

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2ο: ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ

55 θέματα

1. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \neq 0$, ισχύει ότι:

$$(\alpha + \beta) \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right) = 4$$

τότε να αποδείξετε ότι:

α) $\frac{\alpha}{\beta} + \frac{\beta}{\alpha} = 2$

(Μονάδες 12)

β) $\alpha = \beta$.

(Μονάδες 13)

12685 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΙ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΟΥΣ

2. Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν

$$\alpha + \beta + \gamma = 0 \text{ και } \alpha\beta\gamma \neq 0.$$

α) Να αποδείξετε ότι

i. $\beta + \gamma = -\alpha$.

(Μονάδες 6)

ii. $\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} = -\alpha$

(Μονάδες 6)

13053 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΙ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΟΥΣ

β) Με παρόμοιο τρόπο να απλοποιήσετε τα κλάσματα $\frac{\beta^2}{\gamma + \alpha}$, $\frac{\gamma^2}{\alpha + \beta}$ και να αποδείξετε ότι

$$\frac{\alpha^2}{\beta + \gamma} + \frac{\beta^2}{\gamma + \alpha} + \frac{\gamma^2}{\alpha + \beta} = 0$$

(Μονάδες 13)

3. Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί. Ορίζουμε:

$$A = 2(x + y)^2 - (x - y)^2 - 6xy - y^2$$

α) Να αποδείξετε ότι: $A = x^2$

(Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $B = 2 \cdot 2022^2 - 2020^2 - 6 \cdot 2021 - 1$ είναι ίσος με το τετράγωνο φυσικού αριθμού τον οποίο να προσδιορίσετε.

(Μονάδες 12)

13088 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΙ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΟΥΣ

- 4.** Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί, διαφορετικοί μεταξύ τους, για τους οποίους ισχύουν $\alpha^2 = 2\alpha + \beta$ και $\beta^2 = 2\beta + \alpha$ **13472** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ
- α) Να αποδείξετε ότι:
- i. $\alpha^2 - \beta^2 = \alpha - \beta$ (Μονάδες 8)
- ii. $\alpha + \beta = 1$ (Μονάδες 8)
- β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 + \beta^2$ (Μονάδες 9)
- 5.** Έστω x, y πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: **14458** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ
- $$(x + 4y)(x + y) = 9xy$$
- α) Να αποδείξετε ότι
- i. $(2y - x)^2 = 0$ (Μονάδες 8)
- ii. $y = \frac{x}{2}$ (Μονάδες 5)
- β) Να αποδείξετε ότι
- $$\left(2y - \frac{x}{2}\right)^2 + \left(2y + \frac{x}{2}\right)^2 = 10y^2$$
- (Μονάδες 12)
- 6.** Για τους πραγματικούς αριθμούς x και y ισχύει: **14473** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ
- $$\frac{4x + 5y}{x - 4y} = -2$$
- i) Να δείξετε ότι $y = 2x$ (Μονάδες 12)
- ii) Για $y = 2x$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
- $$A = \frac{2x^2 + 3y^2 + xy}{xy}$$
- (Μονάδες 13)
- 7.** Αν οι αριθμοί $2\alpha - 1$ και $\beta - 1$ είναι αντίστροφοι, με $\alpha \neq 1$ και $\beta \neq 1$ να δείξετε ότι: **14489** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ
- i) $2\alpha + \beta = 2\alpha\beta$. (Μονάδες 10)
- ii) Οι αριθμοί $x = \alpha - \beta$ και $y = \alpha(1 - 2\beta) + 2\beta$ είναι αντίθετοι. (Μονάδες 15)
- 8.** Αν για τους πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει η σχέση **14555** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ
- $$(x - 2y)^2 - 2(3 - 2xy) = 5y^2 - 1$$
- α) Να αποδείξετε ότι $x^2 - y^2 = 5$ (Μονάδες 12)
- β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης
- $$P = (x + y)^3(x - y)^3$$
- (Μονάδες 13)

9. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\beta \neq 0$ και $\delta \neq \gamma$ ώστε:

$$\frac{\alpha + \beta}{\beta} = 4 \quad \text{και} \quad \frac{\gamma}{\delta - \gamma} = \frac{1}{4}$$

35388 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

i) Να αποδείξετε ότι $\alpha = 3\beta$ και $\delta = 5\gamma$ (Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$\Pi = \frac{\alpha\gamma + \beta\gamma}{\beta\delta - \beta\gamma}$$

