ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο : Εξισώσεις

3

48 θέματα

1. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x-2\lambda+2=0$. **12857** 2 ~K3.1

α)

i. Να λύσετε την εξίσωση για $\lambda=-2$. (Μονάδες 7)

ii. Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $x=1$ είναι ρίζα της εξίσωσης. (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τις τιμές του $\lambda\in\mathbb{R}$ για τις οποίες η εξίσωση είναι ταυτότητα. (Μονάδες 8)

---

2. Αν γνωρίζουμε ότι ο x είναι πραγματικός αριθμός με $3\le x\le 5$, τότε: **13169** 2 ~K3.1

α) Να αποδείξετε ότι $x-5\le 0<x-2$. (Μονάδες 10)

β) Να λύσετε την εξίσωση $|x-2|-|x-5|=2$. (Μονάδες 15)

---

3. Δίνεται η παράσταση: **14224** 2 ~K3.1

$$A=\frac{x^2-1}{x^2-x}\ ,\quad x\neq 0\,,\quad x\neq 1$$

α) Να δείξετε ότι $A=\frac{x+1}{x}$. (Μονάδες 8)

β)

i. Να βρείτε για ποια τιμή του x η παράσταση A μηδενίζεται. (Μονάδες 8)

ii. Μπορεί η παράσταση A να πάρει την τιμή 2 ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

---

4. Δίνεται η παράσταση $K=|x+1|+2$, όπου $x\in\mathbb{R}$. **14649** 2 ~K3.1

α) Να δείξετε ότι

$$f(x)=\begin{cases}x+3, & \text{αν } x\geq -1\\ 1-x, & \text{αν } x<-1\end{cases}$$ (Μονάδες 12)

β)

i. Να λυθεί η εξίσωση $|x-2|=4$.

ii. Να βρείτε την τιμή της παράστασης K αν ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 13)

5. Δίνεται η εξίσωση $(\alpha+3)x=\alpha^2-9$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$. **34146** 2 ~Κ3.1

α) Να λύσετε την εξίσωση στις παρακάτω περιπτώσεις:

i) όταν $\alpha=1$. (Μονάδες 5)

ii) όταν $\alpha=-3$. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές του α, για τις οποίες η εξίσωση έχει μοναδική λύση και να προσδιορίσετε τη λύση αυτή. (Μονάδες 12)

---

6. Δίνεται η εξίσωση $\kappa x+3=2x$, με παράμερο $\kappa \in \mathbb{R}$. **34872** 2 ~Κ3.1

α) Να λύσετε την εξίσωση για $\kappa=1$ και για $\kappa=3$. (Μονάδες 13)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση είναι αδύνατη για $\kappa=2$. (Μονάδες 12)

---

7. Δίνονται οι παραστάσεις $A=|2x-4|$ και $B=|x-3|$, με x πραγματικό αριθμό. **35033** 2 ~Κ3.1

α) Να αποδείξετε ότι αν $2 \le x < 3$, τότε $A+B=x-1$. (Μονάδες 16)

β) Υπάρχει $x \in [2,3)$ ώστε να ισχύει $A+B=2$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

---

8. Δίνεται η εξίσωση $(\lambda-1)x=\lambda^2-1$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. (1) **36896** 2 ~Κ3.1

α) Επιλέγοντας τρεις διαφορετικές τιμές για το λ, να γράψετε τρεις εξισώσεις. (Μονάδες 9)

β)

i. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η (1) να έχει μια και μοναδική λύση. (Μονάδες 8)

ii. Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η μοναδική λύση της εξίσωσης (1) να ισούται με 4. (Μονάδες 8)

---

9. Υποθέτουμε ότι κάθε κεφάλαιο που κατατίθεται σε έναν λογαριασμό μιας τράπεζας, αυξάνεται στο τέλος κάθε έτους κατά ε % (το επίσημο επιτόκιο αύξησης που δίνει δηλαδή η τράπεζα είναι ε %). **13170** 4 ~Κ3.1

