδή η ροπή της δύναμης $\vec{F}_{\kappa}$ είναι σταθερή, παράγει έργο:

$$W = \tau \cdot \theta \Rightarrow W = 12Nm \cdot 4\pi \text{ rad} \Rightarrow W = 48\pi \text{ J}$$

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο, δηλαδή η ισχύς της δύναμης, είναι: $\frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega$.

$$\text{Ισχύει: } L = I\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{I} \Rightarrow \omega = \frac{12\text{kg}\cdot\text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{12\text{kg}\cdot\text{m}^2} \Rightarrow \omega = 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Οπότε:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 12Nm \cdot 1 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 12 \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της ράβδου είναι: $\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega$.

Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας βρίσκεται από τον τύπο της κινητικής ενέργειας:

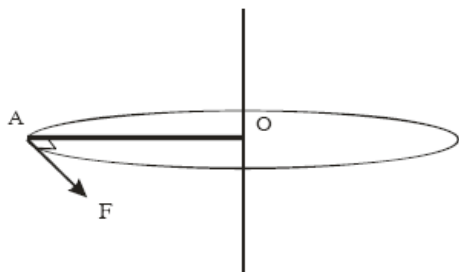
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2K}{I}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 24\text{J}}{12\text{kg} \cdot \text{m}^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{4} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \tau_F \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 12Nm \cdot 2 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 24 \frac{\text{J}}{\text{s}}.$$

Άσκηση 3.

Η ράβδος ΟΑ του σχήματος με μήκος $L=1\text{ m}$ και μάζα $M=6\text{ kg}$ είναι οριζόντια και περιστρέφεται υπό την επίδραση οριζόντιας δύναμης μέτρου $F=15\text{ N}$, η οποία είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο, στο άκρο της Α. Η περιστροφή γίνεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το Ο.



Αρχικά η ράβδος είναι ακίνητη. Οι τριβές θεωρούνται αμελητέες. Να υπολογιστούν:

- α) Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της.
- β) Η ροπή της δύναμης ως προς τον άξονα περιστροφής.
- γ) Το έργο που έχει προσφέρει η δύναμη στη ράβδο στη διάρκεια της πρώτης περιστροφής.
- δ) Η γωνιακή ταχύτητα της ράβδου στο τέλος της πρώτης περιστροφής.
- ε) Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο στο τέλος της πρώτης περιστροφής.

Δίνονται: $\sqrt{30\pi} = 9,7$.

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} ML^2$.

Λύση

Για την επίλυση της άσκησης, θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

- α) θα επιλέξουμε κατάλληλους νόμους.
- β) θα γράψουμε δεδομένα – ζητούμενα.
- γ) θα κάνουμε το σχήμα.
- δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.
- ε) θα εξειδικεύσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.
- στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και
- ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

Επειδή η ράβδος μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό άξονα υπό την επίδραση ροπής δύναμης, ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης:

$$\Sigma \tau = I \cdot a_{\gamma} \quad (1)$$

Επειδή ο άξονας περιστροφής δε διέρχεται από το κέντρο μάζας αλλά είναι παράλληλος με τον άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας, για τον υπολογισμό της ροπής αδράνειας της ράβδου, θα χρησιμοποιήσουμε το θεώρημα Steiner:

$$I = I_{\text{cm}} + Md^2 \quad (2)$$

Επειδή η δύναμη είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο στο άκρο της Α και η περιστροφή γίνεται γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το Ο, η ροπή της δύναμης θα είναι σταθερή. Επομένως, το έργο της θα δίνεται από τη σχέση:

$$W = \tau \cdot \theta \quad (3)$$

Η ροπή της δύναμης μεταβάλλει την κινητική ενέργεια της στρεφόμενης ράβδου κατά ποσότητα ίση με το έργο της. Από το θεώρημα έργου - ενέργειας στη στροφική κίνηση έχουμε:

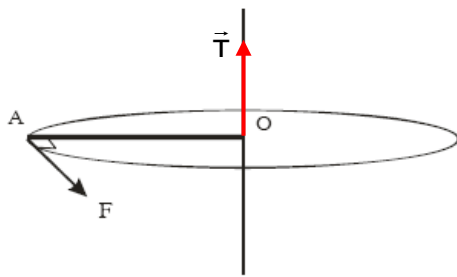
$$\frac{1}{2} I \omega_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2} I \omega_{\text{αρχ}}^2 = W_{\text{ολ}} \quad (4)$$

Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο κάποια στιγμή (στιγμιαία ισχύς) δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega \quad (5)$$

Δεδομένα	Ζητούμενα
$L = 1 \text{ m}$ $M = 6 \text{ kg}$ $F = 15 \text{ N}$ $\omega_0 = 0$ $\gamma., \delta., \epsilon. 1^{\text{η}}$ περιστροφή $\sqrt{30\pi} = 9,7$ $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} ML^2$	$\alpha. I = ;$ $\beta. \bar{\tau} = ;$ $\gamma. W = ;$ $\delta. \omega = ;$ $\epsilon. \frac{dW}{dt} = ;$

Στο σχήμα φαίνεται η κατεύθυνση της ροπής της δύναμης πάνω στον άξονα περιστροφής:



Θεωρούμε θετική την αριστερόστροφη φορά, επομένως η ροπή που ασκείται στο δίσκο έχει θετική αλγεβρική τιμή.

α) Το κέντρο μάζας της ράβδου απέχει από τον άξονα περιστροφής απόσταση $d = \frac{L}{2}$.
Επομένως, από την (2) έχουμε:

$$I = I_{\text{cm}} + Md^2 \Rightarrow I = \frac{1}{12}ML^2 + M \cdot \left(\frac{L}{2}\right)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{3}ML^2 \Rightarrow \boxed{I = 2 \text{ kgm}^2} \quad (6)$$

β) Από τον ορισμό της ροπής δύναμης γύρω από σταθερό άξονα έχουμε:

$$\tau = F \cdot L \Rightarrow \boxed{\tau = 15 \text{ Nm}} \quad (7)$$

γ) Επειδή σε μια περιστροφή η ράβδος έχει καλύψει γωνία $\theta = 2\pi \text{ rad}$, από την (3) έχουμε:

$$W = \tau \cdot \theta \Rightarrow \boxed{W = 30\pi \text{ J}} \quad (8)$$

δ) Θα εφαρμόσουμε το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας, θεωρώντας αρχική θέση, τη θέση ακινησίας της ράβδου και τελική θέση, τη θέση της ράβδου έπειτα από μια πλήρη περιστροφή.

Από τις (4), (6) και (8), με αντικατάσταση έχουμε στο (S.I.):

$$\frac{1}{2}I\omega_{\text{τελ}}^2 - \frac{1}{2}I\omega_{\text{αρχ}}^2 = W_{\text{ολ}} \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot \omega^2 - 0 = 30\pi \Rightarrow \omega^2 = 30\pi \Rightarrow \omega = \sqrt{30\pi} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \boxed{\omega = 9,7 \frac{\text{rad}}{\text{s}}} \quad (9)$$

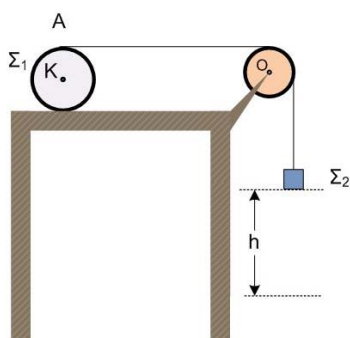
ε) Από τις (5), (7) και (9), με αντικατάσταση έχουμε:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega \Rightarrow \boxed{\frac{dW}{dt} = 145,5 \frac{\text{J}}{\text{s}}}$$

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Η τροχαλία του σχήματος μάζας $m = 3\text{kg}$ και ακτίνας $r = 0,1\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο της O και είναι κάθετος σε αυτήν. Στο αυλάκι της τροχαλίας περνά νήμα που στο ένα άκρο του κρέμεται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 2\text{kg}$ και στο άλλο άκρο του είναι τυλιγμένο γύρω από ένα κύλινδρο (Σ_1) που έχει μάζα $M = 4\text{kg}$ και ακτίνα $R = 0,2\text{m}$. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί, οπότε το σώμα Σ_2 πέφτει κατακόρυφα και ο κύλινδρος κυλίεται (χωρίς να ολισθαίνει).



Τη χρονική στιγμή t_1 που το σώμα Σ_2 έχει κατέβει κατά ύψος $h = 2\text{m}$, να υπολογιστεί:

- το μέτρο της επιτάχυνσης του σώματος Σ_1 και του σώματος Σ_2 .
- το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας K του κυλίνδρου Σ_1 .
- το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του.
- το ποσοστό του έργου του βάρους του σώματος Σ_2 που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια της τροχαλίας.

Δίνονται: Η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}mr^2$ και του σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$.

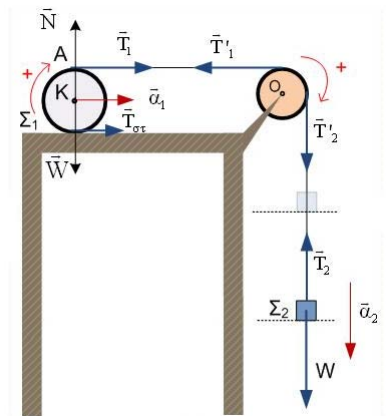
Σημείωση: Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο νήμα είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση του νήματος. Το νήμα είναι αβαρές.

Λύση

α) Όλα τα σημεία του νήματος έχουν την ίδια επιτάχυνση, το νήμα είναι αβαρές και δεν υπάρχει ολίσθηση ανάμεσα στο νήμα και στη τροχαλία, άρα το μέτρο της επιτάχυνσης a_2 του σώματος Σ_2 είναι ίσο με το μέτρο της στροφικής επιτάχυνσης που έχουν τα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας,

$$\text{άρα } \alpha_2 = \alpha_{\gamma 2} \cdot r \quad (1)$$

(όπου $\alpha_{\gamma 2}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας).



Για τους ίδιους λόγους το μέτρο της επιτάχυνσης a_2 του σώματος Σ_2 είναι ίσο με το μέτρο της επιτάχυνσης που έχει το ανώτερο σημείο A της περιφέρειας του κυλίνδρου, άρα $\alpha_2 = \alpha_A$ (2)

Η ταχύτητα του υλικού σημείου A του τροχού έχει μέτρο $v_A = 2v_{cm}$ (3)

και η επιτάχυνση του έχει μέτρο

$$\alpha_A = \frac{dv_A}{dt} \xrightarrow{(3)} \alpha_A = \frac{d(2v_{cm})}{dt} \Rightarrow \alpha_A = \frac{2dv_{cm}}{dt} \Rightarrow \alpha_A = 2\alpha_{cm} = 2\alpha_1$$

Λόγω της (2) έχουμε $\alpha_2 = 2\alpha_1$ (4)

Επίσης ισχύει ότι $\alpha_{cm} = \alpha_{\gamma 1} \cdot R \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_{\gamma 1} \cdot R$ (5)

Ο κύλινδρος εκτελεί μια σύνθετη κίνηση που μπορεί να μελετηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής. Σχεδιάζουμε τις δυνάμεις που ασκούνται στον κύλινδρο και εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής. Η στατική τριβή αυθαίρετα σχεδιάστηκε προς τα δεξιά.

Για τη μεταφορική κίνηση ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής γράφεται (θετική φορά προς τα δεξιά):

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{cm} \Rightarrow T_1 + T_{\sigma\tau} = M\alpha_1 \quad (6)$$

Για τη στροφική κίνηση ο θεμελιώδης νόμος της μηχανικής γράφεται (θετική φορά όπως φαίνεται στο σχήμα):

$$\Sigma \tau = I_1 \alpha_{\gamma 1} \Rightarrow \tau_{T_1} + \tau_{T_{\sigma\tau}} = I_1 \alpha_{\gamma 1} \Rightarrow T_1 R - T_{\sigma\tau} R = \frac{1}{2} M R^2 \alpha_{\gamma 1} \xrightarrow{(5)} T_1 - T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2} M \alpha_1 \quad (7)$$

Προσθέτοντας τις (6) και (7) κατά μέλη:

$$2T_1 = \frac{3}{2} M \alpha_1 \Rightarrow T_1 = \frac{3}{4} M \alpha_1 \quad (8)$$

Το σώμα Σ_2 εκτελεί μεταφορική κίνηση. Εφαρμόζουμε τον 2ο Νόμο Newton:

$$\Sigma \vec{F} = m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow W - T_2 = m_2 a_2 \xrightarrow{(4)} m_2 g - T_2 = 2m_2 a_1 \Rightarrow T_2 = m_2 g - 2m_2 a_1 \quad (9)$$

Η τροχαλία εκτελεί στροφική κίνηση. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης (θετική φορά όπως φαίνεται στο σχήμα):

$$\Sigma \tau = I \alpha_{\gamma_2} \rightarrow \tau_{T'_2} + \tau_{T'_1} = I \alpha_{\gamma_2} \Rightarrow T'_2 r - T'_1 r = \frac{1}{2} m r^2 \alpha_{\gamma_2} \xrightarrow{(1)}$$

$$T'_2 - T'_1 = \frac{1}{2} m \alpha_2 \xrightarrow{(4)} T'_2 - T'_1 = m \alpha_1 \quad (10)$$

Για τις τάσεις του νήματος λόγω του 3^{ου} νόμου του Newton ισχύει $T'_1 = T_1$ και $T'_2 = T_2$

Οπότε η (10) με βάση τις (8) και (9) δίνει:

$$m_2 g - 2m_2 a_1 - \frac{3}{4} M a_1 = m a_1 \Rightarrow a_1 = \frac{m_2}{\frac{3}{4} M + m + 2m_2} g \Rightarrow a_1 = \frac{2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{3}{4} 4 \text{ kg} + 3 \text{ kg} + 2 \cdot 2 \text{ kg}} \Rightarrow a_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Με αντικατάσταση στη σχέση (4) προκύπτει: $a_2 = 2a_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

β) Το μέτρο της ταχύτητας του κέντρου μάζας Κ του κυλίνδρου Σ_1 είναι: $v_1 = a_1 t_1$

Ο χρόνος κίνησης t_1 υπολογίζεται από τη πτώση του σώματος Σ_2 . Για το σώμα Σ_2 ισχύει:

$$h = \frac{1}{2} a_2 t_1^2 \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2h}{a_2}} \Rightarrow t_1 = \sqrt{\frac{2 \cdot 2 \text{ m}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \Rightarrow t_1 = 1 \text{ s}$$

$$\text{Άρα: } v_1 = a_1 t_1 \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1 \text{ s} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

γ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$\omega_1 = \frac{v_1}{R} \Rightarrow \omega_1 = \frac{2 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,2 \text{ m}} \Rightarrow \omega_1 = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το μέτρο της στροφορμής του κυλίνδρου Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$L = I_1 \omega_1 \Rightarrow L = \frac{1}{2} M R^2 \omega_1 \Rightarrow L = \frac{1}{2} 4 \text{ kg} \cdot 0,04 \text{ m}^2 \cdot 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L = 0,8 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \text{ s}^{-1}$$

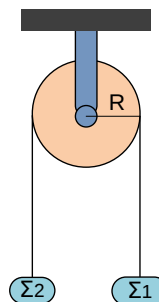
δ) Η ταχύτητα του σώματος Σ_2 είναι: $v_2 = a_2 t \Rightarrow v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\text{s} \Rightarrow v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Το ποσοστό του έργου του βάρους του σώματος Σ_2 που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια της αρχικά ακίνητης τροχαλίας είναι:

$$\frac{K_{\text{τρ}}}{W_{\beta\alpha\rho}} = \frac{\frac{1}{2} I \omega^2}{m_2 g h} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{2} m r^2 \omega^2}{m_2 g h} = \frac{\frac{1}{4} m v_2^2}{m_2 g h} = \frac{m v_2^2}{4 m_2 g h} = \frac{3 \text{kg} \cdot 16 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{4 \cdot 2 \text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 2 \text{m}} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10} = 0,3 \text{ ή } 30\%$$

Πρόβλημα 2.