(Μονάδες 15)

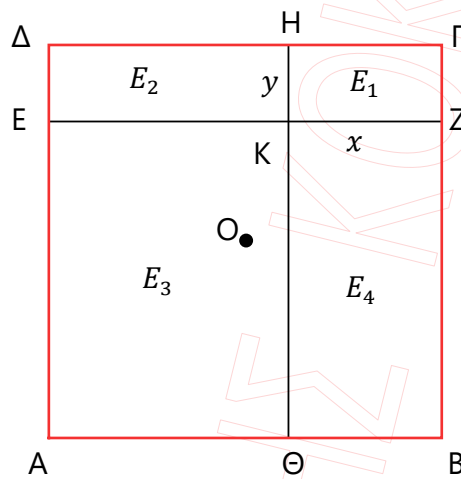
10. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y ισχύει: 36884 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

$$(x - 1)^2 + (y + 3)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 \quad (\text{Μονάδες 12})$$

β) β) Να βρείτε τους αριθμούς x, y ώστε:

$$x^2 + y^2 - 2x + 6y + 10 = 0 \quad (\text{Μονάδες 13})$$

11. Στο διπλανό σχήμα το τετράγωνο ΑΒΓΔ έχει πλευρά ίση με 6 και οι ευθείες ΕΖ και ΗΘ είναι παράλληλες στις πλευρές του. Αν $KZ = x$ και $KH = y$, $x, y \in (0, 6)$, τότε:



15052 4 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ

α) Να υπολογίσετε τα E_1, E_2, E_3, E_4 με τη βοήθεια των x, y . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τα εμβαδά E_1, E_2, E_3, E_4 των τεσσάρων ορθογωνίων του σχήματος όταν $x = 4$ και $y = 2$. (Μονάδες 6)

γ) Αν επιπλέον ισχύει $E_1 + E_3 = E_2 + E_4$, να αποδείξετε ότι:

i. $xy + 9 = 3(x + y)$. (Μονάδες 6)

ii. Τουλάχιστον ένα από τα τμήματα ΕΖ και ΗΘ διέρχεται από το κέντρο Ο του τετραγώνου. (Μονάδες 5)

12. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει: $0 < \alpha < \beta$

12673 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

α) Να αποδείξετε ότι $\frac{3}{\beta} < \frac{3}{\alpha}$ (Μονάδες 13)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^3 + \frac{3}{\beta} < \beta^3 + \frac{3}{\alpha}$ (Μονάδες 12)

13. Δίνονται οι παραστάσεις:

12922 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΙ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΟΥΣ, 2.2
ΔΙΑΤΑΞΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ

$$A = \alpha^2 + \beta^2 \text{ και } B = 2\alpha\beta, \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες $A = 0$. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι $A - B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)
- γ) Να βρείτε τη σχέση μεταξύ των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ώστε να ισχύει $A - B = 0$. (Μονάδες 8)

14. Δίνονται οι παραστάσεις

13266 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΙ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΟΥΣ, 2.2
ΔΙΑΤΑΞΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ

$$A = \alpha^2 + 4\alpha + 5 \text{ και } B = (2\beta + 1)^2 - 1, \text{ με } \alpha, \beta \in \mathbb{R}.$$

- α) Να δείξετε ότι για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A = (\alpha + 2)^2 + 1$ (Μονάδες 8)
- β)
- i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$. (Μονάδες 9)
- ii. Για ποιες τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $A + B = 0$; (Μονάδες 8)

15. α) Να αποδείξετε ότι για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς x, y , ισχύει: 13323 2

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΙ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΟΥΣ, 2.2
ΔΙΑΤΑΞΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ

$$(x - 1)^2 + (y + 4)^2 = x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17$$

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x και y ώστε:

$$x^2 + y^2 - 2x + 8y + 17 = 0$$

(Μονάδες 13)

16.

14410 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΙ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΟΥΣ, 2.2
ΔΙΑΤΑΞΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ

Δίνονται οι παραστάσεις A και B με $A = \alpha^2 + \alpha + \frac{1}{4}$ και $B = (\beta - 3)^2$.