α) Αποδείξτε ότι αν καταθέσουμε στη συγκεκριμένη τράπεζα κεφάλαιο x € με επιτόκιο ε %, ύστερα από δύο έτη θα εισπράξουμε κεφάλαιο $x \cdot \left(1+\frac{\varepsilon}{100}\right)^2$ €. (Μονάδες 7)

β) Ένα κεφάλαιο 15.000 € το χωρίζουμε σε δύο ποσά. Το ένα από τα δύο, κατατέθηκε σε μια τράπεζα Α με επιτόκιο 2% και το άλλο, κατατέθηκε σε μια άλλη τράπεζα Β με επιτόκιο 3%. Ύστερα από 2 χρόνια, εισπράχθηκε, με βάση το α) ερώτημα, και από τις δύο τράπεζες συνολικό κεφάλαιο 15.811 €. Ονομάζουμε y το ποσό που κατατέθηκε στην τράπεζα Β.

i) Να αποδείξετε ότι το ποσό y είναι λύση της εξίσωσης

$$(1{,}03^2-1{,}02^2)\cdot y=15811-15000\cdot 1{,}02^2$$ (Μονάδες 10)

ii) Να βρείτε το κεφάλαιο που κατατέθηκε σε κάθε τράπεζα. (Μονάδες 8)

10. Σε έναν άξονα τα σημεία Α , Β και Μ αντιστοιχούν στους αριθμούς 5, 9 και x αντίστοιχα. **36673** 4 ~Κ3.1

α) Να διατυπώσετε τη γεωμετρική ερμηνεία των παραστάσεων $|x-5|$και $|x-9|$. (Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $|x-5|=|x-9|$, τότε:

i) Ποια γεωμετρική ιδιότητα του σημείου Μ αναγνωρίζετε; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

ii) Με χρήση του άξονα, να προσδιορίσετε τον πραγματικό αριθμό x που παριστάνει το σημείο Μ. Να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

---

11. Ο ολικός δείκτης γονιμότητας (Total Fertility Rate) είναι ένας δημογραφικός δείκτης που εκτιμά τον μέσο αριθμό παιδιών που θα γεννούσε μια γυναίκα κατά τη διάρκεια της ζωής της, σύμφωνα με τα ποσοστά γονιμότητας ανά ηλικία ενός δεδομένου έτους. **38830** 4 ~Κ3.1

Ο τύπος με τον οποίο υπολογίζεται ο ολικός δείκτης γονιμότητας T είναι: $T=\frac{N\cdot 30}{F}$, όπου N ο αριθμός των γεννήσεων και F ο αριθμός των γυναικών που βρίσκονται σε αναπαραγωγική ηλικία (15-49 ετών).

α) Ένα άρθρο στο διαδίκτυο εξέφραζε τον φόβο του για τη γήρανση του πληθυσμού στην Ελλάδα, αναφέροντας ότι ο ολικός δείκτης γονιμότητας στη χώρα το 2022 ήταν μόλις 1,32 γεννήσεις ανά γυναίκα. Πόσες περίπου ήταν οι γεννήσεις το 2022, αν οι γυναίκες αναπαραγωγικής ηλικίας ήταν περίπου 1.730.000; (Μονάδες 6)

β) Σύμφωνα με τα στοιχεία της ΕΛΣΤΑΤ (Ελληνική Στατιστική Αρχή) το 2023 στην Ελλάδα οι γεννήσεις ανήλθαν σε 71.455 και ο ολικός δείκτης γονιμότητας ήταν 1,26 γεννήσεις ανά γυναίκα. Με βάση τον παραπάνω τύπο πόσες περίπου γυναίκες στην Ελλάδα το 2023 βρίσκονταν σε αναπαραγωγική ηλικία, δηλαδή ήταν από 15-49 ετών; (Μονάδες 6)

γ) Να γράψετε έναν τύπο, ο οποίος να υπολογίζει τον αριθμό των γυναικών που βρίσκονται σε αναπαραγωγική ηλικία, δηλαδή το F, όταν γνωρίζετε τον ολικό δείκτη γονιμότητας T και τον αριθμό των γεννήσεων N σε ένα έτος. (Μονάδες 7)