Η ομογενής τροχαλία του σχήματος έχει μάζα $M=8\text{kg}$ και ακτίνα $R=0,2\text{m}$. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν αντίστοιχα μάζες $m_1=4\text{kg}$ και $m_2=2\text{kg}$. Η τροχαλία και τα σώματα Σ_1 , Σ_2 είναι αρχικά ακίνητα και τα κέντρα μάζας των Σ_1 , Σ_2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί και τη χρονική στιγμή t_1 η κατακόρυφη απόσταση των κέντρων μάζας των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι $h=1,28\text{m}$. Τη χρονική στιγμή t_1 να υπολογίσετε:



α) τη ταχύτητα των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 .

β) το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας.

γ) το πηλίκο της κινητικής ενέργειας των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 προς την κινητική ενέργεια της τροχαλίας.

δ) τον αριθμό των στροφών της τροχαλίας.

ε) το ρυθμό με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια στη τροχαλία.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της

$$I = \frac{1}{2}MR^2, \text{ η επιτάχυνση της βαρύτητας } g=10 \text{ m/s}^2 \text{ και } \pi=3,14.$$

Σημείωση: Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο νήμα είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση του νήματος. Το νήμα είναι αβαρές.

Να θεωρήσετε ότι τα σώματα Σ_1 και Σ_2 δεν φτάνουν στο έδαφος ούτε συγκρούονται με την τροχαλία.

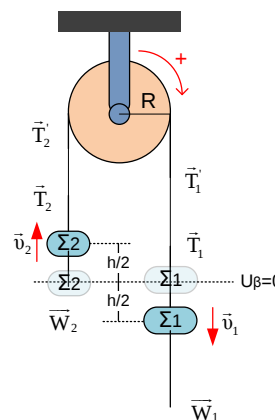
Λύση

α) Επειδή δεν υπάρχει ολίσθηση του νήματος στην τροχαλία, η ταχύτητα του κάθε σώματος θα είναι κάθε χρονική στιγμή ίση με τη γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, δηλαδή: $v_1 = v_2 = \omega R$.

Θεωρούμε ως σύστημα τα σώματα Σ_1 και Σ_2 μαζί με την τροχαλία και το σχοινί.

Οι δυνάμεις που ασκεί το νήμα στα σώματα Σ_1 ($\vec{T}_1$) και Σ_2 ($\vec{T}_2$) και στη τροχαλία ($\vec{T}_1'$ και $\vec{T}_2'$) είναι εσωτερικές δυνάμεις. Σύμφωνα με τον 3^ο Νόμο του Newton οι παραπάνω δυνάμεις είναι ανά δύο αντίθετες οπότε τα μέτρα τους είναι ίσα, δηλαδή $T_1' = T_1$ και $T_2' = T_2$.

Επειδή στο σύστημα οι εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο (τα βάρη των σωμάτων Σ_1 και Σ_2) είναι συντηρητικές ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας



(Θ.Δ.Μ.Ε.). Ως αρχική θέση επιλέγεται η θέση των σωμάτων τη χρονική στιγμή $t = 0$ και ως τελική θέση η θέση των σωμάτων τη χρονική στιγμή t_1 , όταν το σώμα Σ_1 έχει κατέβει κατά $h/2$ ενώ το Σ_2 έχει ανέβει κατά $h/2$ οπότε η κατακόρυφη απόσταση των δύο σωμάτων είναι h . Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε το οριζόντιο επίπεδο που περνάει από την αρχική θέση των κέντρων μάζας των δύο σωμάτων.

$$\begin{aligned}
 E_{\mu\eta\chi.,\alpha\rho\chi.} &= E_{\mu\eta\chi.,\tau\epsilon\lambda.} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow 0 + 0 = K_{1,\tau} + K_{2,\tau} + K_{\tau\rho\chi,\tau} - m_1 g \frac{h}{2} + m_2 g \frac{h}{2} \Rightarrow \\
 \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 &= m_1 g \frac{h}{2} - m_2 g \frac{h}{2} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 = m_1 g \frac{h}{2} - m_2 g \frac{h}{2} \Rightarrow \\
 \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} M v^2 &= m_1 g \frac{h}{2} - m_2 g \frac{h}{2} \Rightarrow m_1 v^2 + m_2 v^2 + \frac{1}{2} M v^2 = m_1 g h - m_2 g h \Rightarrow \\
 v &= \sqrt{\frac{(m_1 - m_2)gh}{m_1 + m_2 + \frac{M}{2}}} \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1,28\text{m}}{10\text{kg}}} \Rightarrow v = \sqrt{2,56 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \Rightarrow v = 1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}
 \end{aligned}$$

β) Η στροφορμή της τροχαλίας έχει μέτρο: $L = I\omega$

$$\text{Ισχύει } v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \omega = \frac{1,6\text{m/s}}{0,2\text{m}} \Rightarrow \omega = 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$I = \frac{1}{2} M R^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2} 8\text{Kg} \cdot (0,2\text{m})^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2} 8\text{Kg} \cdot 0,04\text{m}^2 \Rightarrow I = 0,16\text{Kg} \cdot \text{m}^2$$

Άρα:

$$L = I\omega \Rightarrow L = 0,16\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L = 1,28\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$$

γ) Η κινητική ενέργεια των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 είναι:

$$K = K_1 + K_2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} m_1 v^2 + \frac{1}{2} m_2 v^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} (m_1 + m_2) v^2$$

και της τροχαλίας είναι:

$$K_{\tau\rho} = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow K_{\tau\rho} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} M R^2 \omega^2 \Rightarrow K_{\tau\rho} = \frac{1}{4} M v^2$$

Το πηλίκο της κινητικής ενέργειας των σωμάτων Σ_1 και Σ_2 προς την κινητική ενέργεια της τροχαλίας είναι:

$$\frac{K}{K_{\tau\rho}} = \frac{\frac{1}{2}(m_1 + m_2)v^2}{\frac{1}{4}Mv^2} \Rightarrow \frac{K}{K_{\tau\rho}} = \frac{2(m_1 + m_2)}{M} \Rightarrow \frac{K}{K_{\tau\rho}} = \frac{12\text{kg}}{8\text{kg}} \Rightarrow \frac{K}{K_{\tau\rho}} = 1,5$$

δ) Κάθε σημείο της περιφέρειας της τροχαλίας έχει διαγράψει τόξο ίσο με $S = \frac{h}{2} \Rightarrow S = \frac{1,28}{2}\text{m} \Rightarrow S = 0,64\text{m}$ (αφού δεν παρατηρείται ολίσθηση ανάμεσα στο νήμα και σε αυτήν). Ισχύει όμως ότι:

$$S = R \cdot \theta \Rightarrow \theta = \frac{S}{R} \Rightarrow \theta = \frac{0,64\text{m}}{0,2\text{m}} \Rightarrow \theta = 3,2\text{rad}$$

Ο αριθμός των περιστροφών είναι:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{3,2}{2 \cdot 3,14} \text{ στροφές} \Rightarrow N \approx 0,5 \text{ στροφές}$$

ε) Στην τροχαλία ασκούνται από το νήμα δύο δυνάμεις που επηρεάζουν την κίνησή της, οι δυνάμεις T_1' και η T_2' . Η ροπή της T_1' είναι θετική και της T_2' αρνητική. Άρα στην τροχαλία ενέργεια προσφέρει η T_1' .

Για να υπολογίσουμε την T_1' θα εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου- ενέργειας για το σώμα Σ_1 για το χρονικό διάστημα $t=0$ έως t_1 .

$$K_{\tau} - K_{\alpha} = \Sigma W \Rightarrow K_{\tau} - 0 = W_{W_1} + W_{T_1} \Rightarrow \frac{1}{2} m_1 v^2 = m_1 g \frac{h}{2} - T_1 \frac{h}{2} \Rightarrow$$

$$T_1 = m_1 g - \frac{m_1 v^2}{h} \Rightarrow T_1 = 40\text{N} - \frac{4\text{kg} \cdot \left(1,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{1,28\text{m}} \Rightarrow T_1 = 40\text{N} - 8\text{N} \Rightarrow T_1 = 32\text{N}$$

Από τον 3^ο νόμο του Newton (δράσης - αντίδρασης) ισχύει $T_1' = T_1 = 32\text{N}$.

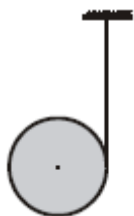
Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη T_1' μεταφέρει ενέργεια στη τροχαλία τη χρονική στιγμή t_1 είναι:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dW}{dt} = T_1' R \cdot \omega \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 32\text{N} \cdot 0,2\text{m} \cdot 8 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 51,2 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Πρόβλημα 3.

Στο γιογιό του σχήματος που έχει μάζα $M = 6 \text{ kg}$ και ακτίνα $R = 0,1 \text{ m}$, έχει τυλιχτεί πολλές φορές γύρω του λεπτό αβαρές νήμα. Με σταθερό το ένα άκρο του νήματος αφήνουμε το γιογιό να κατεβαίνει. Όταν αυτό έχει κατέβει κατά $h = \frac{5}{3} \text{ m}$ αποκτά

μεταφορική ταχύτητα $v_{\text{cm}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Να υπολογίσετε:



- α) τη μεταφορική επιτάχυνση του κέντρου μάζας του σώματος.
- β) τη γωνιακή επιτάχυνση του σώματος και την τάση του νήματος.
- γ) το λόγο της στροφικής κινητικής ενέργειας προς τη μεταφορική κινητική ενέργεια του σώματος, χωρίς να θεωρήσετε γνωστό τον τύπο της ροπής αδράνειας του γιογιό.
- δ) τη σχέση που περιγράφει πώς μεταβάλλεται η στροφική κινητική ενέργεια του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο.

Δίνεται $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$.

(Απολυτήριες Εξετάσεις Δ' Τάξης Εσπερινού Ενιαίου Λυκείου 25/5/2007)

Λύση

Για την επίλυση της άσκησης, θα ακολουθήσουμε την εξής διαδικασία:

- α) θα επιλέξουμε κατάλληλους νόμους.
- β) θα γράψουμε δεδομένα – ζητούμενα.
- γ) θα κάνουμε το σχήμα.
- δ) θα καθορίσουμε τη φορά των ροπών των δυνάμεων.
- ε) θα εφαρμόσουμε τους παραπάνω νόμους στη συγκεκριμένη περίπτωση που εξετάζουμε.
- στ) θα κάνουμε αλγεβρικούς μετασχηματισμούς και
- ζ) θα αντικαταστήσουμε τις τιμές των μεγεθών και θα κάνουμε αριθμητικές πράξεις.

Για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει, στον άξονα της κίνησης (άξονας γ'γ'), ο 2ος Νόμος Newton:

$$\Sigma F_y = M \cdot a_{\text{cm}} \quad (1)$$

Στον κάθετο στη μεταφορική κίνηση άξονα (άξονα $x'x$) δεν ασκούνται δυνάμεις, επομένως ισχύει: $\Sigma F_x = 0$.

Για τη στροφική κίνηση του κυλίνδρου ισχύει ο Θεμελιώδης Νόμος της Στροφικής Κίνησης:

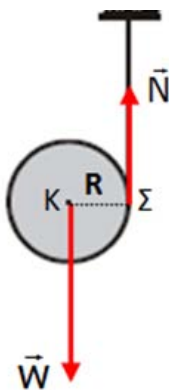
$$\Sigma \tau = I \cdot a_\gamma \quad (2)$$

Για τη σύνθετη κίνηση του κυλίνδρου (μεταφορά + περιστροφή) ισχύει το Θεώρημα Έργου - Ενέργειας:

$$\Delta K = W_{ολ} \quad (3)$$

Δεδομένα	Ζητούμενα
$M = 6 \text{ kg}$ $R = 0,1 \text{ m}$ Αρχική θέση: $\omega_0 = 0$, $v_{cm,0} = 0$ Τελική θέση: $h = \frac{5}{3} \text{ m} \Rightarrow v_{cm} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ $g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$	α. $a_{cm} = ?$; β. $a_\gamma = ?$; και $N = ?$; γ. $\frac{K_{περ}}{K_{μετ}} = ?$; δ. $K_{περ} = f(t) = ?$;

Στον κύλινδρο του γιο-γιο ασκούνται οι δυνάμεις που φαίνονται στο σχήμα:



- Η δύναμη $\vec{w}$ ασκείται από τη Γη στον κύλινδρο.
- Η δύναμη $\vec{N}$ ασκείται από το νήμα στον κύλινδρο.

α) Επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στον κύλινδρο, το τόξο ds κατά το οποίο έχει στραφεί η περιφέρεια του κυλίνδρου σε χρόνο dt , θα είναι ίσο με την απόσταση dy κατά την οποία έχει ξετυλιχθεί το νήμα, άρα και με την απόσταση dy κατά την οποία έχει κατέβει ο κύλινδρος. Επομένως:

$$dy = ds = d\theta \cdot R \Rightarrow y_{cm} = \theta \cdot R \quad (4)$$

$$\frac{dy}{dt} = \frac{ds}{dt} = \frac{d\theta}{dt} \cdot R \Rightarrow v_{cm} = \omega \cdot R \quad (5)$$

$$\frac{dv_{cm}}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot R \Rightarrow a_{cm} = a_{\gamma} \cdot R \quad (6)$$

Από την (1) φαίνεται ότι επειδή τα ΣF_y , M είναι σταθερά, η μεταφορική επιτάχυνση του κυλίνδρου θα είναι σταθερή.

Από την (6) επίσης φαίνεται ότι θα είναι σταθερή και η γωνιακή επιτάχυνση του κυλίνδρου.

Επομένως, ο κύλινδρος θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση:

- ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση προς τα κάτω
- ομαλά επιταχυνόμενη (αριστερόστροφη) στροφική κίνηση γύρω από ελεύθερο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του.

Για τα έργα των δυνάμεων που ασκούνται στον κύλινδρο έχουμε:

Έργο βάρους:

Το κέντρο μάζας του κυλίνδρου πέφτει κατά ύψος h , επομένως:

$$W_w = Mgh$$

Έργο τάσης νήματος:

Η τάση του νήματος ασκείται στο σημείο (Σ) του κυλίνδρου, το οποίο είναι στιγμιαία ακίνητο (*). Μια δύναμη που ασκείται σε ακίνητο σημείο δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της, επομένως:

$$W_N = 0$$

(*) το σημείο (Σ) έχει ταχύτητα λόγω μεταφοράς v_{cm} με φορά προς τα κάτω και ταχύτητα λόγω στροφικής κίνησης $\omega \cdot R$ με φορά προς τα πάνω. Επειδή ισχύει ότι $v_{cm} = \omega \cdot R$, το σημείο (Σ) είναι στιγμιαία ακίνητο.