- α)
- i. Να δείξετε ότι $A + B \geq 0$ για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)
- ii. Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β έτσι, ώστε $A + B = 0$. (Μονάδες 8)
- β) Υπάρχουν τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, ώστε $A = -B$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

- 17.** Αν α και β πραγματικοί αριθμοί με $2 \leq \alpha \leq 4$ και $-4 \leq \beta \leq -3$, να βρείτε τα **14475** 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
όρια μεταξύ των οποίων περιέχεται η τιμή καθεμιάς από τις παραστάσεις:
- α) $\alpha + 2\beta$ (Μονάδες 12)
- β) $\alpha - \beta$. (Μονάδες 13)

- 18.** Ορθογώνιο παραλληλόγραμμο έχει μήκος x εκατοστά και πλάτος y εκατοστά, **14492** 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
αντίστοιχα. Αν για τα μήκη x και y ισχύει: $4 \leq x \leq 7$ και $2 \leq y \leq 3$ τότε:
- α) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 12)
- β) Αν το x μειωθεί κατά 1 και το y τριπλασιαστεί, και να είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή της περιμέτρου του νέου ορθογωνίου παραλληλογράμμου. (Μονάδες 13)

- 19.** Αν $2 \leq x \leq 3$ και $1 \leq y \leq 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η **14704** 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
τιμή καθεμιάς από τις παρακάτω παραστάσεις:
- α) $x + y$ (Μονάδες 5)
- β) $2x - 3y$ (Μονάδες 10)
- γ) $\frac{x}{y}$ (Μονάδες 10)

- 20.** Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2 + 9$ και $\Lambda = 2\alpha(3 - \beta)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **3504** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
0
- i) Να δείξετε ότι:
 $K - \Lambda = (\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2) + (\alpha^2 - 6\alpha + 9)$ (Μονάδες 3)
- ii) Να δείξετε ότι: $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 10)
- iii) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

- 21.** Δίνονται πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha > 0$ και $\beta > 0$. Να αποδείξετε ότι: **3689** 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
9
- i. $\alpha + \frac{4}{\alpha} \geq 4$ (Μονάδες 12)
- ii. $\left(\alpha + \frac{4}{\alpha}\right)\left(\beta + \frac{4}{\beta}\right) \geq 16$ (Μονάδες 13)

- 22.** Δίνονται οι παραστάσεις: $K = 2\alpha^2 + \beta^2$ και $\Lambda = 2\alpha\beta$ όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ **37179** 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
- i) Να δείξετε ότι $K \geq \Lambda$, για κάθε τιμή των α, β . (Μονάδες 12)
- ii) Για ποιες τιμές των α, β ισχύει η ισότητα $K = \Lambda$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

23. Δίνεται η παράσταση $A = x^4 + \frac{x^4 - 4}{x^2 - 2}$, $x \neq \pm\sqrt{2}$.

37817 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

α) Να δείξετε ότι $A = x^4 + x^2 + 2$.

(Μονάδες 15)

β)

i. Να αιτιολογήσετε γιατί $A > 0$ για κάθε $x \neq \pm\sqrt{2}$.

(Μονάδες 5)

ii. Για ποια τιμή του x η παράσταση A παίρνει τη μικρότερη τιμή της;

(Μονάδες 5)

24. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει

13177 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

$$2 \leq \alpha \leq 3 \text{ και } -2 \leq \beta \leq -1$$

α) Να δείξετε ότι: $|\alpha - 3| = 3 - \alpha$ και $|\beta + 2| = \beta + 2$

(Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι: $0 \leq \alpha + \beta \leq 2$

(Μονάδες 8)

γ) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $|\alpha + \beta| + |\alpha - 3| - |\beta + 2|$ είναι ίση με 1

(Μονάδες 9)

25. α) Η αλγεβρική παράσταση K , που εκφράζει το άθροισμα των αποστάσεων του αριθμού x από τους αριθμούς 2 και -1 , πάνω στον άξονα είναι:

14071 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

$$A. K = |x + 1| + |x - 2| \quad B. K = |x - 1| + |x + 2| \quad \Gamma. K = (|x| + 1) + (|x| - 2)$$

Να γράψετε στο τετράδιό σας τη σωστή παράσταση και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

β) Αν είναι $K = |x + 1| + |x - 2|$ τότε:

i) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης K όταν $x = \frac{3}{2}$. (Μονάδες 10)

ii) Αν $x > 2$ να γράψετε χωρίς απόλυτο την παράσταση K και να αποδείξετε ότι $K > 3$. (Μονάδες 10)

26. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha > \beta$, με $\beta > 1$ και $\alpha > 1$, τότε