δ) Αν ο αριθμός των γεννήσεων N αυξηθεί κατά 20%, πώς θα αλλάξει ο ολικός δείκτης γονιμότητας, εφόσον ο αριθμός των γυναικών που βρίσκονται σε αναπαραγωγική ηλικία μείνει σταθερός; (Μονάδες 6)

12. Ο ενδοφλέβιος ορός χρησιμοποιείται για τη χορήγηση υγρών και φαρμάκων στους ασθενείς. **38851** 4 ~Κ3.1
Οι νοσηλευτές/τριες πρέπει να υπολογίζουν το ρυθμόν ροής D ενός ορού σε σταγόνες ανά λεπτό. Οι νοσηλευτές/τριες χρησιμοποιούν τον τύπο:

$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{d} \cdot \mathrm{V}}{\mathrm{n}}$, όπου

V είναι ο όγκος του ορού σε mL ,

d είναι ο συντελεστής σταγονομετρίας σε $σταγόνες/mL$ και

n είναι τα λεπτά που πρέπει να διαρκέσει ο ορός.

α)

i. Ένας ασθενής εισάγεται στα επείγοντα με σοβαρό αλλεργικό σοκ. Ο γιατρός δίνει εντολή να χορηγηθούν ενδοφλεβίως $V = 250\ mL$ διαλύματος (που περιέχει αδρεναλίνη) μέσα σε $20\ λεπτά$. Η συσκευή που χρησιμοποιείται έχει συντελεστή σταγονομετρίας $d = 20\ σταγόνες/mL$. Ποιος πρέπει να είναι ο ρυθμός ροής D του ορού, για να χορηγηθεί η αδρεναλίνη στο σωστό χρόνο; (Μονάδες 4)

ii. Ένας ασθενής με υπογλυκαιμία χρειάζεται να λάβει $V = 500\ mL$ διαλύματος (που περιέχει Κάλιο). Η συσκευή έγχυσης έχει συντελεστή σταγονομετρίας $d = 15\ σταγόνες/mL$ και ο ρυθμός ροής του ορού είναι $D = 25$ σταγόνες ανά λεπτό. Σε πόσες ώρες θα έχει χορηγηθεί το Κάλιο; (Μονάδες 4)

β) Να υπολογίσετε τον όγκο V ενός διαλύματος που χορηγείται σε 6 ώρες, αν:

i. Ο ρυθμός ροής D του ορού είναι διπλάσιος του συντελεστή σταγονομετρίας d.(Μονάδες 6)

ii. Ο συντελεστής σταγονομετρίας d είναι το 1/3 του ρυθμού ροής D του ορού. (Μονάδες 6)

γ) Να υποθέσετε ότι είστε νοσηλευτής/τρια και έχετε στην διάθεσή σας μια κούτα με ίδιες συσκευές έγχυσης, αλλά δεν γνωρίζετε τον συντελεστή σταγονομετρίας τους d. Διαθέτετε επίσης ορούς των $V = 100mL$ και ένα χρονόμετρο. Να περιγράψετε τρόπους για να υπολογίσετε τον d. (Μονάδες 5)

13. Για να μετρήσουμε την καθαρότητα του χρυσού, χρησιμοποιούμε το καράτι, το οποίο δείχνει **38926** 4 ~Κ3.1
τι μέρος σε εικοστά τέταρτα είναι ο καθαρός χρυσός σε ένα μείγμα μετάλλων. Σε φύλλο χρυσού 24 καρατίων τα $\frac{24}{24}$, ή αλλιώς το 100%, είναι καθαρός χρυσός.