Από την (5) έχουμε στο (S.I.):

$$v_{cm} = \omega \cdot R \Rightarrow 5 = \omega \cdot 0,1 \Rightarrow \omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Από την (3), με αντικατάσταση της τιμής $\omega = 50 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$, έχουμε στο (S.I.):

$$\Delta K = W_{ολ} \Rightarrow K_{τελ} - K_{αρχ} = W_w + W_N \Rightarrow K_{τελ} - 0 = W_w + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{2} I \omega^2 = Mgh \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5^2 + \frac{1}{2} I \cdot 50^2 = 6 \cdot 10 \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$I = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{5}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5^2}{50^2} \text{ kgm}^2 \Rightarrow I = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2 \quad (7)$$

Θεωρώντας θετική τη φορά κίνησης (προς τα κάτω), η σχέση (1), γράφεται στο (S.I.):

$$w - N = M \cdot \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow Mg - N = M \cdot \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow 60 - N = 6 \cdot \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow$$

$$N = 60 - 6 \cdot \alpha_{\text{cm}} \quad (8)$$

Θεωρώντας θετική τη φορά περιστροφής (αριστερόστροφη), για τις ροπές των δυνάμεων έχουμε:

$$\tau_w = 0$$

$$\tau_N = N \cdot R$$

Επομένως, από τις σχέσεις (2) και (6) έχουμε στο (S.I.):

$$\tau_w + \tau_N = I \cdot a_\gamma \Rightarrow N \cdot R = I \cdot \frac{\alpha_{\text{cm}}}{R} \Rightarrow N = 2 \cdot 10^{-2} \cdot \frac{\alpha_{\text{cm}}}{10^{-2}} \Rightarrow$$

$$N = 2 \cdot \alpha_{\text{cm}} \quad (9)$$

Από τις (8) και (9) έχουμε στο (S.I.):

$$2 \cdot \alpha_{\text{cm}} = 60 - 6 \cdot \alpha_{\text{cm}} \Rightarrow 8 \cdot \alpha_{\text{cm}} = 60 \Rightarrow$$

$$\alpha_{\text{cm}} = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

β) Θέτοντας την τιμή $\alpha_{\text{cm}} = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ στις (6) και (9) βρίσκουμε ότι:

$$a_\gamma = 75 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2} \text{ και } N = 15 \text{ N}$$

γ) Με χρήση της (5) και της (7), ο λόγος $\frac{K_{\text{περ}}}{K_{\text{μετ}}}$ υπολογίζεται ως εξής στο (S.I.):

$$\frac{K_{\text{περ}}}{K_{\text{μετ}}} = \frac{\frac{1}{2} I \omega^2}{\frac{1}{2} M v_{\text{cm}}^2} = \frac{I \omega^2}{M \omega^2 R^2} = \frac{I}{M R^2} = \frac{2 \cdot 10^{-2}}{6 \cdot 10^{-2}} \Rightarrow$$

$$\frac{K_{\text{περ}}}{K_{\text{μετ}}} = \frac{1}{3}$$

Παρατήρηση: Για την επίλυση του ερωτήματος (γ) χρησιμοποιήσαμε την τιμή της ροπής αδράνειας, όπως αυτή υπολογίστηκε από την ανάλυση της άσκησης. Η απευθείας χρήση του τύπου $I = \frac{1}{2}MR^2$ (ο οποίος ισχύει σε ομογενή κύλινδρο, που περιστρέφεται γύρω από άξονα που ταυτίζεται με τον άξονα συμμετρίας του) δεν επιτρέπεται, διότι στην εκφώνηση της άσκησης, δεν αναφέρεται ότι ο κύλινδρος του γιο-γιο είναι ομογενής κύλινδρος. Ο τύπος $I = \frac{1}{2}MR^2$ θα μας οδηγούσε σε άλλο (εσφαλμένο) αποτέλεσμα.

δ) Στη μεταφορική κίνηση του σώματος (χωρίς αρχική ταχύτητα) ισχύει:

$$v_{cm} = \alpha_{cm} \cdot t \quad (10)$$

Θέτοντας τις τιμές $\alpha_{cm} = 7,5 \frac{m}{s^2}$, $I = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$ και με χρήση της (10) έχουμε:

$$K_{περ} = \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow K_{περ} = \frac{1}{2}I \frac{v_{cm}^2}{R^2} \Rightarrow K_{περ} = \frac{I}{2R^2} (\alpha_{cm} \cdot t)^2 \Rightarrow$$

$$K_{περ} = \frac{I \cdot \alpha_{cm}^2}{2R^2} \cdot t^2 \Rightarrow K_{περ} = \frac{2 \cdot 10^{-2} \cdot 7,5^2}{2 \cdot 10^{-2}} \cdot t^2 \Rightarrow$$

$$K_{περ} = 56,25 \cdot t^2 \quad (\text{S.I.})$$

Παρατήρηση: Στο συγκεκριμένο παράδειγμα μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας στη θέση του Θεωρήματος Έργου - Ενέργειας.

Επειδή το βάρος είναι συντηρητική δύναμη και η τάση του νήματος δεν παράγει έργο, διατηρείται η μηχανική ενέργεια του κυλίνδρου. Θεωρούμε ως επίπεδο μηδενικής βαρυτικής δυναμικής ενέργειας το οριζόντιο επίπεδο που περνά από το κέντρο μάζας του κυλίνδρου όταν αυτός έχει κατέλθει κατά ύψος h από την αρχική του θέση. Έχουμε στο (S.I.):

$$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_{αρχ} + U_{αρχ} = K_{τελ} + U_{τελ} \Rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 + 0 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = Mgh \Rightarrow \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5^2 + \frac{1}{2}I \cdot 50^2 = 6 \cdot 10 \cdot \frac{5}{3} \Rightarrow$$

$$I = \frac{2 \cdot 6 \cdot 10 \cdot \frac{5}{3} - 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 5^2}{50^2} \text{ kgm}^2 \Rightarrow I = 2 \cdot 10^{-2} \text{ kgm}^2$$

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4^ο: ΜΗΧΑΝΙΚΗ ΣΤΕΡΕΟΥ ΣΩΜΑΤΟΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ 5: ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΑΙ ΕΡΓΟ ΔΥΝΑΜΗΣ ΣΤΗ ΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

ΘΕΜΑΤΑ ΠΡΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗ

ΘΕΜΑ Β

Ερώτηση 1.

Ένας κύβος και ένας δίσκος έχουν ίδια μάζα και αφήνονται από το ίδιο ύψος να κινηθούν κατά μήκος δύο κεκλιμένων επιπέδων. Ο κύβος ολισθαίνει χωρίς τριβές και φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα u_1 . Ο δίσκος κυλιέται χωρίς να ολισθαίνει και φτάνει στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου με ταχύτητα u_2 . Αν η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι: $I = \frac{1}{2}MR^2$ τότε:

α) $u_2 = u_1$.

β) $u_2 = \sqrt{\frac{4}{3}}u_1$.

γ) $u_2 = \sqrt{\frac{2}{3}}u_1$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Εφόσον στον κύβο οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές (βάρος) ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Θ.Δ.Μ.Ε.): Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε αυτό που περνάει από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

$$E_{\text{μηχ.αρχ.}} = E_{\text{μηχ.τελ.}} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_1^2 + 0 \Rightarrow v_1 = \sqrt{2gh} \quad (1)$$

Στο δίσκο οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές (βάρος). Η στατική τριβή δεν μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της (ασκείται συνεχώς σε σημείο που έχει ταχύτητα μηδέν), άρα για τη σύνθετη κίνηση συνολικά δεν παράγει έργο. Επομένως ισχύει και εδώ το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Θ.Δ.Μ.Ε.). Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε αυτό που περνάει από την βάση του κεκλιμένου επιπέδου.

$$E_{\mu\eta\chi,\alpha\rho\chi.} = E_{\mu\eta\chi,\tau\epsilon\lambda.} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow 0 + mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2}I\omega_2^2 + 0 \Rightarrow$$

$$mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} mR^2 \omega_2^2 \xrightarrow{v=\omega R} mgh = \frac{1}{2}mv_2^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2} mv_2^2 \Rightarrow mgh = \frac{3}{4}mv_2^2 \Rightarrow$$

$$v_2 = \sqrt{\frac{4}{3}gh} \quad (2)$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις σχέσεις (2) και (1):

$$\frac{v_2}{v_1} = \frac{\sqrt{\frac{4}{3}gh}}{\sqrt{2gh}} \Rightarrow \frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Rightarrow v_2 = v_1 \sqrt{\frac{2}{3}}$$

Ερώτηση 2.

Ομογενής δίσκος μάζας M και ακτίνας R κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει σε οριζόντιο επίπεδο. Η ταχύτητα του κέντρου μάζας του δίσκου είναι v_{cm} . Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας του είναι $I = \frac{1}{2}MR^2$. Η ολική κινητική ενέργεια του δίσκου είναι:

α) $\frac{1}{2}Mv_{cm}^2$

β) $\frac{3}{4}Mv_{cm}^2$

γ) $\frac{7}{8}Mv_{cm}^2$

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

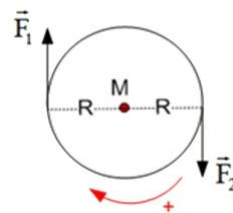
Σωστή απάντηση είναι η β.

$$K_{\delta} = K_{\delta, \mu\epsilon\tau} + K_{\delta, \pi\epsilon\rho} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow K_{\delta} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2}MR^2\omega^2 \Rightarrow$$

$$K_{\delta} = \frac{1}{2}Mv_{cm}^2 + \frac{1}{4}Mv_{cm}^2 \Rightarrow K_{\delta} = \frac{3}{4}Mv_{cm}^2$$

Ερώτηση 3.

Ο αρχικά ακίνητος δίσκος του σχήματος ξεκινά να στρέφεται με την επίδραση του ζεύγους δυνάμεων $\vec{F}_1$ και $\vec{F}_2$ ($F_1 = F_2 = F$), ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο του Μ και είναι κάθετος στην επιφάνειά του. Όταν ο δίσκος έχει δι'αγράψει μια περιστροφή, οι δύο δυνάμεις έχουν παράγει έργο 10J. Αν τριπλασιάσουμε την $\vec{F}_1$ έτσι ώστε $F_1' = 3F$, οι δύο δυνάμεις θα παράγουν σε μια περιστροφή του δίσκου έργο:



α) 20J .

β) 30J .

γ) 40J .

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η α.

Έστω $F_1 = F_2 = F$. Η ροπή ζεύγους ως προς τον άξονα περιστροφής του δίσκου είναι:

$$\tau_{ολ} = F_1 \cdot R + F_2 \cdot R = F \cdot R + F \cdot R \Rightarrow \tau_{ολ} = 2FR \quad (1)$$

Το έργο των δυνάμεων στην στροφική κίνηση είναι: $W = \tau_{ολ} \cdot \theta \quad (2)$

Με αντικατάσταση της σχέσης (1) στη (2) προκύπτει: $W = \tau_{ολ} \cdot \theta \xrightarrow{(1)} W = 2FR\theta \quad (3)$

Αν τριπλασιάσουμε την δύναμη $\vec{F}_1$ ($F_1' = 3F$) η ροπή των δύο δυνάμεων γίνεται:

$$\tau'_{ολ} = \tau_{F_1'} + \tau_{F_2} \Rightarrow \tau'_{ολ} = F_1' \cdot R + F_2 \cdot R \Rightarrow \tau'_{ολ} = 3F \cdot R + F \cdot R \Rightarrow \tau'_{ολ} = 4FR \quad (4)$$

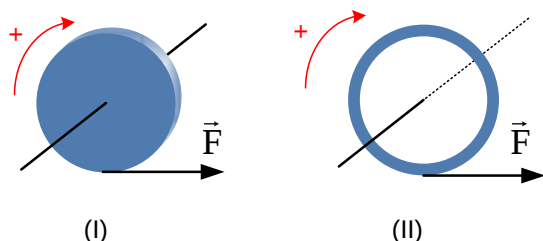
Με αντικατάσταση της σχέσης (4) στη (2) προκύπτει ότι το έργο των δυνάμεων στη δεύτερη περίπτωση είναι: $W' = \tau'_{ολ} \cdot \theta \xrightarrow{(4)} W' = 4FR\theta \quad (5)$

Συγκρίνοντας την (3) με την (5) έχουμε:

$$W' = 2W \Rightarrow W' = 2 \cdot 10J \Rightarrow W' = 20J$$

Ερώτηση 4.

Στο σχήμα φαίνεται ένας ομογενής συμπαγής κυκλικός δίσκος (I) και ένας ομογενής κυκλικός δακτύλιος (II), που έχουν την ίδια ακτίνα R , την ίδια μάζα m και περιστρέφονται γύρω από άξονα που περνάει από το κέντρο τους με την ίδια γωνιακή ταχύτητα $\vec{\omega}$.



Κάποια χρονική στιγμή ασκούνται στα σώματα αυτά σταθερές δυνάμεις ίδιου μέτρου F , εφαπτόμενες στην περιφέρεια και μετά από λίγο τα δύο σώματα σταματούν. Ο αριθμός των στροφών που θα εκτελέσουν, θα είναι

α) $N_I = N_{II}$.

β) $N_I > N_{II}$.

γ) $N_I < N_{II}$.

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Εφαρμόζοντας το θεώρημα έργου-ενέργειας:

$$K_{\tau} - K_{\alpha} = \Sigma W \Rightarrow 0 - K_{\alpha} = W_F \Rightarrow W_F = -K_{\alpha} \Rightarrow \tau_F \cdot \theta = -K_{\alpha} \Rightarrow -FR \cdot \theta = -\frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \theta = \frac{\frac{1}{2} I \omega^2}{FR} \Rightarrow$$
$$\theta = \frac{I \omega^2}{2FR} \xrightarrow{\theta=2\pi N} 2\pi N = \frac{I \omega^2}{2FR} \Rightarrow N = \frac{I \omega^2}{4\pi FR} \quad (1)$$

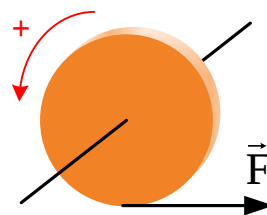
Άρα ο αριθμός των στροφών για κάθε σώμα είναι: $N_I = \frac{I_I \omega^2}{4\pi FR}$ και $N_{II} = \frac{I_{II} \omega^2}{4\pi FR}$

Επειδή τα δύο σώματα έχουν την ίδια ακτίνα R και την ίδια μάζα m , μεγαλύτερη ροπή αδράνειας έχει ο δίσκος, γιατί όλη η μάζα του είναι συγκεντρωμένη στην περιφέρεια, δηλαδή $I_I < I_{II}$.

$$\frac{N_I}{N_{II}} = \frac{\frac{I_I \omega^2}{4\pi FR}}{\frac{I_{II} \omega^2}{4\pi FR}} \Rightarrow \frac{N_I}{N_{II}} = \frac{I_I}{I_{II}} < 1 \Rightarrow N_I < N_{II}$$

Ερώτηση 5.

Ο αρχικά ακίνητος δίσκος του σχήματος ξεκινά να στρέφεται τη χρονική στιγμή $t=0$ με την επίδραση μιας δύναμης $\vec{F}$, ως προς άξονα που περνάει από το κέντρο μάζας του και είναι κάθετος στην επιφάνειά του. Τη χρονική στιγμή t_1 ο δίσκος έχει στροφορμή $\vec{L}_1$, ως προς τον άξονα περιστροφής του, και τη χρονική στιγμή t_2 ο δίσκος έχει στροφορμή $\vec{L}_2 = 2\vec{L}_1$. Η δύναμη από την αρχή μέχρι τη χρονική στιγμή t_1 παράγει έργο $W_1 = 10\text{J}$. Από την αρχή μέχρι τη χρονική στιγμή t_2 η δύναμη παράγει έργο:



α) 20J .

β) 30J .

γ) 40J .

Να επιλέξετε τη σωστή πρόταση. Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Λύση

Σωστή απάντηση είναι η γ.