14412 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

α) Να δείξετε ότι $\frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha} = 2$

(Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι $\alpha + \beta > \frac{\alpha - \beta}{|\alpha - \beta|} - \frac{|1 - \alpha|}{1 - \alpha}$

(Μονάδες 13)

27. α) Να λυθεί η ανίσωση $|y - 3| < 1$ (Μονάδες 12)

14491 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

β) Αν x, y είναι μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου, με $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$ τότε να βρείτε μεταξύ ποιών τιμών κυμαίνεται η τιμή του εμβαδού E του ορθογωνίου. (Μονάδες 13)

- 28.** Δίνεται πραγματικός αριθμός x , για τον οποίο ισχύει: $|x + 2| < 1$. Να δείξετε **14572** 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
ότι:
α) $-3 < x < -1$ (Μονάδες 10)
β) $|2x + 4| < 2$. (Μονάδες 15)
-
- 29.** Δίνεται η ανίσωση $|x - 7| < 1$ (I). **14617** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
α) Να αποδείξετε ότι $x \in (6, 8)$. (Μονάδες 12)
β) Αν γνωρίζουμε ότι $\kappa \in (6, 8)$, να αποδείξετε ότι $\frac{24}{\kappa} \in (3, 4)$. (Μονάδες 13)
-
- 30.** Δίνεται η παράσταση $A = |x - 2| + 3, x \in \mathbb{R}$. **14730** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
α) Να βρείτε
i. Την τιμή της παράστασης A για $x = 2^3 - 3^2$.
(Μονάδες 8)
ii. Τις τιμές του x , ώστε να ισχύει $A = 5$.
(Μονάδες 10)
β) Να εξετάσετε αν μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
(Μονάδες 7)
-
- 31.** Έστω α, β, γ πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύει $\alpha < 0 < \beta < \gamma$. **15054** 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
α) Να αιτιολογήσετε γιατί ο αριθμός $A = \alpha(\alpha - \beta)(\gamma - \beta)\beta$ είναι θετικός.
(Μονάδες 16)
β) Να αποδείξετε ότι $\alpha + |\alpha - \beta| + |\gamma - \beta| - \gamma = 0$. (Μονάδες 9)
-
- 32.** Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $d(2x, 3) = 3 - 2x$ **35041** 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ
α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 12)
β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$ να αποδείξετε ότι η παράσταση $K = |2x - 3| - 2|3 - x|$ είναι ανεξάρτητη του x (Μονάδες 13)

33. Δίνεται η παράσταση $A = |3x - 6| + 2$, $x \in \mathbb{R}$

35112 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

α) Να αποδείξετε ότι:

i. για κάθε $x \geq 2$ τότε $A = 3x - 4$

ii. για κάθε $x < 2$ τότε $A = 8 - 3x$

(Μονάδες 12)

β) Αν $x \geq 2$, να δείξετε ότι $\frac{9x^2 - 16}{|3x - 6| + 2} = 3x + 4$.

(Μονάδες 13)

34. Για κάθε πραγματικό αριθμό x με την ιδιότητα $5 < x < 10$

35412 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

α) να γράψετε τις παραστάσεις $|x - 5|$ και $|x - 10|$ χωρίς απόλυτες τιμές

(Μονάδες 10)

β) να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \frac{|x-5|}{x-5} + \frac{|x-10|}{x-10}$

(Μονάδες 15)

35. α) Αν $a < 0$, να δείξετε ότι: $a + \frac{1}{a} \leq -2$.

(Μονάδες 15) 3689 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

β) Αν $a < 0$, να δείξετε ότι: $|a| + \left|\frac{1}{a}\right| \geq 2$.

(Μονάδες 10)

36. α) Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R} - \{0\}$, να αποδειχθεί ότι $\left|\frac{\alpha}{\beta}\right| + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right| \geq 2$. (1)

(Μονάδες 15) 3689 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

β) Πότε ισχύει η ισότητα στην (1); Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 10)

37. Δίνεται η παράσταση $A = |x - 1| + |y - 3|$, με $x, y \in \mathbb{R}$ για τους οποίους ισχύει $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$

37201 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

Να αποδείξετε ότι:

α) $A = x - y + 2$

(Μονάδες 12)

β) $0 < A < 4$

(Μονάδες 13)

38. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει $1 \leq \beta \leq 2$ και $2 \leq \alpha \leq 4$ **13179** 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