α) Να βρείτε το ποσοστό του καθαρού χρυσού σε ένα μείγμα 18 καρατίων, σε ένα μείγμα 14 καρατίων και σε ένα μείγμα 9 καρατίων. (Μονάδες 6)

β) Από δύο μείγματα 24 και 9 καρατίων φτιάχνουμε ένα νέο. Αν από το πρώτο μείγμα πάρουμε 17 γραμμάρια και από το δεύτερο 7 γραμμάρια, τότε να αποδείξετε ότι το νέο μείγμα είναι $19{,}625$ καρατίων. (Μονάδες 9)

γ) Έχουμε δύο μείγματα, το ένα 24 καρατίων και το άλλο 9 καρατίων. Πόσα γραμμάρια θα χρησιμοποιήσουμε από το καθένα, για να φτιάξουμε ένα μείγμα 18 καρατίων συνολικού βάρους 20 γραμμαρίων; (Μονάδες 10)

(Δίνεται: $\frac{63}{24} = 2{,}625$)

14. α) Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω ανισότητες ισχύουν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και να βρείτε για ποιες τιμές του x ισχύουν ως ισότητες. **14820** 4 ~K3.2

i. $x^2 + x + 1 \geq \frac{3}{4}$ (Μονάδες 4)

ii. $x^2 - x + 1 \geq \frac{3}{4}$ (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι $(x^2 + x + 1)(x^2 - x + 1) > \frac{9}{16}$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 6)

γ) Δίνεται η παράσταση $A = \frac{(x^3-1)(x^3+1)}{x^2-1}$.

i. Να βρείτε για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση A. (Μονάδες 5)

ii. Με τη βοήθεια του β) ή με οποιοδήποτε άλλο τρόπο θέλετε, να εξετάσετε αν η παράσταση A μπορεί να πάρει την τιμή $\frac{9}{16}$. (Μονάδες 6)

---

15. **14741** 2 ~K3.3

Δίνεται η αλγεβρική παράσταση $K = \frac{\alpha\left(\alpha^2 - 2\alpha + 1\right)}{\alpha^3 - \alpha^2}, \alpha \neq 0, \alpha \neq 1$.

α) Να δείξετε ότι $K = \frac{\alpha - 1}{\alpha}$.

(Μονάδες 13)

β) Για κάθε $\alpha \neq 0$ και $\alpha \neq 1$,

i) Να δείξετε ότι $K \neq 0$.

(Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία ισχύει η ισότητα $K(K-2) = 0$

(Μονάδες 6)

---

16. α) Να λύσετε την εξίσωση: $2x^2 - x - 6 = 0$ (1). (Μονάδες 09) **34149** 2 ~K3.3

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| < 2$ (2). (Μονάδες 09)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν τιμές του x που ικανοποιούν ταυτόχρονα τις σχέσεις (1) και (2).
(Μονάδες 07)

---

17. Δίνονται δύο πραγματικοί αριθμοί α, β, τέτοιοι ώστε $\alpha + \beta = 12$ και $\alpha^2 + \beta^2 = 272$ **34150** 2 ~K3.3

α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$, να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = -64$
(Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς α, β. (Μονάδες 10)

γ) Να προσδιορίσετε τους αριθμούς α, β. (Μονάδες 7)

18. Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{3-\sqrt{7}}$, $B=\frac{1}{3+\sqrt{7}}$ **34154** 2 ~Κ3.3

α) Να δείξετε ότι: $A+B=3$ και $A\cdot B=\frac{1}{2}$ (Μονάδες 12)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού που έχει ρίζες τους αριθμούς A, B. (Μονάδες 13)

---

19. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $|2x-1|=3$ (Μονάδες 12) **34161** 2 ~Κ3.3

β) Αν α, β με $\alpha<\beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+3=0$ (Μονάδες 13)

---

20. Δίνονται οι αριθμοί: $A=\frac{1}{5+\sqrt{5}}$ και $B=\frac{1}{5-\sqrt{5}}$ **34436** 2 ~Κ3.3

α) Να δείξετε ότι:

i) $A+B=\frac{1}{2}$ (Μονάδες 8)

ii) $A\cdot B=\frac{1}{20}$ (Μονάδες 8)

β) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς A και B.(Μονάδες 9)

---

21. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2+x-1$ (1). **34920** 2 ~Κ3.3

α) Αν x_1, x_2 είναι ρίζες του τριωνύμου (1), να βρείτε την τιμή των παραστάσεων x_1+x_2, x_1x_2 και $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 13)