Το μέτρο της στροφορμής δίνεται από τον τύπο $L = I\omega$, οπότε για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} L_1 = I\omega_1 \\ L_2 = I\omega_2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\div} \frac{L_1}{L_2} = \frac{I\omega_1}{I\omega_2} \Rightarrow \frac{L_1}{L_2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \xrightarrow{L_2=2L_1} \frac{L_1}{2L_1} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \frac{1}{2} = \frac{\omega_1}{\omega_2} \Rightarrow \omega_2 = 2\omega_1 \quad (1)$$

Η κινητική ενέργεια (λόγω περιστροφής) δίνεται από τον τύπο $K = \frac{1}{2}I\omega^2$, οπότε για τις χρονικές στιγμές t_1 και t_2 ισχύει:

$$\left. \begin{array}{l} K_1 = \frac{1}{2}I\omega_1^2 \\ K_2 = \frac{1}{2}I\omega_2^2 \end{array} \right\} \xrightarrow{\div} \frac{K_1}{K_2} = \frac{\frac{1}{2}I\omega_1^2}{\frac{1}{2}I\omega_2^2} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{\omega_1^2}{\omega_2^2} \xrightarrow{(1)} \frac{K_1}{K_2} = \frac{\omega_1^2}{4\omega_1^2} \Rightarrow \frac{K_1}{K_2} = \frac{1}{4} \Rightarrow K_2 = 4K_1 \quad (2)$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για το χρονικό διάστημα $0 - t_1$ θα υπολογιστεί από το θεώρημα έργου - ενέργειας:

$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow K_1 - 0 = W_1 \Rightarrow K_1 = W_1 \quad (3)$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για το χρονικό διάστημα $0 - t_2$ θα υπολογιστεί ομοίως από το θεώρημα έργου - ενέργειας:

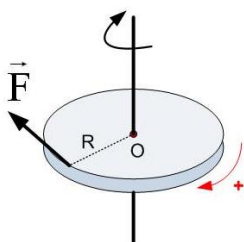
$$K_{\text{τελ}} - K_{\text{αρχ}} = \Sigma W \Rightarrow K_2 - 0 = W_2 \Rightarrow W_2 = K_2 \xrightarrow{(2)} W_2 = 4K_1 \xrightarrow{(3)} W_2 = 4W_1$$

Με αντικατάσταση $W_1 = 10\text{J}$ προκύπτει: $W_2 = 4 \cdot 10\text{J} \Rightarrow W_2 = 40\text{J}$

ΘΕΜΑ Γ

Άσκηση 1.

Οριζόντιος ομογενής και συμπαγής δίσκος, μάζας $M = 6\text{kg}$ και ακτίνας $R = 1\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του (O). Αρχικά ο δίσκος ηρεμεί. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ ασκούμε στο δίσκο δύναμη $\vec{F}$ σταθερού μέτρου 6N η οποία εφαπτεται συνεχώς στην περιφέρειά του, οπότε ο δίσκος αρχίζει να περιστρέφεται.



Κάποια χρονική στιγμή t_1 ο δίσκος έχει στροφορμή μέτρου $L = 60\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}$. Για αυτή τη χρονική στιγμή t_1 να υπολογίσετε:

- το έργο της δύναμης $\vec{F}$ στο χρονικό διάστημα από $t = 0$ έως $t = t_1$.
- τον αριθμό των στροφών που έχει διαγράψει ο δίσκος στο παραπάνω χρονικό διάστημα.
- το ρυθμό με τον οποίο η δύναμη $\vec{F}$ μεταφέρει ενέργεια στο δίσκο τη χρονική στιγμή t_1 .
- το ρυθμό μεταβολής της κινητικής του ενέργειας τη χρονική στιγμή t_1 . Τι εκφράζει ο ρυθμός αυτός;

Δίνονται: $\frac{50}{\pi} \approx 16$ και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του

$$I = \frac{1}{2}MR^2.$$

Λύση

- α) Η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς τον άξονα περιστροφής του είναι:

$$I = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow I = \frac{1}{2}6\text{kg} \cdot 1\text{m}^2 \Rightarrow I = 3\text{kg} \cdot \text{m}^2.$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$L = I\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{I} \Rightarrow \omega = \frac{60\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-1}}{3\text{kg} \cdot \text{m}^2} \Rightarrow \omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Η κινητική ενέργεια (λόγω περιστροφής) είναι:

$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow K = \frac{1}{2} 3 \text{kg} \cdot \text{m}^2 \left(20 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow K = 600 \text{J}$$

Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ θα υπολογιστεί από το θεώρημα έργου - ενέργειας για το χρονικό διάστημα $0 - t_1$:

$$K_{\tau} - K_{\alpha} = \Sigma W \Rightarrow K_{\tau} - 0 = W \Rightarrow W = 600 \text{J}$$

β) Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ είναι συνεχώς εφαπτόμενη στο δίσκο και έχει σταθερό μέτρο, το έργο της, για περιστροφή του δίσκου κατά γωνία θ , δίνεται από τον τύπο: $W = \tau_F \cdot \theta$, όπου $\tau_F = F \cdot R$ το μέτρο της ροπής της δύναμης $\vec{F}$.

$$\text{Άρα } W = \tau_F \cdot \theta \Rightarrow W = FR \cdot \theta \Rightarrow \theta = \frac{W}{FR} \Rightarrow \theta = \frac{600 \text{J}}{6 \text{N} \cdot 1 \text{m}} \Rightarrow \theta = 100 \text{rad}$$

Ο αριθμός των στροφών δίνεται από τον τύπο:

$$N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{100}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{50}{\pi} \Rightarrow N \approx 16 \text{ περιστροφές}$$

γ) Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη $\vec{F}$ μεταφέρει ενέργεια στο δίσκο είναι:

$$\frac{dW}{dt} = \tau_F \cdot \omega \Rightarrow \frac{dW}{dt} = FR \cdot \omega \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 6 \text{N} \cdot 1 \text{m} \cdot 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 120 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

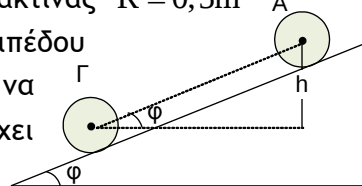
δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής του ενέργειας είναι:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \tau_F \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \frac{dW}{dt} \Rightarrow \frac{dK}{dt} = 120 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας εκφράζει το πόσο γρήγορα μεταβάλλεται η κινητική ενέργεια του σώματος. Επειδή στο δίσκο δεν ασκείται άλλη δύναμη, όλη η ενέργεια που μεταφέρει η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ μετατρέπεται σε κινητική και μάλιστα με τον ίδιο ρυθμό.

Άσκηση 2.

Μια ομογενής και συμπαγής σφαίρα μάζας $M=4\text{kg}$ και ακτίνας $R=0,5\text{m}$ αφήνεται (θέση Α) να κυλήσει κατά μήκος ενός πλάγιου επιπέδου γωνίας κλίσης φ , με $\eta\mu\varphi=0,35$. Η σφαίρα κυλίζει χωρίς να ολισθαίνει. Τη στιγμή που το κέντρο μάζας της σφαίρας έχει κατακόρυφη μετατόπιση $h=7\text{m}$ (θέση Γ), να υπολογίσετε:



- το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας.
- τον αριθμό των περιστροφών που έχει εκτελέσει μέχρι τότε.
- το λόγο της μεταφορικής προς την περιστροφική κινητική ενέργεια της σφαίρας σε κάποια χρονική στιγμή, κατά τη διάρκεια της κίνησής της.
- Για τη μετατόπιση της σφαίρας από τη θέση Α έως τη θέση Γ να υπολογίσετε με τη βοήθεια του θεωρήματος έργου-ενέργειας το έργο της στατικής τριβής

δ1) κατά τη μεταφορική κίνηση.

δ2) κατά τη περιστροφική κίνηση. Τι παρατηρείτε;

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονά της $I=\frac{2}{5}MR^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g=10\text{ m/s}^2$.

Λύση

α) Στη σφαίρα οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές (βάρος). Η στατική τριβή δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της (ασκείται συνεχώς σε σημείο που έχει ταχύτητα μηδέν), άρα για την σύνθετη κίνηση συνολικά δεν παράγει έργο. Επομένως ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Θ.Δ.Μ.Ε.)

Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε αυτό που περνάει από το κέντρο μάζας της σφαίρας όταν βρίσκεται στη θέση Γ.

$$E_{\mu\eta\chi.\alpha\rho\chi.} = E_{\mu\eta\chi.\tau\epsilon\lambda.} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow 0 + Mgh = \frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}Mv^2 \Rightarrow$$

$$Mgh = \frac{1}{2} \frac{2}{5} MR^2 \omega^2 + \frac{1}{2} Mv^2 \Rightarrow gh = \frac{1}{5} v^2 + \frac{1}{2} v^2 \Rightarrow gh = \frac{7}{10} v^2 \Rightarrow v = \sqrt{\frac{10}{7} gh} \Rightarrow$$

$$v = \sqrt{\frac{10}{7} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 7\text{m}} \Rightarrow v = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

Η γωνιακή ταχύτητα είναι:

$$v = \omega R \Rightarrow \omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \omega = \frac{10 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,5\text{m}} \Rightarrow \omega = 20 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) Το συνολικό τόξο (άρα και η γωνία) που θα διαγράψει η σφαίρα θα ισούται με τη μετατόπιση ΑΓ.

$$\text{Είναι } \eta\mu\varphi = \frac{h}{A\Gamma} \Rightarrow A\Gamma = \frac{h}{\eta\mu\varphi} \Rightarrow A\Gamma = \frac{7\text{m}}{0,35} \Rightarrow A\Gamma = 20\text{m}$$

άρα:

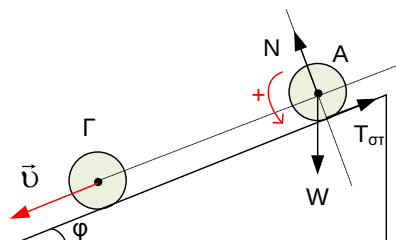
$$S = A\Gamma = R\theta \Rightarrow \theta = \frac{A\Gamma}{R} \Rightarrow \theta = \frac{20\text{m}}{0,5\text{m}} \Rightarrow \theta = 40\text{rad}$$

$$\text{και ο αριθμός των περιστροφών είναι: } N = \frac{\theta}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{40}{2\pi} \Rightarrow N = \frac{20}{\pi}$$

γ) Είναι:

$$K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} M R^2 \omega^2 \Rightarrow K_{\text{περ}} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} M v^2 \Rightarrow K_{\text{περ}} = \frac{2}{5} K_{\text{μετ}} \Rightarrow \frac{K_{\text{μετ}}}{K_{\text{περ}}} = \frac{5}{2}$$

δ) Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας από τη θέση Α έως τη θέση Γ για:



δ1) τη μεταφορική κίνηση:

$$K_{\text{μετ},\tau} - K_{\text{μετ},\alpha} = \Sigma W \Rightarrow K_{\text{μετ},\tau} - 0 = W_W + W_{T_{\sigma\tau}} + W_N \xrightarrow{W_N=0}$$

$$W_{T_{\sigma\tau}} = K_{\text{μετ},\tau} - W_W \Rightarrow W_{T_{\sigma\tau}} = \frac{1}{2} M v^2 - Mgh \Rightarrow$$

$$W_{T_{\sigma\tau}} = \frac{1}{2} 4\text{kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 - 4\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 7\text{m} \Rightarrow$$

$$W_{T_{\sigma\tau}} = 200\text{J} - 280\text{J} \Rightarrow W_{T_{\sigma\tau}} = -80\text{J}$$

δ2) την περιστροφική κίνηση:

Το βάρος W και η κάθετη αντίδραση N διέρχονται από το κέντρο της σφαίρας, οπότε οι ροπές τους είναι μηδέν, άρα και το έργο τους είναι μηδέν.

$$K_{περ.,τ} - K_{περ.,α} = \Sigma W \Rightarrow K_{περ.,τ} - 0 = W_W + W'_{T_{στ}} + W_N \xrightarrow{W_N=0, W_W=0}$$

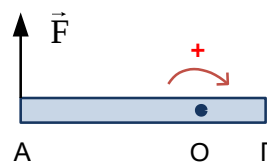
$$W'_{T_{στ}} = K_{περ.,τ} \Rightarrow W'_{T_{στ}} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} MR^2 \omega^2 \Rightarrow W'_{T_{στ}} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} Mv^2 \Rightarrow$$

$$W'_{T_{στ}} = \frac{1}{2} \frac{2}{5} 4\text{kg} \cdot \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2 \Rightarrow W'_{T_{στ}} = 80\text{J}$$

Παρατηρούμε ότι το συνολικό έργο της στατικής τριβής είναι μηδέν.

Άσκηση 3.

Η ομογενής ράβδος του σχήματος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές, γύρω από σταθερό κατακόρυφο άξονα που περνά από το σημείο O. Η ράβδος έχει μάζα $M = 3\text{kg}$ και μήκος $L = 3\text{m}$. Στη ράβδο ασκείται συνεχώς



μια οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ η οποία έχει σταθερό μέτρο $F = 10\text{N}$ και είναι A O Γ
διαρκώς κάθετη στη ράβδο, στο άκρο της A. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ η ράβδος είναι ακίνητη. Να υπολογιστούν:

- α) Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς το σημείο O.
- β) Το έργο που παράγει η δύναμη στη διάρκεια της πρώτης περιστροφής.
- γ) Η κινητική ενέργεια που έχει η ράβδος μετά από δύο περιστροφές.
- δ) Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο στο τέλος της δεύτερης περιστροφής.

Δίνονται: $\sqrt{\frac{160\pi}{3}} \approx 13$. Η απόσταση $OA = 2\text{m}$ και η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος στη ράβδο
 $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$.

Λύση

α) Επειδή η ράβδος είναι ομογενής το κέντρο μάζας της είναι στο μέσον της K.

Η απόσταση $(KO) = d$ είναι:

$$(KO) = (AO) - (AK) \Rightarrow (KO) = (AO) - \frac{L}{2} \Rightarrow (KO) = 2\text{m} - \frac{3}{2}\text{m} \Rightarrow (KO) = d = 0,5\text{m}$$

Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το σημείο O θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Steiner:

$$I = I_{\text{cm}} + Md^2 = \frac{1}{12}ML^2 + Md^2 \Rightarrow I = \frac{1}{12}3\text{kg}(3\text{m})^2 + 3\text{kg}(0,5\text{m})^2 \Rightarrow I = 2,25\text{kg} \cdot \text{m}^2 + 0,75\text{kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow I = 3\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

β) Η ροπή της δύναμης $\vec{F}$ ως προς το σημείο O έχει μέτρο:

$$\tau = F \cdot (AO) \Rightarrow \tau = 10\text{N} \cdot 2\text{m} \Rightarrow \tau = 20\text{Nm}$$

Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ έχει σταθερό μέτρο και είναι διαρκώς κάθετη στη ράβδο δημιουργεί σταθερή ροπή, άρα το έργο της είναι: $W = \tau \cdot \theta$. Για μια περιστροφή η γωνία $\theta = 2\pi \text{ rad}$, άρα:

$$W = \tau \cdot \theta \Rightarrow W = 20 \text{ Nm} \cdot 2\pi \text{ rad} \Rightarrow W = 40\pi \text{ J}$$

γ) Μετά από δύο περιστροφές η ράβδος θα έχει διαγράψει γωνία:

$$\theta' = 2 \cdot 2\pi \text{ rad} = 4\pi \text{ rad} \text{ οπότε παράγεται έργο:}$$

$$W' = \tau \cdot \theta' \Rightarrow W' = 20 \text{ Nm} \cdot 4\pi \text{ rad} \Rightarrow W' = 80\pi \text{ J}$$

Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου - ενέργειας από την αρχική θέση που βρισκόταν η ράβδος ($t=0$) μέχρι τη τελική θέση που θα έχει μετά από δύο περιστροφές.

$$K_{\tau} - K_{\alpha} = \Sigma W \Rightarrow K_{\tau} - 0 = W' \Rightarrow K_{\tau} = 80\pi \text{ J}$$

δ) Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας στο τέλος της δεύτερης περιστροφής βρίσκεται από τον τύπο της κινητικής ενέργειας:

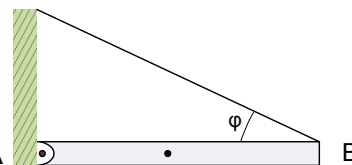
$$K = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2K}{I}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \cdot 80\pi \text{ J}}{3 \text{ kg} \cdot \text{m}^2}} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{160\pi}{3}} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 13 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Ο ρυθμός με τον οποίο η δύναμη μεταφέρει ενέργεια στη ράβδο είναι:

$$\frac{dW}{dt} = \tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 20 \text{ Nm} \cdot 13 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 260 \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

Άσκηση 4.