α)

i. Με τη βοήθεια του άξονα των πραγματικών αριθμών να δείξετε ότι η απόσταση των α και β είναι μικρότερη ή ίση του 3. (Μονάδες 7)

ii. Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντηση στο i. ερώτημα. (Μονάδες 7)

β)

i. Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} \leq 1 \leq \frac{\alpha}{\beta}$ (Μονάδες 5)

ii. Να βρείτε τους αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει $\left|1 - \frac{\beta}{\alpha}\right| = \left|\frac{\alpha}{\beta} - 1\right|$. (Μονάδες 6)

39. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α και β για τους οποίους ισχύει η ανίσωση $(\alpha - 1)(1 - \beta) > 0$ **3388** 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

α) Να αποδείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των α, β . (Μονάδες 13)

β) Αν επιπλέον $|\beta - \alpha| = 4$, να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = |\alpha - 1| + |1 - \beta|$. (Μονάδες 12)

40. Δίνονται τα σημεία A, B και M που παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς $-2, 7$ και x αντίστοιχα, με $-2 < x < 7$ **3667** 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων.

i) $|x + 2|$ (Μονάδες 4)

ii) $|x - 7|$ (Μονάδες 4)

β) Με τη βοήθεια του άξονα να δώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία του αθροίσματος

$|x + 2| + |x - 7|$ (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης $A = |x + 2| + |x - 7|$ γεωμετρικά. (Μονάδες 5)

δ) Να επιβεβαιώσετε αλγεβρικά το προηγούμενο συμπέρασμα (Μονάδες 7)

41. Δίνονται οι αριθμοί **12943** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

$$\alpha = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5}) \quad \text{και} \quad \beta = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$$

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha\beta$ (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 7$ (Μονάδες 13)

42. Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{3} - 1$ και $\beta = \sqrt{3} + 1$

α) Να δείξετε ότι $\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2 = 10$.

(Μονάδες 15)

β) Να δείξετε ότι $\frac{\beta}{\alpha} + \frac{\alpha}{\beta} + 1 = 5$.

(Μονάδες 10)

14452 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

43. Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει $|2x| < 2$, τότε:

α) Να αποδείξετε ότι $-1 < x < 1$. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \in (-1, 1)$, ισχύει $x^2 < 1$. (Μονάδες 13)

14599 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

44. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{3})^6$ και $B = (\sqrt[3]{3})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 18$.

(Μονάδες 12)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς $\sqrt{3}$, $\sqrt[3]{3}$.

(Μονάδες 13)

14682 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

45. Δίνονται οι ετερόσημοι αριθμοί α , β , με $\alpha = 1 + 2\sqrt{2}$ και $\beta = \sqrt{2} - 2$.

Να δείξετε ότι:

α) $\alpha^2 + \beta^2 = 15$.

(Μονάδες 12)

β) $\sqrt{\alpha^2} + 2\sqrt{\beta^2} = 5$.

(Μονάδες 13)

14750 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

46. α) Να δείξετε ότι $(2 + \sqrt{5})^2 = 9 + 4\sqrt{5}$ και $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - 2\sqrt{5}$

(Μονάδες 13)

β) Με τη βοήθεια του ερωτήματος α) ή με όποιον άλλο τρόπο θέλετε, να

δείξετε ότι $\sqrt{9 + 4\sqrt{5}} + \sqrt{6 - 2\sqrt{5}} = 1 + 2\sqrt{5}$.

(Μονάδες 12)

14774 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

47. α) Να αποδείξετε ότι $2 < \sqrt{5}$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$.

(Μονάδες 10)

γ) Να αποδείξετε ότι $\sqrt{9 - 4\sqrt{5}} = \sqrt{5} - 2$.

(Μονάδες 8)