β) Αν $\frac{1}{x_1}=-1$ και $\frac{1}{x_2}=2$, να βρείτε μια εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ρίζες τις $\frac{1}{x_1}$ και $\frac{1}{x_2}$. (Μονάδες 12)

---

22. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: $\alpha\cdot\beta=4$ και $\alpha^2\beta+\alpha\beta^2=20$ **35038** 2 ~Κ3.3

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha+\beta=5$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β, και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

---

23. α) Να βρείτε τις ρίζες της εξίσωσης $-2x^2+10x=12$. (Μονάδες 15) **35100** 2 ~Κ3.3

β) Να λύσετε την εξίσωση $\frac{-2x^2+10x-12}{x-2}=0$. (Μονάδες 10)

24. Δίνεται η παράσταση: $K = \frac{x^2-4x+4}{2x^2-3x-2}$ **35382** 2 ~K3.3

α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - 3x - 2$. (Μονάδες 10)

β) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζεται η παράσταση K; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση K. (Μονάδες 8)

---

25. **α)** Να λύσετε την εξίσωση $|x - 2| = 3$ (Μονάδες 10) **36890** 2 ~K3.3

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες, τις ρίζες της εξίσωσης του α) ερωτήματος. (Μονάδες 15)

---

26. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί για τους οποίους ισχύουν: **37171** 2 ~K3.3

$\alpha + \beta = 2$ και $\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 = -30$.

α) Να αποδείξετε ότι: $\alpha \cdot \beta = -15$. (Μονάδες 10)

β) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τους αριθμούς α, β και να τους βρείτε. (Μονάδες 15)

---

27. Το πάτωμα του εργαστηρίου της πληροφορικής ενός σχολείου είναι σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις $x + 1$ μέτρα και x μέτρα. **37178** 2 ~K3.3

α) Να γράψετε με τη βοήθεια του x την περίμετρο και το εμβαδόν του πατώματος.(Μονάδες 10)

β) Αν το εμβαδόν του πατώματος του εργαστηρίου είναι 90 τετραγωνικά μέτρα, να βρείτε τις διαστάσεις του. (Μονάδες 15)

---

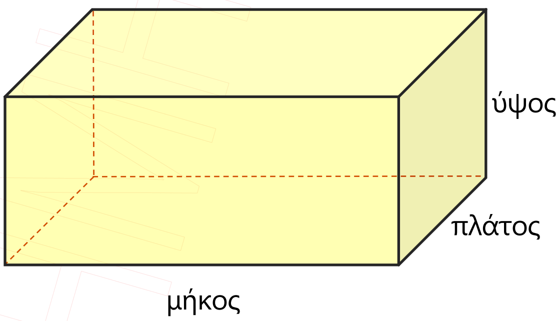
28. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - (\lambda - 1)x + 6 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ **37181** 2 ~K3.3

α) Αν η παραπάνω εξίσωση έχει λύση το 1, να βρείτε το λ. (Μονάδες 13)

β) Για $\lambda = 2$ να λύσετε την εξίσωση (1) (Μονάδες 12)

---

29. Η δεξαμενή του παρακάτω σχήματος έχει σχήμα ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου με βάση τετράγωνο και ύψος ίσο με το ένα τέταρτο του μήκους της. **12683** 4 ~K3.3



α) Αν η δεξαμενή έχει όγκο 16 m^3 , να βρείτε τις διαστάσεις της. (Μονάδες 8)

β) Λόγω έλλειψης χώρου η δεξαμενή ανακατασκευάζεται με βάση ορθογώνιο παραλληλόγραμμο και ύψος 2 μέτρα. Αν το πλάτος της νέας δεξαμενής είναι κατά 2m μικρότερο από το μήκος της υπολογίστε τις διαστάσεις της βάσης προκειμένου ο όγκος να παραμείνει 16 m^3 . (Μονάδες 9)

γ) Αν η νέα δεξαμενή περιέχει 10 m^3 πετρέλαιο να βρείτε το ύψος της στάθμης του πετρελαίου μέσα στη δεξαμενή. (Μονάδες 8)