Η ράβδος AB είναι ομογενής και ισοπαχής με μήκος $L = 2\text{m}$ και μάζα $M = 3\text{Kg}$. Το άκρο A της ράβδου συνδέεται με άρθρωση σε κατακόρυφο τοίχο. Το άλλο άκρο της B συνδέεται με τον τοίχο με αβαρές νήμα που σχηματίζει γωνία $\varphi = 30^\circ$ με τη ράβδο, η οποία



ισορροπεί οριζόντια, όπως φαίνεται στο σχήμα.

- α) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης που ασκείται στη ράβδο από το νήμα.
- Κάποια στιγμή κόβουμε το νήμα στο άκρο B και η ράβδος αρχίζει να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από την άρθρωση σε κατακόρυφο επίπεδο. Να υπολογίσετε:
- β) Το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της ράβδου μόλις κοπεί το νήμα.
- γ) Την κινητική ενέργεια της ράβδου, τη στιγμή που διέρχεται από την κατακόρυφη θέση.
- δ) Σε ποια θέση της ράβδου, καθώς αυτή κινείται από την οριζόντια αρχική της θέση και μέχρι να διέλθει από την κατακόρυφη θέση, ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της είναι στιγμιαία μηδέν.

Δίνονται:

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και είναι κάθετος σε αυτή $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12}ML^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και $\eta\mu 30 = \frac{1}{2}$.

Λύση

α) Το βάρος της ράβδου, επειδή η ράβδος είναι ομογενής, ασκείται στο μέσον της και έχει μέτρο:

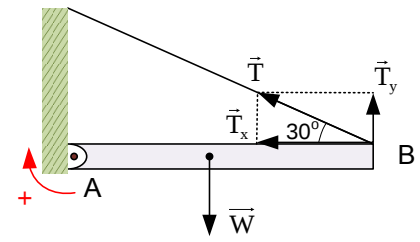
$$W = Mg \Rightarrow W = 3\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow W = 30\text{N}$$

Έστω T η τάση του νήματος που ασκείται στη ράβδο από το νήμα. Αναλύουμε την T σε δύο συνιστώσες μία κάθετη στη ράβδο (T_y) και μία παράλληλη στη ράβδο (T_x) η οποία, αν θεωρήσουμε ότι η ράβδος έχει πολύ μικρό πάχος, εμφανίζει μηδενική ροπή ως προς το A.

Επειδή η ράβδος ισορροπεί η συνισταμένη των ροπών όλων των δυνάμεων, ως προς τον άξονα περιστροφής είναι μηδέν. Θετική φορά θεωρούμε τη φορά κίνησης των δεικτών του ρολογιού.

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow \tau_W + \tau_T = 0 \Rightarrow W \frac{L}{2} - T_y \cdot L + T_x \cdot 0 = 0 \Rightarrow T_y = \frac{W}{2}$$

$$T \cdot \eta\mu 30 = \frac{W}{2} \Rightarrow T \cdot \frac{1}{2} = \frac{W}{2} \Rightarrow T = W \Rightarrow T = 30\text{N}$$



β) Όταν το νήμα κόβεται, η ράβδος αρχίζει να κατέρχεται εκτελώντας στροφική κίνηση γύρω από τον άξονα που περνάει από το άκρο της Α.

Για να βρούμε τη ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα που διέρχεται από το άκρο της Α, θα εφαρμόσουμε το θεώρημα Steiner:

$$I = I_{\text{cm}} + M \left(\frac{L}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} ML^2 + \frac{1}{4} ML^2 \Rightarrow I = \frac{1}{3} ML^2$$

Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη στροφική κίνηση γύρω από το Α όταν η ράβδος είναι ακόμα οριζόντια:

$$\Sigma \tau = I \cdot \alpha_\gamma \Rightarrow \tau_W = I \cdot a_\gamma \Rightarrow W \frac{L}{2} = I \cdot a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{W \cdot L}{2I} \Rightarrow a_\gamma = \frac{Mg \cdot L}{2 \cdot \frac{1}{3} ML^2} \Rightarrow$$

$$a_\gamma = \frac{3g}{2L} \Rightarrow a_\gamma = \frac{3 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{2 \cdot 2\text{m}} \Rightarrow a_\gamma = 7,5 \frac{\text{rad}}{\text{s}^2}$$

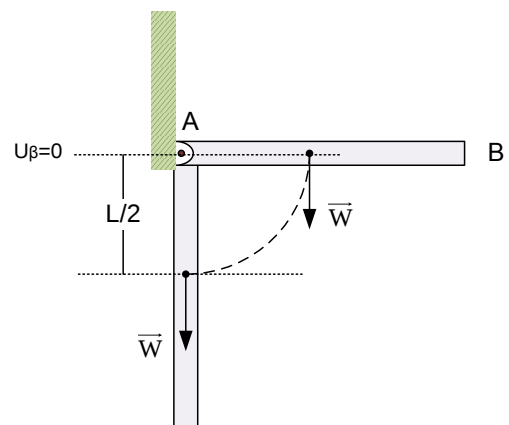
γ) Εφόσον στη ράβδο οι δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές (βάρος) ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Θ.Δ.Μ.Ε.) το οποίο εφαρμόζουμε για την αρχική (οριζόντια) και την τελική (κατακόρυφη) θέση της ράβδου.

Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας λόγω βάρους ($U_B=0$) επιλέγουμε το επίπεδο που περνάει από την αρχική οριζόντια θέση της ράβδου.

$$E_{\text{μηχ.αρχ.}} = E_{\text{μηχ.τελ.}} \Rightarrow K_\alpha + U_\alpha = K_\tau + U_\tau \Rightarrow$$

$$0 + 0 = K_\tau - Mg \frac{L}{2} \Rightarrow K_\tau = Mg \frac{L}{2} \Rightarrow$$

$$K_\tau = 3 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \frac{2\text{m}}{2} \Rightarrow K_\tau = 30\text{J}$$



δ) Ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας της δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{dK}{dt} = \Sigma \tau \cdot \omega \Rightarrow \frac{dK}{dt} = \tau_w \cdot \omega.$$

Οπότε για να είναι μηδέν πρέπει: $\omega=0$ ή $\tau_w=0$.

Η γωνιακή ταχύτητα είναι μηδέν ($\omega=0$) στην αρχική θέση της ράβδου.

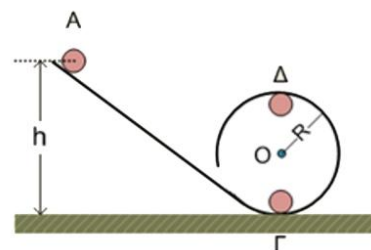
Η ροπή του βάρους είναι μηδέν όταν η ράβδος βρίσκεται στην κατακόρυφη θέση, γιατί ο φορέας του βάρους περνά από το σημείο Α του άξονα περιστροφής, οπότε δεν έχει ροπή.

Άρα ο ρυθμός μεταβολής της κινητικής ενέργειας μηδενίζεται στιγμιαία στην οριζόντια και στη κατακόρυφη θέση της ράβδου.

ΘΕΜΑ Δ

Πρόβλημα 1.

Η ομογενής και συμπαγής σφαίρα του σχήματος έχει μάζα $m = 1\text{kg}$ και ακτίνα $r = 0,2\text{m}$ και αφήνεται από ύψος h , να κινηθεί κατά μήκος κεκλιμένου επιπέδου και στη συνέχεια στο εσωτερικό της κυκλικής στεφάνης ακτίνας $R = 10,2\text{m}$. Η σφαίρα κυλίνεται συνεχώς χωρίς να ολισθαίνει. Για να κάνει η σφαίρα με ασφάλεια ανακύκλωση, να υπολογιστεί:

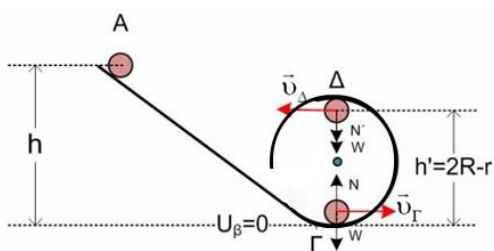


- α) το μέτρο της ελάχιστης τιμής της ταχύτητάς της στο σημείο Δ.
- β) το μέτρο της ελάχιστης γωνιακής ταχύτητας ως προς τον άξονα περιστροφής της, στο σημείο Γ.
- γ) το μέτρο της κάθετης δύναμης που δέχεται από το οριζόντιο επίπεδο στη θέση Γ αν από τη θέση αυτή διέρχεται με γωνιακή ταχύτητα ίση με αυτή που υπολογίσατε στο ερώτημα β.
- δ) το ελάχιστο ύψος h .

Δίνονται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονά της $I_{\text{cm}} = \frac{2}{5}mr^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$ και $\sqrt{\frac{27}{7}} \approx 1,96$.

Λύση

α) Στο εσωτερικό της στεφάνης το κέντρο μάζας της μικρής σφαίρας κάνει κυκλική κίνηση με ακτίνα:



$$R' = R - r \quad (1)$$

Με αντικατάσταση προκύπτει:

$$R' = 10,2\text{m} - 0,2\text{m} \Rightarrow R' = 10\text{m}.$$

Στο σημείο Δ, στη διεύθυνση της ακτίνας (κατακόρυφος) ασκούνται στη σφαίρα δύο δυνάμεις, το βάρος $\vec{W}$ και η κάθετη αντίδραση από τη στεφάνη $\vec{N}'$. Για να κάνει το κέντρο μάζας της μικρής σφαίρας κυκλική κίνηση πρέπει η συνισταμένη των δυνάμεων στη διεύθυνση της ακτίνας να είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη.

Θεωρώντας θετική φορά προς το κέντρο (Ο) της κυκλικής τροχιάς, έχουμε:

$$\Sigma \vec{F}_R = \vec{F}_\kappa \Rightarrow W + N' = \frac{mv_\Delta^2}{R'} \Rightarrow N' = \frac{mv_\Delta^2}{R'} - W$$

Το μέτρο της δύναμης $\vec{N}'$ πρέπει να είναι θετικό ή μηδέν ($N' \geq 0$). Άρα:

$$\frac{mv_\Delta^2}{R'} - W \geq 0 \Rightarrow \frac{mv_\Delta^2}{R'} \geq mg \Rightarrow v_\Delta^2 \geq R'g \Rightarrow v_\Delta \geq \sqrt{R'g} \Rightarrow v_\Delta \geq \sqrt{10m \cdot 10 \frac{m}{s^2}} \Rightarrow v_\Delta \geq \sqrt{100 \frac{m^2}{s^2}} \Rightarrow v_\Delta \geq 10 \frac{m}{s}$$

Άρα ασφαλή ανακύκλωση έχουμε όταν $v_\Delta \geq 10 \frac{m}{s}$, οπότε η ελάχιστη τιμή της ταχύτητας

της σφαίρας στο σημείο Δ είναι $v_{\Delta, \min} = 10 \frac{m}{s}$.

β) Επειδή στη σφαίρα οι εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές (το βάρος της σφαίρας) ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Θ.Δ.Μ.Ε.). Θα το εφαρμόσουμε για τις θέσεις Γ και Δ.

Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε αυτό που περνάει από το οριζόντιο επίπεδο.

$$E_{\mu\eta\chi.\alpha\rho\chi.} = E_{\mu\eta\chi.\tau\epsilon\lambda.} \Rightarrow K_\alpha + U_\alpha = K_\tau + U_\tau \Rightarrow$$

$$mgr + \frac{1}{2}mv_\Gamma^2 + \frac{1}{2}I\omega_\Gamma^2 = mgh' + \frac{1}{2}mv_\Delta^2 + \frac{1}{2}I\omega_\Delta^2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}mv_\Gamma^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega_\Gamma^2 = mg(h' - r) + \frac{1}{2}mv_\Delta^2 + \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{5}mr^2\omega_\Delta^2 \xrightarrow[h\lambda.\sigma\chi\eta\mu\alpha]{h'=2R-r}$$

$$mv_\Gamma^2 + \frac{2}{5}mv_\Gamma^2 = 2mg(2R - 2r) + mv_\Delta^2 + \frac{2}{5}mv_\Delta^2 \Rightarrow$$

$$v_\Gamma^2 + \frac{2}{5}v_\Gamma^2 = 4g(R - r) + v_\Delta^2 + \frac{2}{5}v_\Delta^2 \Rightarrow \frac{7}{5}v_\Gamma^2 = 4g(R - r) + \frac{7}{5}v_\Delta^2 \xrightarrow{(1)}$$

$$\frac{7}{5}v_\Gamma^2 = 4gR' + \frac{7}{5}v_\Delta^2 \Rightarrow v_\Gamma^2 = \frac{20}{7}gR' + v_\Delta^2 \Rightarrow v_\Gamma = \sqrt{\frac{20}{7}gR' + v_\Delta^2}$$

Με αντικατάσταση των $R' = 10m$, $g = 10 \text{ m/s}^2$ και $v_{\Delta, \min} = 10 \frac{m}{s}$ προκύπτει:

$$v_{\Gamma} = \sqrt{\frac{20}{7} 10^2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} 10\text{m} + \left(10 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2} \Rightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{\frac{20}{7} 10^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2} + 10^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \Rightarrow$$

$$v_{\Gamma} = \sqrt{\frac{27}{7} 10^2 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}} \Rightarrow v_{\Gamma} = \sqrt{\frac{27}{7}} 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\Gamma} \approx 1,96 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}} \Rightarrow v_{\Gamma} \approx 19,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$\text{Ισχύει όμως: } v_{\Gamma} = \omega_{\Gamma} r \Rightarrow \omega_{\Gamma} = \frac{v_{\Gamma}}{r} \Rightarrow \omega_{\Gamma} = \frac{19,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,2\text{m}} \Rightarrow \omega_{\Gamma} = 98 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

γ) Στο σημείο Γ το κέντρο μάζας της μικρής σφαίρας έχει αρχίσει την κυκλική κίνηση, άρα η συνισταμένη των δυνάμεων στη διεύθυνση της ακτίνας πρέπει να είναι ίση με την κεντρομόλο δύναμη.

(Θετική φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς). Δηλαδή:

$$\Sigma \vec{F}_R = \vec{F}_c \Rightarrow N - W = \frac{mv_{\Gamma}^2}{R'} \Rightarrow N = W + \frac{mv_{\Gamma}^2}{R'} \Rightarrow N = mg + \frac{mv_{\Gamma}^2}{R'} \Rightarrow$$

$$N = 1\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} + \frac{1\text{kg} \cdot \left(19,6 \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^2}{10\text{m}} \Rightarrow N \approx 10\text{N} + 38,4\text{N} \Rightarrow N \approx 48,4\text{N}$$

δ) Επειδή στη σφαίρα οι εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές (το βάρος της σφαίρας) ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Θ.Δ.Μ.Ε.). Θα το εφαρμόσουμε για τις θέσεις Α και Γ.

Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε αυτό που περνάει από το οριζόντιο επίπεδο.

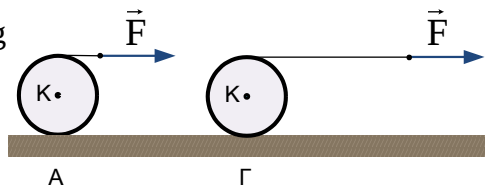
$$E_{\text{μηχ.αρχ.}} = E_{\text{μηχ.τελ.}} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow mgh + 0 = \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 + \frac{1}{2}I\omega_{\Gamma}^2 + mgr \Rightarrow$$

$$mgh + 0 = \frac{1}{2}mv_{\Gamma}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5}mr^2\omega_{\Gamma}^2 + mgr \Rightarrow gh + 0 = \frac{1}{2}v_{\Gamma}^2 + \frac{1}{2} \frac{2}{5}r^2\omega_{\Gamma}^2 + gr \Rightarrow$$

$$gh = \frac{1}{2}v_{\Gamma}^2 + \frac{2}{10}v_{\Gamma}^2 + gr \Rightarrow h = \frac{7}{10} \frac{v_{\Gamma}^2}{g} + r \Rightarrow h = \frac{7}{10} \frac{19,6^2}{10} \text{m} + 0,2\text{m} \Rightarrow h \approx 26,9\text{m} + 0,2 \approx 27,1\text{m}$$

Πρόβλημα 2.

Στην επιφάνεια ενός ομογενούς κυλίνδρου μάζας $m = 2\text{kg}$ και ακτίνας $R = 0,3\text{m}$, έχουμε τυλίξει λεπτό σχοινί αμελητέας μάζας, το ελεύθερο άκρο του οποίου έλκεται με σταθερή οριζόντια δύναμη $\vec{F}$ μέτρου 6N , όπως φαίνεται στο σχήμα. Το σχοινί ξετυλίγεται χωρίς ολίσθηση, περιστρέφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ο κύλινδρος μπορεί να κυλίεται χωρίς ολίσθηση και αρχικά ηρεμούσε στη θέση Α. Όταν βρεθεί στη θέση Γ έχει ξετυλιχθεί σχοινί τόσο, ώστε το σημείο εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$ να έχει μετατοπιστεί κατά $L = 4\text{m}$.



Να υπολογισθεί:

α) το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου.

β) η στατική τριβή.

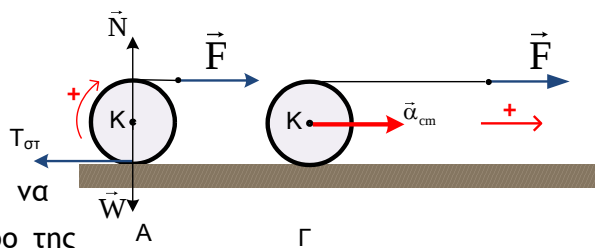
γ) η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ στη θέση Γ.

δ) το ποσοστό της κινητικής του ενέργειας που είναι στροφική στη θέση Γ.

Δίνονται: η επιτάχυνση βαρύτητας $g = 10\text{m/s}^2$ και η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου ως προς τον άξονα περιστροφής του $I = \frac{1}{2}mR^2$.

Λύση

α) Έστω ότι η στατική τριβή έχει φορά προς τα αριστερά. Επειδή ο κύλινδρος κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει ισχύει: $\alpha_{\text{cm}} = a_{\gamma}R$, όπου α_{cm} το μέτρο της επιτάχυνσης του κέντρου μάζας του κυλίνδρου και a_{γ} το μέτρο της γωνιακής του επιτάχυνσης.



Ο κύλινδρος εκτελεί μια σύνθετη κίνηση που μπορεί να μελετηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής. Εφαρμόζουμε το θεμελιώδη νόμο της Μηχανικής για τη μεταφορική κίνηση του κυλίνδρου (θετική φορά προς τα δεξιά):

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{\alpha}_{\text{cm}} \Rightarrow F - T_{\sigma\tau} = m\alpha_{\text{cm}} \quad (1)$$

και το θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης (θετική φορά περιστροφής όπως φαίνεται στο σχήμα)

$$\Sigma \tau = I a_{\gamma} \Rightarrow FR + T_{\sigma\tau}R = I a_{\gamma} \Rightarrow FR + T_{\sigma\tau}R = \frac{1}{2}mR^2 a_{\gamma} \xrightarrow{\alpha_{\text{cm}} = a_{\gamma}R} F + T_{\sigma\tau} = \frac{1}{2}m\alpha_{\text{cm}} \quad (2)$$

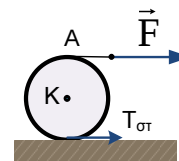
Προσθέτουμε τις (1) και (2) κατά μέλη και έχουμε:

$$2F = \frac{3}{2}m\alpha_{\text{cm}} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{4F}{3m} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = \frac{4 \cdot 6\text{N}}{3 \cdot 2\text{kg}} \Rightarrow \alpha_{\text{cm}} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

β) Από τη σχέση (1) έχουμε:

$$F - T_{στ} = m\alpha_{cm} \Rightarrow T_{στ} = F - m\alpha_{cm} \Rightarrow T_{στ} = 6N - 2kg \cdot 4 \frac{m}{s^2} \Rightarrow T_{στ} = -2N$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η στατική τριβή έχει φορά αντίθετη από αυτήν του αρχικού σχήματος. Άρα οι δυνάμεις είναι όπως στο διπλανό σχήμα.



γ) Η στατική τριβή δε μετατοπίζει το σημείο εφαρμογής της (ασκείται συνεχώς σε σημείο που έχει ταχύτητα μηδέν), άρα για τη σύνθετη κίνηση συνολικά δεν παράγει έργο. Εφαρμόζουμε το θεώρημα έργου ενέργειας για αυτή την μετατόπιση:

$$K_{\tau} - K_{\alpha} = \Sigma W \Rightarrow K_{\tau} - 0 = W_F + W_{T_{στ}} \Rightarrow K_{\tau} - 0 = W_F \Rightarrow \frac{1}{2} I\omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 = W_F \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 + \frac{1}{2} m v_{cm}^2 = FL \xrightarrow{v_{cm} = \omega R} m v_{cm}^2 + 2 m v_{cm}^2 = 4FL \Rightarrow 3 m v_{cm}^2 = 4FL \Rightarrow$$

$$v_{cm} = \sqrt{\frac{4FL}{3m}} \Rightarrow v_{cm} = \sqrt{\frac{4 \cdot 6N \cdot 4m}{3 \cdot 2kg}} \Rightarrow v_{cm} = 4 \frac{m}{s}$$

Η ταχύτητα $\vec{v}$ του σημείου εφαρμογής της δύναμης $\vec{F}$ είναι ίση με τη ταχύτητα $\vec{v}_A$ του σημείου A της περιφέρειας του κυλίνδρου η οποία είναι διπλάσια της ταχύτητας του κέντρου μάζας του κυλίνδρου. Δηλαδή $\vec{v}_A = 2\vec{v}_{cm}$, άρα $v = 2v_{cm} = 8 \frac{m}{s}$.

Η ισχύς της δύναμης $\vec{F}$ στη θέση Γ είναι:

$$P_F = \frac{dW}{dt} \Rightarrow P_F = \frac{F \cdot dx}{dt} \Rightarrow P_F = F \cdot v \Rightarrow P_F = 6N \cdot 8 \frac{m}{s} \Rightarrow P_F = 48W$$

δ) Η κινητική ενέργεια λόγω περιστροφής του κυλίνδρου είναι:

$$K_{\pi\epsilon\rho} = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow K_{\pi\epsilon\rho} = \frac{1}{2} \frac{1}{2} m R^2 \omega^2 \Rightarrow K_{\pi\epsilon\rho} = \frac{1}{4} m v_{cm}^2$$

και η κινητική ενέργεια λόγω μεταφορικής κίνησης είναι:

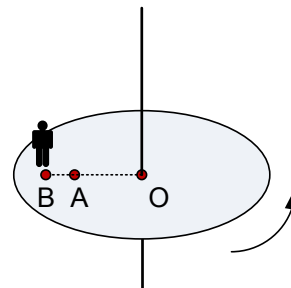
$$K_{\mu\epsilon\tau} = \frac{1}{2} m v_{cm}^2$$

Το ποσοστό της κινητικής του ενέργειας στη θέση Γ, που οφείλεται στη περιστροφή του, είναι:

$$\frac{K_{\pi\epsilon\rho}}{K_{o\lambda}}100\% = \frac{K_{\pi\epsilon\rho}}{K_{\pi\epsilon\rho} + K_{\mu\epsilon\tau}}100\% = \frac{\frac{1}{4}m\upsilon_{\text{cm}}^2}{\frac{1}{2}m\upsilon_{\text{cm}}^2 + \frac{1}{4}m\upsilon_{\text{cm}}^2}100\% = \frac{\frac{1}{4}m\upsilon_{\text{cm}}^2}{\frac{3}{4}m\upsilon_{\text{cm}}^2}100\% = \frac{1}{3}100\% = 33,3\%$$

Πρόβλημα 3.

Ο δίσκος του σχήματος είναι οριζόντιος, έχει μάζα $M=50\text{kg}$ και ακτίνα $R=4\text{m}$. Στη θέση B του δίσκου βρίσκεται ένα παιδί με μάζα $m=40\text{kg}$ και το σύστημα παιδί - δίσκος περιστρέφεται χωρίς τριβές, με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=5,6\text{rad/s}$, γύρω από κατακόρυφο άξονα που διέρχεται από το κέντρο του δίσκου O. Αν το παιδί μετακινηθεί από τη θέση B στη θέση A του δίσκου (βλέπε σχήμα), τότε η γωνιακή ταχύτητα του δίσκου γίνεται ω_2 . (Να θεωρήσετε το παιδί ως σημειακή μάζα).



α) Να υπολογίσετε τη γωνιακή ταχύτητα ω_2 .

β) Να υπολογίσετε την μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος.

γ) Να υπολογίσετε το μέτρο της μεταβολής της στροφορμής του παιδιού.

δ) Που οφείλονται οι παραπάνω μεταβολές (στα ερωτήματα β και γ);

Δίνονται: οι αποστάσεις $AO=2\text{m}$, $BO=3\text{m}$ και η ροπή αδράνειας του δίσκου ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο του $I_{\text{cm}}=\frac{1}{2}MR^2$

Λύση

α) Η ροπή αδράνειας του συστήματος δίσκος-παιδί, ως προς τον άξονα περιστροφής, είναι:

αρχικά, όταν το παιδί είναι στη θέση B

$$I_1 = I_{\text{δίσκου}} + I_{\text{παιδιού}} \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}MR^2 + m(OB)^2 \Rightarrow I_1 = \frac{1}{2}50\text{kg} \cdot (4\text{m})^2 + 40\text{kg}(3\text{m})^2 \Rightarrow$$
$$I_1 = 400\text{kg} \cdot \text{m}^2 + 360\text{kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow I_1 = 760\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

όταν το παιδί πάει στη θέση A

$$I_2 = I_{\text{δίσκου}} + I'_{\text{παιδιού}} \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}MR^2 + m(OA)^2 \Rightarrow I_2 = \frac{1}{2}50\text{kg} \cdot (4\text{m})^2 + 40\text{kg}(2\text{m})^2 \Rightarrow$$
$$I_2 = 400\text{kg} \cdot \text{m}^2 + 160\text{kg} \cdot \text{m}^2 \Rightarrow I_2 = 560\text{kg} \cdot \text{m}^2$$

Επειδή στο σύστημα δεν ασκούνται εξωτερικές ροπές, ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής.

$$\Sigma \tau = 0 \Rightarrow L_{\alpha} = L_{\tau} \Rightarrow I_1 \cdot \omega_1 = I_2 \cdot \omega_2 \Rightarrow \omega_2 = \frac{I_1 \cdot \omega_1}{I_2} \Rightarrow \omega_2 = \frac{760\text{kg} \cdot \text{m}^2 \cdot 5,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}}{560\text{kg} \cdot \text{m}^2} \Rightarrow$$
$$\omega_2 = 7,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) Η κινητική ενέργεια του συστήματος δίνεται από τον τύπο: $K = \frac{1}{2} I \omega^2$

$$\text{αρχικά: } K_1 = \frac{1}{2} I_1 \omega_1^2 \Rightarrow K_1 = \frac{1}{2} 760 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \left(5,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow K_1 = 11916,8 \text{ J}$$

$$\text{τελικά: } K_2 = \frac{1}{2} I_2 \omega_2^2 \Rightarrow K_2 = \frac{1}{2} 560 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \left(7,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \right)^2 \Rightarrow K_2 = 16172,8 \text{ J}$$

Η μεταβολή της κινητικής ενέργειας του συστήματος είναι:

$$\Delta K = K_2 - K_1 \Rightarrow \Delta K = 16172,8 \text{ J} - 11916,8 \text{ J} \Rightarrow \Delta K = 4256 \text{ J}$$

γ) Το μέτρο της στροφορμής του παιδιού δίνεται από τον τύπο $L = I_{\pi} \omega$.

Αρχικά

είναι:

$$L_1 = I_{\pi} \omega_1 \Rightarrow L_1 = m \cdot (OB)^2 \omega_1 \Rightarrow L_1 = 40 \text{ Kg} \cdot (3\text{m})^2 5,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L_1 = 2016 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-1}$$

Τελικά

είναι:

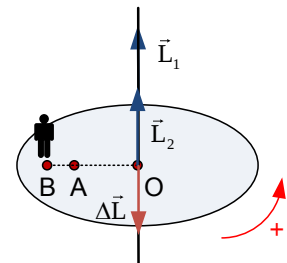
$$L_2 = I'_{\pi} \omega_2 \rightarrow L_2 = m \cdot (OA)^2 \omega_2 \rightarrow L_2 = 40 \text{ Kg} \cdot (2\text{m})^2 7,6 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \rightarrow L_2 = 1216 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-1}$$

Άρα η μεταβολή της στροφορμής του παιδιού είναι: $\Delta \vec{L} = \vec{L}_2 - \vec{L}_1$

Οι στροφορμές $\vec{L}_2$ και $\vec{L}_1$ έχουν τη διεύθυνση του άξονα περιστροφής και φορά προς τα πάνω (σύμφωνα με το κανόνα του δεξιού χεριού), άρα η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$\Delta L = L_2 - L_1 \Rightarrow \Delta L = 1216 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-1} - 2016 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-1} \Rightarrow$$

$$\Delta L = -800 \text{ Kg} \cdot \text{m}^2 \text{s}^{-1}$$



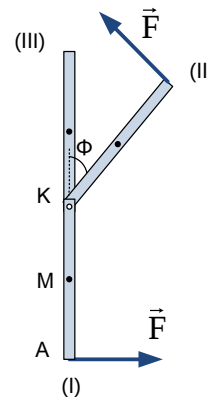
δ) Η αύξηση της κινητικής ενέργειας του συστήματος οφείλεται στην ενέργεια που δαπάνησε το παιδί για να πάει στο σημείο Α.

Η μεταβολή στη στροφορμή του παιδιού οφείλεται στη ροπή της στατικής τριβής που δέχεται το παιδί από το δίσκο.

Σημείωση: Η ελάττωση της στροφορμής του παιδιού είναι ίση με την αύξηση της στροφορμής του δίσκου, δεδομένου ότι η στατική τριβή μεταξύ παιδιού και δίσκου είναι εσωτερική δύναμη του συστήματος με αποτέλεσμα η συνολική στροφορμή του συστήματος να παραμένει σταθερή.