14849 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

- 48.** α) Να αποδείξετε ότι $(2 - \sqrt{5})^2 = 9 - 4\sqrt{5}$ και να υπολογίσετε το ανάπτυγμα $(2 + \sqrt{5})^2$. **15051** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
(Μονάδες 12)
- β) Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες των αριθμών $9 - 4\sqrt{5}$ και $9 + 4\sqrt{5}$
(Μονάδες 13)
- 49.** Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \sqrt{(x-2)^2}$ και $B = \sqrt[3]{(2-x)^3}$, όπου x πραγματικός αριθμός. **34152** 2 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ;
(Μονάδες 7)
- β) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B ;
(Μονάδες 8)
- γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x \leq 2$, ισχύει $A = B$
(Μονάδες 10)
- 50.** Αν είναι $A = \sqrt[3]{5}$, $B = \sqrt{3}$, $\Gamma = \sqrt[6]{5}$, τότε: **34155** 2 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
- α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B \cdot \Gamma = \sqrt{15}$.
(Μονάδες 15)
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς A, B
(Μονάδες 10)
- 51.** Αν είναι $A = 2 - \sqrt{3}$, $B = 2 + \sqrt{3}$, τότε: **34157** 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
- α) Να αποδείξετε ότι $A \cdot B = 1$
(Μονάδες 12)
- β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\Pi = A^2 + B^2$.
(Μονάδες 13)
- 52.** Δίνεται η παράσταση **36778** 2 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
- $$K = \frac{\sqrt{x^2 + 4x + 4}}{x + 2} + \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}$$
- α) Να βρεθούν οι τιμές που πρέπει να πάρει το x , ώστε η παράσταση K να έχει νόημα πραγματικού αριθμού.
(Μονάδες 12)
- β) Αν $-2 < x < 3$, να αποδείξετε ότι παράσταση K σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x
(Μονάδες 13)
- 53.** Δίνονται οι αριθμητικές παραστάσεις $A = (\sqrt{2})^6$, $B = (\sqrt[3]{3})^6$ και $\Gamma = (\sqrt[6]{6})^6$ **37172** 2 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ
- α) Να δείξετε ότι $A + B + \Gamma = 23$
(Μονάδες 13)
- β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{3}$ και $\sqrt[6]{6}$.
(Μονάδες 12)

54. Στον πίνακα της τάξης σας είναι γραμμένες οι παρακάτω πληροφορίες (προσεγγίσεις):

$$\sqrt{2} \approx 1,41, \quad \sqrt{3} \approx 1,73, \quad \sqrt{5} \approx 2,24, \quad \sqrt{7} \approx 2,64$$

α. Να επιλέξετε έναν τρόπο, ώστε να αξιοποιήσετε τα παραπάνω δεδομένα (όποια θεωρείτε κατάλληλα) και να υπολογίσετε με προσέγγιση εκατοστού τους αριθμούς $\sqrt{20}$, $\sqrt{45}$ και $\sqrt{80}$ και $\frac{7}{2\sqrt{7}}$ (Μονάδες 12)

β. Αν δεν υπήρχαν στον πίνακα οι προσεγγιστικές τιμές των ριζών πώς θα μπορούσατε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\frac{3\sqrt{20}+\sqrt{80}}{\sqrt{45}-\sqrt{5}}$; (Μονάδες 13)

55. α) Να δείξετε ότι $3 < \sqrt[3]{30} < 4$ (Μονάδες 12)

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[3]{30}$ και $6 - \sqrt[3]{30}$ (Μονάδες 13)

56. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{1-x} - \sqrt[4]{x^4}$

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Αν $x = -3$, να δείξετε ότι $A^3 + A^2 + A + 1 = 0$ (Μονάδες 12)

57. Δίνεται η παράσταση $B = \sqrt[5]{(x-2)^5}$

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση B . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)

β) Αν $x = 4$, να δείξετε ότι $B^2 + 6B = B^4$ (Μονάδες 12)

58. Δίνονται οι αριθμοί: $A = (\sqrt{2})^6$ και $B = (\sqrt[3]{2})^6$

α) Να δείξετε ότι: $A - B = 4$ (Μονάδες 13)

β) Να διατάξετε από το μικρότερο στο μεγαλύτερο τους αριθμούς: $\sqrt{2}, 1, \sqrt[3]{2}$ (Μονάδες 12)

37192 2 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

37194 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

37197 2 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

37198 2 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

37199 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ

59. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί α, β , με $\alpha = 1 + \sqrt{2}$ και $\beta = 1 - \sqrt{2}$.

14931 4 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΙ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΟΥΣ, 2.3
ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, 2.4
ΡΙΖΕΣ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ

α) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $A = \alpha^2 - \beta^2$. (Μονάδες 7)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $B = \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 8)

γ) Αν $A = 4\sqrt{2}$ και $B = 2$, να δείξετε ότι $\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} > \sqrt{\alpha^2} - \sqrt{\beta^2}$. (Μονάδες 10)

ΔΗΜΗΤΡΗΣ ΚΟΚΚΙΝΟΣ