30. Δίνονται οι μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί α, β, με $\alpha \neq \beta$ για τους οποίους ισχύει: $\frac{\alpha^2+1}{\beta^2+1} = \frac{\alpha}{\beta}$. **14406** [4] ~K3.3

α) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι. (Μονάδες 5)

β) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $K = \frac{\alpha^{22}\cdot\left(\beta^3\right)^8}{\alpha^{-2}\cdot(\alpha\beta)^{25}}$ (Μονάδες 7)

γ) Αν επιπλέον οι μη μηδενικοί αριθμοί α και β εκφράζουν τα μήκη των πλευρών ορθογωνίου παραλληλογράμμου με άθροισμα $\frac{5}{2}$, να τους υπολογίσετε.(Μονάδες 8)

δ) Να βρείτε τον αριθμό που πρέπει να προσθέσετε στο α ή στο β , έτσι ώστε το ορθογώνιο παραλληλόγραμμο να γίνει τετράγωνο. (Μονάδες 5)

---

31. Έστω Ω το σύνολο που έχει ως στοιχεία τους αριθμούς που είναι οι ενδείξεις ενός ζαριού. **14490** [4] ~K3.3

α) Να γράψετε με αναγραφή το σύνολο Ω. (Μονάδες 5)

β) Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2x + \lambda - 2 = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Να βρείτε:

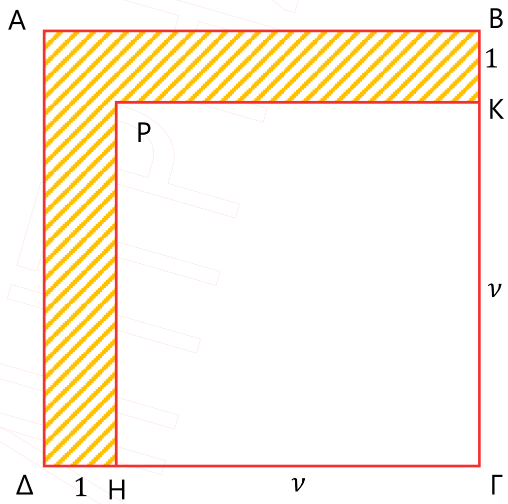
i. Το σύνολο A που περιέχει ως στοιχεία τις τιμές του $\lambda \in \Omega$, αν επιπλέον γνωρίζετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 10)

ii. Την πραγματική τιμή του λ, αν η εξίσωση έχει ρίζες αντίστροφες. (Μονάδες 6)

γ) Για την τιμή του λ που βρήκατε στο ερώτημα β ii να υπολογίσετε τις ρίζες της εξίσωσης. (Μονάδες 4)

---

32. Κάθε περιττός ακέραιος αριθμός α γράφεται στη μορφή $\alpha = 2\kappa + 1$, κ ακέραιος **14543** [4] ~K3.3



α) Να γράψετε τους αριθμούς 3,5,7 ως διαφορά τετραγώνων δύο ακεραίων. (Μονάδες 6)

β) i) Να αποδείξετε ότι η διαφορά των τετραγώνων δύο διαδοχικών ακεραίων ισούται πάντα με έναν περιττό ακέραιο. (Μονάδες 6)

ii) Να γράψετε τον αριθμό 2021 ως διαφορά δύο τετραγώνων ακεραίων αριθμών. (Μονάδες 6)

γ) Στο σχήμα τα τετράπλευρα ΑΒΓΔ και ΓΗΡΚ είναι τετράγωνα με $(\Gamma H) = (\Gamma K) = \nu$ και $(BK) = (\Delta H) = 1$. Αν γνωρίζουμε ότι το γραμμοσκιασμένο εμβαδόν είναι ίσο με το εμβαδόν ενός τετραγώνου πλευράς 45, να βρεθεί η τιμή του θετικού ακεραίου ν. (Μονάδες 7)

33. Οι πλευρές x_1, x_2 ενός ορθογωνίου παραλληλογράμμου είναι οι ρίζες της εξίσωσης: **14651** 4 ~K3.3

$x^2 - 4\left(\lambda + \frac{1}{\lambda}\right)x + 16 = 0$ όπου $\lambda > 0$.