Πρόβλημα 4.

Η ομογενής ράβδος ΑΚ στηρίζεται στο άκρο της Κ μέσω άρθρωσης και αρχικά κρέμεται κατακόρυφα (θέση Ι). Η ράβδος ΑΚ έχει μήκος $L = 0,15\text{m}$ και μάζα $M = 2\text{kg}$. Στο άκρο της Α ασκούμε συνεχώς μια δύναμη $\vec{F}$ κάθετη στη ράβδο η οποία έχει σταθερό μέτρο, οπότε η ράβδος αρχίζει να ανεβαίνει. Όταν η ράβδος φτάσει στη θέση (II), όπου σχηματίζει γωνία $\varphi = 60^\circ$ με την κατακόρυφη, καταργείται η δύναμη $\vec{F}$ και η ράβδος φτάνει στην κατακόρυφη θέση (III), χωρίς γωνιακή ταχύτητα.



Να υπολογίσετε:

- Το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας της ράβδου ως προς τον άξονα περιστροφής της στη θέση (II).
- Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ για τη περιστροφή της ράβδου από τη θέση (I) στη θέση (II).
- Το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$.
- Το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια της ράβδου κατά τη περιστροφή της από τη θέση (I) στη θέση (II).

Δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς άξονα περιστροφής που περνά από το άκρο της Κ και είναι κάθετος σε αυτή: $I = \frac{1}{3}ML^2$, η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$ και $\sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Λύση

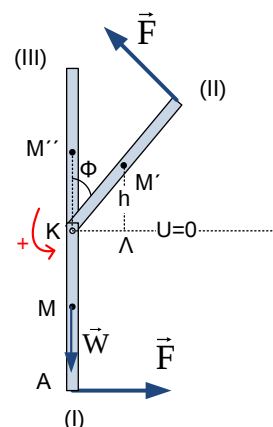
Κατά τη μετακίνηση της ράβδου από τη θέση (II) στη θέση (III) η μόνη δύναμη που παράγει έργο είναι το βάρος της W που είναι συντηρητική. Επομένως ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Θ.Δ.Μ.Ε.) το οποίο εφαρμόζουμε για τις θέσεις (II) και (III). Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας παίρνουμε αυτό που περνάει από την οριζόντια θέση της ράβδου.

$$E_{\text{μηχ.αρχ.}} = E_{\text{μηχ.τελ.}} \Rightarrow K_{\text{II}} + U_{\text{II}} = K_{\text{III}} + U_{\text{III}} \quad (1)$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + Mgh = 0 + Mg\frac{L}{2} \xrightarrow{h = \frac{L}{2}\sin\varphi}$$

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + Mg\frac{L}{2}\sin\varphi = Mg\frac{L}{2} \Rightarrow \frac{1}{3}ML^2\omega^2 + MgL\sin 60^\circ = MgL \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}L\omega^2 + \frac{g}{2} = g \Rightarrow \frac{1}{3}L\omega^2 = \frac{g}{2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{2L}} \Rightarrow$$



$$\omega = \sqrt{\frac{3 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{0,3\text{m}}} \Rightarrow \omega = \sqrt{100} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \omega = 10 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

β) Το έργο της δύναμης $\vec{F}$ κατά τη περιστροφή της ράβδου από τη θέση (I) στη θέση (II) είναι ίσο με την ενέργεια που προσφέρθηκε στη ράβδο για την περιστροφή αυτή. Θα χρησιμοποιήσουμε την αρχή διατήρησης της ενέργειας για τις θέσεις (I) και (II). Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας παίρνουμε αυτό που περνάει από την οριζόντια θέση της ράβδου.

$$E_{\text{προσφερόμενη}} + E_{\text{μηχ.αρχ.}} = E_{\text{μηχ.τελ.}} \Rightarrow W_F + K_I + U_I = K_{II} + U_{II} \xrightarrow{(1)} W_F + K_I + U_I = K_{III} + U_{III} \Rightarrow$$

$$W_F + 0 - Mg \frac{L}{2} = Mg \frac{L}{2} \Rightarrow W_F = MgL \Rightarrow W_F = 2\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,15\text{m} \Rightarrow W_F = 3\text{J}$$

γ) Επειδή η δύναμη $\vec{F}$ είναι συνεχώς κάθετη στη ράβδο και έχει σταθερό μέτρο, το έργο της ροπής της υπολογίζεται από τον τύπο:

$$W_F = \tau_F \theta \Rightarrow W_F = FL\theta \Rightarrow F = \frac{W_F}{L\theta} \xrightarrow{\theta = \pi - \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}} F = \frac{3\text{J}}{0,15\text{m} \frac{2\pi}{3}} \Rightarrow F = \frac{9}{0,3\pi} \text{N} \Rightarrow F = \frac{30}{\pi} \text{N}$$

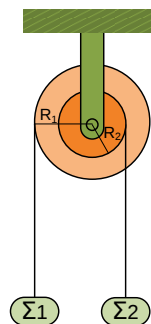
δ) Ο λόγος του έργου της δύναμης $\vec{F}$ που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια, προς το έργο της δύναμης κατά την περιστροφή της ράβδου από τη θέση (I) στη θέση (II) δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{\Delta K}{W_F} = \frac{K_{II} - K_I}{W_F} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2 - 0}{W_F} = \frac{\frac{1}{2} \frac{1}{3} ML^2 \omega^2}{W_F} = \frac{\frac{1}{6} \cdot 2 \cdot 0,15^2 \cdot 10^2}{3} = 0,25.$$

Άρα το ζητούμενο ποσοστό είναι: $\frac{\Delta K}{W_F} \cdot 100\% = 25\%$

Πρόβλημα 5.

Στο σχήμα φαίνεται σε τομή μια τροχαλία που αποτελείται από δύο ομοαξονικούς κυλίνδρους με ακτίνες $R_1 = 0,2\text{m}$ και $R_2 = 0,1\text{m}$, που μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα, ο οποίος διέρχεται από το κέντρο της τροχαλίας. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες $m_1 = m_2 = 2\text{kg}$ και είναι στερεωμένα μέσω νημάτων που είναι τυλιγμένα στους κυλίνδρους. Η τροχαλία και τα σώματα Σ_1 , Σ_2 είναι αρχικά ακίνητα και τα κέντρα μάζας των Σ_1 , Σ_2 βρίσκονται στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο. Τη χρονική στιγμή $t=0$ το σύστημα αφήνεται ελεύθερο να κινηθεί και τη χρονική στιγμή t_1 το σώμα Σ_1 έχει κατέβει κατά $h_1 = 0,4\text{m}$.



A. Να δείξετε:

- α) ότι η ταχύτητα του σώματος Σ_1 είναι συνέχεια διπλάσια της ταχύτητας του σώματος Σ_2 .
- β) ότι το διάστημα που διανύει το σώμα Σ_1 είναι συνέχεια διπλάσιο του διαστήματος που διανύει το σώμα Σ_2 .

B. Τη χρονική στιγμή t_1 να υπολογίσετε:

- γ) τη γωνιακή ταχύτητα της τροχαλίας.
- δ) το ρυθμό με τον οποίο το βάρος του σώματος Σ_1 μεταφέρει ενέργεια στο σύστημα.

Δίνονται: Η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι $I = 0,1\text{kg} \cdot \text{m}^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10 \text{ m/s}^2$.

Σημείωση: Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο νήμα είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση. Το νήμα είναι αβαρές.

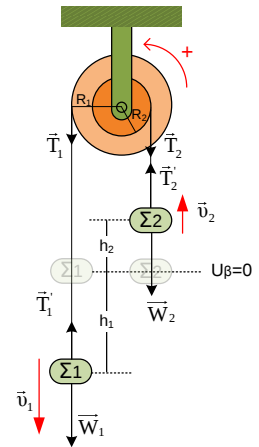
Να θεωρήσετε ότι τα σώματα Σ_1 και Σ_2 δεν φτάνουν στο έδαφος ούτε συγκρούονται με την τροχαλία.

Λύση

α) Η τροχαλία περιστρέφεται με την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Η ταχύτητα $\vec{v}_1$ του σώματος Σ_1 έχει κάθε χρονική στιγμή το ίδιο μέτρο με τη γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του μεγάλου κυλίνδρου, άρα $v_1 = \omega R_1$. (1)

Η ταχύτητα $\vec{v}_2$ του σώματος Σ_2 έχει το ίδιο μέτρο με τη γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του μικρού κυλίνδρου, άρα $v_2 = \omega R_2$. Διαιρώντας κατά μέλη:

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{\omega R_1}{\omega R_2} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{0,2\text{m}}{0,1\text{m}} = 2 \Rightarrow v_1 = 2v_2$$



β) Για δεδομένη χρονική στιγμή t , έστω h_1 το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα Σ_1 , h_2 το διάστημα που έχει διανύσει το σώμα Σ_2 και θ η γωνία που έχει διαγράψει η τροχαλία. Το διάστημα h_1 είναι ίσο με το τόξο που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας του μεγάλου κυλίνδρου, άρα $h_1 = S_1 = R_1\theta$. Ομοίως το διάστημα h_2 είναι ίσο με το τόξο που διαγράφει ένα σημείο της περιφέρειας του μικρού κυλίνδρου, άρα $h_2 = S_2 = R_2\theta$. Άρα:

$$\frac{h_1}{h_2} = \frac{R_1\theta}{R_2\theta} = \frac{R_1}{R_2} = \frac{0,2\text{m}}{0,1\text{m}} = 2 \Rightarrow h_1 = 2h_2$$

γ) Θεωρούμε ως σύστημα τα σώματα Σ_1 και Σ_2 μαζί με την τροχαλία και τα σχοινιά.

Οι δυνάμεις που ασκούν τα νήματα στα σώματα Σ_1 (T_1') και Σ_2 (T_2') και στη τροχαλία (T_1 και T_2) είναι εσωτερικές δυνάμεις.

Επειδή στο σύστημα οι εξωτερικές δυνάμεις που παράγουν έργο είναι συντηρητικές (τα βάρη των σωμάτων Σ_1 και Σ_2) ισχύει το θεώρημα διατήρησης της μηχανικής ενέργειας (Θ.Δ.Μ.Ε.). Ως αρχική θέση επιλέγεται εκεί που ήταν τα σώματα τη χρονική στιγμή $t=0$ και τελική θέση εκεί που βρίσκονται τη χρονική στιγμή t_1 , όταν το σώμα Σ_1 έχει κατέβει κατά h_1 ενώ το Σ_2 έχει ανέβει κατά h_2 .

Ως επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας επιλέγουμε αυτό που περνάει από την αρχική θέση των κέντρων μάζας των δύο σωμάτων.

$$E_{\mu\eta\chi.\alpha\rho\chi.} = E_{\mu\eta\chi.\tau\epsilon\lambda.} \Rightarrow K_{\alpha} + U_{\alpha} = K_{\tau} + U_{\tau} \Rightarrow 0 + 0 = K_{1,\tau} + K_{2,\tau} + K_{\tau\rho\chi,\tau} - m_1gh_1 + m_2gh_2 \Rightarrow$$

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 + \frac{1}{2}I\omega^2 = m_1gh_1 - m_2gh_2 \Rightarrow m_1v_1^2 + m_2v_2^2 + I\omega^2 = 2m_1gh_1 - 2m_2gh_2 \Rightarrow$$

$$m_1\omega^2R_1^2 + m_2\omega^2R_2^2 + I\omega^2 = 2m_1gh_1 - 2m_2gh_2 \Rightarrow (m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I)\omega^2 = 2m_1g(h_1 - h_2) \Rightarrow$$

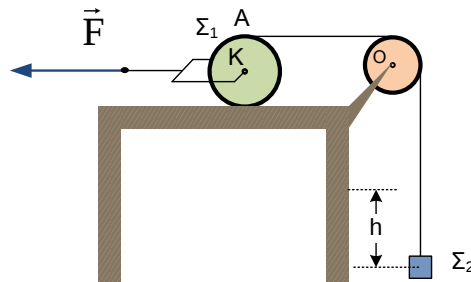
$$\omega^2 = \frac{2m_1g(h_1 - h_2)}{m_1R_1^2 + m_2R_2^2 + I} \Rightarrow \omega^2 = \frac{2 \cdot 2 \cdot 10 \cdot (0,4 - 0,2)}{2 \cdot 0,04 + 2 \cdot 0,01 + 0,1} \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \omega^2 = 40 \frac{\text{rad}^2}{\text{s}^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{40} \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

δ) Ο ρυθμός με τον οποίο το βάρος του σώματος Σ_1 μεταφέρει ενέργεια στο σύστημα είναι:

$$\frac{dW_{\beta\alpha\rho}}{dt} = \frac{m_1 g dy}{dt} = m_1 g v_1 = m_1 g R_1 \cdot \omega \Rightarrow \frac{dW}{dt} = 2 \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 0,2 \text{m} \cdot \sqrt{40} \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow \frac{dW_{\beta\alpha\rho}}{dt} = 8\sqrt{10} \frac{\text{J}}{\text{s}} = 8\sqrt{10} \text{Watt}$$

Πρόβλημα 6.

Η κατακόρυφη τροχαλία του σχήματος, μάζας $m = 3\text{kg}$ και ακτίνας $r = 0,1\text{m}$, μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο της O και είναι κάθετος σε αυτήν. Στο αυλάκι της τροχαλίας περνά νήμα που από το ένα άκρο του κρέμεται σώμα Σ_2 μάζας $m_2 = 2\text{kg}$ και στο άλλο άκρο του είναι δεμένος ένας κατακόρυφος τροχός (Σ_1) που έχει μάζα $M = 4\text{kg}$ και ακτίνα $R = 0,2\text{m}$.



α) Να υπολογίσετε το μέτρο της δύναμης $\vec{F}$ ώστε το σύστημα που εικονίζεται στο σχήμα να παραμείνει ακίνητο.

Τη χρονική στιγμή $t_0 = 0$ που το σύστημα του σχήματος είναι ακίνητο, αυξάνουμε τη δύναμη ακαριαία έτσι ώστε να γίνει $F = 80\text{N}$.

β) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση του σώματος Σ_2 .

Για τη χρονική στιγμή που το σώμα Σ_2 έχει ανέλθει κατά $h = 2\text{m}$, να υπολογίσετε:

γ) Το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της.

δ) Τη μετατόπιση του τροχού από την αρχική του θέση.

ε) Το ποσοστό του έργου της δύναμης F που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του τροχού Σ_1 κατά τη μετατόπιση του σώματος Σ_2 κατά h .

Δίνονται η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$, η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = \frac{1}{2}mr^2$ και του σώματος Σ_1 ως προς τον άξονα περιστροφής του $I_1 = \frac{1}{2}MR^2$.

Σημείωση: Η τριβή ανάμεσα στην τροχαλία και στο νήμα είναι αρκετά μεγάλη, ώστε να μην παρατηρείται ολίσθηση. Το νήμα είναι αβαρές. Ο τροχός Σ_1 κυλίζει χωρίς ολίσθηση.

Λύση

α) Για να είναι το σύστημα που εικονίζεται στο σχήμα ακίνητο πρέπει κάθε σώμα να ισορροπεί.

Για τον τροχό ισχύουν οι παρακάτω συνθήκες ισορροπίας:

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \tau_{T_{\sigma\tau}} - \tau_{T_1} = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau}R - T_1R = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} - T_1 = 0 \Rightarrow T_{\sigma\tau} = T_1 \quad \text{και}$$

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow F - T_1 - T_{\sigma\tau} = 0 \Rightarrow F - T_1 - T_1 = 0 \Rightarrow T_1 = \frac{F}{2}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας της τροχαλίας, έχουμε:

$$\Sigma \vec{\tau} = 0 \Rightarrow \tau_{T_1} - \tau_{T_2} = 0 \Rightarrow T_1 R - T_2 R = 0 \Rightarrow T_1 - T_2 = 0 \Rightarrow T_2 = T_1 \Rightarrow T_2 = \frac{F}{2}$$

Από τη συνθήκη ισορροπίας του σώματος Σ_2 , έχουμε:

$$\Sigma \vec{F} = 0 \Rightarrow T_2 - W_2 = 0 \Rightarrow T_2 - m_2 g = 0 \Rightarrow \frac{F}{2} - m_2 g = 0 \Rightarrow F = 2m_2 g \Rightarrow F = 2 \cdot 2 \text{ kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \Rightarrow F = 40 \text{ N}$$

β) Όλα τα σημεία του νήματος έχουν την ίδια επιτάχυνση, το νήμα είναι αβαρές και δεν υπάρχει ολίσθηση ανάμεσα στο νήμα και στην τροχαλία, άρα:

Το μέτρο της επιτάχυνσης a_2 του σώματος Σ_2 είναι ίσο με το μέτρο της επιτάχυνσης που έχουν τα σημεία της περιφέρειας της τροχαλίας, άρα

$$a_2 = a_{\gamma 2} \cdot r \quad (1)$$

(όπου $a_{\gamma 2}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης της τροχαλίας).

Για τους ίδιους λόγους το μέτρο της επιτάχυνσης a_2 του σώματος Σ_2 είναι ίσο με το μέτρο της επιτάχυνσης που έχει το ανώτερο σημείο A της περιφέρειας του τροχού, άρα

$$a_2 = a_A \quad (2)$$

Η ταχύτητα του υλικού σημείου A του τροχού έχει μέτρο $v_A = 2v_{\text{cm}}$ (3)

και η επιτάχυνση του έχει μέτρο

$$a_A = \frac{dv_A}{dt} \xrightarrow{(3)} a_A = \frac{d(2v_{\text{cm}})}{dt} \Rightarrow a_A = \frac{2dv_{\text{cm}}}{dt} \Rightarrow a_A = 2a_{\text{cm}}$$

Δηλαδή $a_A = 2a_1 \xrightarrow{(2)} a_2 = 2a_1 \quad (4)$

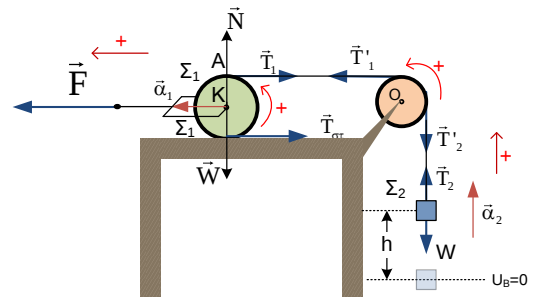
Επίσης ισχύει ότι $a_{\text{cm}} = a_{\gamma 1} \cdot R \Rightarrow a_1 = a_{\gamma 1} \cdot R \quad (5)$

Ο τροχός εκτελεί μια σύνθετη κίνηση που μπορεί να μελετηθεί ως επαλληλία μιας μεταφορικής και μιας στροφικής. Εφαρμόζουμε:

το θεμελιώδη νόμο της μηχανικής για τη μεταφορική του κίνηση (θετική φορά προς τα αριστερά)

$$\Sigma \vec{F} = m\vec{a}_{\text{cm}} \Rightarrow F - T_1 - T_{\sigma\tau} = M a_1 \quad (6)$$

και τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης (θετική φορά όπως φαίνεται στο σχήμα):



$$\Sigma \tau = I_1 a_{\gamma 1} \Rightarrow \tau_{T_{\sigma\tau}} - \tau_{T_1} = I_1 a_{\gamma 1} \Rightarrow T_{\sigma\tau} R - T_1 R = \frac{1}{2} M R^2 a_{\gamma 1} \xrightarrow{(5)} T_{\sigma\tau} - T_1 = \frac{1}{2} M \alpha_1 \quad (7)$$

(όπου $a_{\gamma 1}$ το μέτρο της γωνιακής επιτάχυνσης του τροχού).

Προσθέτοντας τις (6) και (7) κατά μέλη έχουμε:

$$F - 2T_1 = \frac{3}{2} M \alpha_1 \Rightarrow \frac{F}{2} - T_1 = \frac{3}{4} M \alpha_1 \quad (8)$$

Η τροχαλία εκτελεί στροφική κίνηση. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της στροφικής κίνησης (θετική φορά όπως φαίνεται στο σχήμα):

$$\Sigma \tau = I a_{\gamma 2} \Rightarrow \tau_{T'_1} - \tau_{T'_2} = 0 \Rightarrow T'_1 r - T'_2 r = \frac{1}{2} m r^2 a_{\gamma 2} \xrightarrow{(1)} T'_1 - T'_2 = \frac{1}{2} m \alpha_2 \xrightarrow{(4)} T'_1 - T'_2 = m \alpha_1 \quad (9)$$

Το σώμα Σ_2 εκτελεί μεταφορική κίνηση. Εφαρμόζουμε τον θεμελιώδη νόμο της μηχανικής:

$$\Sigma \vec{F} = m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow T_2 - W = m_2 a_2 \xrightarrow{(4)} T_2 - m_2 g = 2m_2 \alpha_1 \quad (10)$$

Προσθέτουμε κατά μέλη τις σχέσεις (8), (9) και (10):

$$\frac{F}{2} - m_2 g = \frac{3}{4} M \alpha_1 + m \alpha_1 + 2m_2 \alpha_1 \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\frac{F}{2} - m_2 g}{\frac{3}{4} M + m + 2m_2} \Rightarrow \alpha_1 = \frac{\frac{80}{2} - 2\text{kg} \cdot 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}{\frac{3}{4} 4\text{kg} + 3\text{kg} + 2 \cdot 2\text{kg}} \Rightarrow \alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

Επίσης από τη σχέση (4) με αντικατάσταση προκύπτει: $\alpha_2 = 2\alpha_1 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$

$$\gamma) \text{ Για το σώμα } \Sigma_2: h = \frac{1}{2} \alpha_2 t^2 \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2h}{\alpha_2}} \Rightarrow t = \sqrt{\frac{2 \cdot 2\text{m}}{4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}}} \Rightarrow t = 1\text{s}$$

Το σώμα Σ_2 εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\alpha_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$,

άρα η ταχύτητα του έχει μέτρο: $v_2 = \alpha_2 t \Rightarrow v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\text{s} \Rightarrow v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

Το μέτρο u της ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας του σώματος Σ_2 δηλαδή $u = v_2 = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ και το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας της τροχαλίας, ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$\omega = \frac{v}{R} \Rightarrow \omega = \frac{4 \frac{\text{m}}{\text{s}}}{0,1\text{m}} \Rightarrow \omega = 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

Το μέτρο της στροφορμής της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής της είναι:

$$L = I\omega \Rightarrow L = \frac{1}{2}mr^2\omega \Rightarrow L = \frac{1}{2}3\text{kg} \cdot 0,01\text{m}^2 \cdot 40 \frac{\text{rad}}{\text{s}} \Rightarrow L = 0,6\text{kg} \cdot \text{m}^2\text{s}^{-1}$$

δ) Ο τροχός στη μεταφορική του κίνηση εκτελεί ευθύγραμμη ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με επιτάχυνση $\alpha_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$, άρα η μετατόπισή του δίνεται από τη σχέση: $x = \frac{1}{2}\alpha_1 t^2$.

$$\text{Με αντικατάσταση έχουμε: } x = \frac{1}{2} 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot (1\text{s})^2 \Rightarrow x = 1\text{m}$$

$$\epsilon) \text{ Η ταχύτητα του τροχού } \Sigma_1 \text{ είναι: } v_1 = \alpha_1 t \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \cdot 1\text{s} \Rightarrow v_1 = 2 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

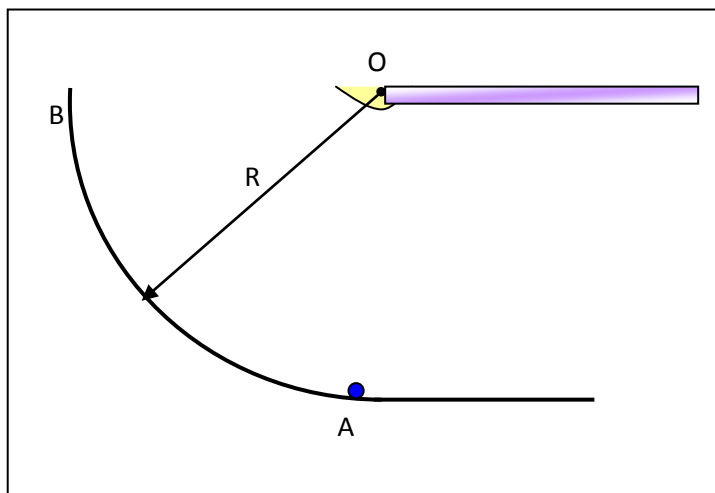
Το ποσοστό του έργου της δύναμης $\vec{F}$ που μετατράπηκε σε κινητική ενέργεια του τροχού Σ_1 κατά τη μετατόπιση του σώματος Σ_2 κατά h είναι:

$$\frac{K_1}{W_F} = \frac{\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2}I_1\omega_1^2}{F \cdot x} = \frac{\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2}MR^2\omega_1^2}{F \cdot x} = \frac{\frac{1}{2}Mv_1^2 + \frac{1}{2} \frac{1}{2}Mv_1^2}{F \cdot x} = \frac{\frac{3}{4}Mv_1^2}{F \cdot x} \Rightarrow$$

$$\frac{K_1}{W_F} = \frac{\frac{3}{4}4\text{kg} \cdot 4 \frac{\text{m}^2}{\text{s}^2}}{80\text{N} \cdot 1\text{m}} = \frac{12}{80} = 0,15 \text{ ή } 15\%$$

Πρόβλημα 7.

Η ομογενής ράβδος μάζας $M = 9\text{ kg}$ και μήκους $\ell = 1,2\text{ m}$ του διπλανού σχήματος αφήνεται από την οριζόντια θέση να κινηθεί στο κατακόρυφο επίπεδο. Η ράβδος μπορεί να περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το αρθρωμένο άκρο της O . Όταν διέρχεται από την κατακόρυφη θέση συγκρούεται με ακίνητο υλικό σημείο μάζας $m = 1\text{ kg}$ που βρίσκεται στο κατώτερο σημείο



A ενός λείου κατακόρυφου οδηγού σε σχήμα τεταρτοκυκλίου ακτίνας $R = 1,2\text{ m}$. Μετά την κρούση η ράβδος αποκτά γωνιακή ταχύτητα μέτρου ίσου με το μισό από αυτό που είχε ελάχιστα πριν την κρούση και ίδιας φοράς.

Αν δίνονται η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της $I_{\text{cm}} = \frac{1}{12} M \ell^2$ και η επιτάχυνση της βαρύτητας $g = 10\text{ m/s}^2$, να υπολογίσετε:

- τη γωνιακή ταχύτητα της ράβδου ελάχιστα πριν την κρούση.
- την ταχύτητα του υλικού σημείου αμέσως μετά την κρούση.
- την στιγμιαία ισχύ της ροπής του βάρους της ράβδου αμέσως μετά την κρούση.
- την απώλεια της Μηχανικής Ενέργειας του συστήματος κατά την κρούση.

Λύση

Η ροπή αδράνειας της ράβδου ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το άκρο της O υπολογίζεται από το θεώρημα Steiner:

$$I_O = I_{\text{cm}} + M \left(\frac{\ell}{2} \right)^2 = \frac{1}{12} M \ell^2 + M \frac{\ell^2}{4} \Rightarrow I_O = \frac{1}{3} M \ell^2 \quad (1)$$

- α) Φαινόμενο 1^ο: Κίνηση της ράβδου από την οριζόντια στην κατακόρυφη θέση.

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Μηχανικής Ενέργειας.

$$E_{\text{MHX}}(\text{I}) = E_{\text{MHX}}(\text{II}) \Rightarrow$$

$$Mg\ell = \frac{1}{2}I_O\omega^2 + Mg\frac{\ell}{2} \xrightarrow{(1)}$$

$$\frac{1}{2}\frac{1}{3}M\ell^2\omega^2 = Mg\frac{\ell}{2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}\ell\omega^2 = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} =$$

$$= \sqrt{\frac{30}{1,2}} \text{rad/s} = \sqrt{25} \text{rad/s} \Rightarrow$$

$$\omega = 5 \text{rad/s}$$

β) Φαινόμενο 2^ο: Ανελαστική κρούση υλικού σημείου - ράβδου.

Εφαρμόζουμε την Αρχή Διατήρησης της Στροφορμής ως προς τον οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το σημείο O:

$$\vec{L}_{O\lambda}(\text{πριν}) = \vec{L}_{O\lambda}(\text{μετά})$$

$$\vec{L}_m + \vec{L}_M = \vec{L}_m + \vec{L}_M$$

Επιλέγοντας θετική φορά, αυτή από τον αναγνώστη προς τη σελίδα, η παραπάνω σχέση γράφεται αλγεβρικά:

$$0 + I_O\omega = m v \ell + I_O\omega' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}M\ell^2\omega = m v \ell + \frac{1}{3}M\ell^2\omega' \Rightarrow$$

$$\frac{1}{3}M\ell^2(\omega - \omega') = m v \ell \Rightarrow$$

$$v = \frac{M\ell(\omega - \omega')}{3m} =$$

$$= \frac{9 \cdot 1,2 \cdot (5 - 2,5)}{3 \cdot 1} \text{m/s} =$$

$$= 3,6 \cdot 2,5 \text{m/s} \Rightarrow$$

$$v = 9 \text{m/s}$$

$$\gamma) P_{\tau_{Mg}} = \tau_{Mg} \cdot \omega = 0$$

δ) Η μηχανική ενέργεια του συστήματος λίγο πριν την κρούση ήταν:

$$\begin{aligned} E_{\text{MHX}}(\alpha\rho\chi) &= K_{\text{M}} + U_{\text{M}} + K_{\text{m}} = \frac{1}{2} I_{\text{O}} \omega^2 + \frac{Mg\ell}{2} + 0 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} M \ell^2 \omega^2 + \frac{Mg\ell}{2} = \left(\frac{1}{2} \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 1,44 \cdot 25 + 9 \cdot 10 \cdot \frac{1,2}{2} \right) \text{J} = \\ &= (54 + 54) \text{J} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$E_{\text{MHX}}(\alpha\rho\chi) = 108 \text{J}$$

Η μηχανική ενέργεια του συστήματος αμέσως μετά την κρούση είναι:

$$\begin{aligned} E_{\text{MHX}}(\tau\epsilon\lambda) &= K'_{\text{M}} + U'_{\text{M}} + K'_{\text{m}} = \frac{1}{2} I_{\text{O}} \omega'^2 + Mg \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} m v^2 = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{3} M \ell^2 \omega'^2 + Mg \frac{\ell}{2} + \frac{1}{2} m v^2 = \\ &= \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} \cdot 9 \cdot 1,44 \cdot \frac{25}{4} + 9 \cdot 10 \cdot \frac{1,2}{2} + \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 81 \right) \text{J} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$E_{\text{MHX}}(\tau\epsilon\lambda) = 108 \text{J}$$

$$|\Delta E_{\text{MHX}}| = E_{\text{MHX}}(\alpha\rho\chi) - E_{\text{MHX}}(\tau\epsilon\lambda) = 0 \text{J}$$

Προφανώς η κρούση ήταν ελαστική.

Ημερομηνία τροποποίησης: 31/08/2015