α) Να βρείτε:

i. την περίμετρο Π του ορθογωνίου συναρτήσει του λ. (Μονάδες 6)

ii. το εμβαδόν E του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $\Pi \geq 16$, για κάθε $\lambda > 0$. (Μονάδες 7)

γ) Για ποια τιμή του λ η περίμετρος Π του ορθογωνίου γίνεται ελάχιστη, δηλαδή ίση με 16; Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

---

34. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3x^2 + 6\alpha x + 6\beta,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}$. **14759** 4 ~K3.3

α) Να δείξετε ότι: $f(\alpha) + f(\beta) \geq \beta^2 - 36$ (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ για τις οποίες ισχύει $f(\alpha) + f(\beta) = \beta^2 - 36$(Μονάδες 6)

γ) Αν $\alpha = 2$ και $\beta = -6$

i) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 6x$ (Μονάδες 6)

ii) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος γi), να δείξετε ότι ισχύει:

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} = \frac{1}{6}$ (Μονάδες 5)

---

35. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2x + \lambda = 0$, με παράμετρο $\lambda < 1$. **33584** 4 ~K3.3

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες x_1, x_2 διαφορετικές μεταξύ τους. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι: $x_1 + x_2 = 2$ (Μονάδες 4)

γ) Αν για τις ρίζες x_1, x_2 ισχύει επιπλέον $|x_1 - 2| = |x_2 + 2|$, τότε:

i) Να δείξετε ότι: $x_1 - x_2 = 4$ (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις ρίζες x_1, x_2 και η τιμή του λ (Μονάδες 8)

---

36. Δίνεται η εξίσωση $\alpha x^2 - (\alpha^2 - 1)x - \alpha = 0$, με παράμετρο $\alpha \neq 0$. **33585** 4 ~K3.3

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης είναι: $\Delta = (\alpha^2 + 1)^2$. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις ρίζες ρ_1 και ρ_2 της εξίσωσης, ως συνάρτηση του α. (Μονάδες 10)

Αν οι ρίζες της εξίσωσης είναι $\rho_1 = \alpha$ και $\rho_2 = -\frac{1}{\alpha}$,

γ) Να βρείτε τις τιμές του α ώστε $|\rho_1 - \rho_2| = 2$. (Μονάδες 10)

37. α) Δίνεται η εξίσωση: $x^4 - 8x^2 - 9 = 0$. **33826** 4 ~K3.3

Να δείξετε ότι η εξίσωση αυτή έχει δύο μόνο πραγματικές ρίζες, τις οποίες και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 10)

β) Γενικεύοντας το παράδειγμα του προηγούμενου ερωτήματος, θεωρούμε την εξίσωση: $x^4 + \beta x^2 + \gamma = 0$ (1) με παραμέτρους $\beta, \gamma \in \mathbb{R}$.

Να δείξετε ότι αν $\gamma < 0$, τότε:

i) $\beta^2 - 4\gamma > 0$. (Μονάδες 3)

ii) Η εξίσωση (1) έχει δύο μόνο διαφορετικές πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 12)

---

38. α) Να λύσετε τις εξισώσεις **33889** 4 ~K3.3

$3x^2 - 14x + 8 = 0$ (1) και $8x^2 - 14x + 3 = 0$ (2) (Μονάδες10)

β) Ένας μαθητής παρατήρησε ότι οι ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αντίστροφοι των ριζών της εξίσωσης (1) και ισχυρίστηκε ότι το ίδιο θα ισχύει για οποιοδήποτε ζευγάρι εξισώσεων της μορφής:

$\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ (3) και $\gamma x^2 + \beta x + \alpha = 0$ (4), με $\alpha \cdot \gamma \neq 0$.

Να αποδείξετε τον ισχυρισμό του μαθητή, δείχνοντας ότι:

Αν ο αριθμός ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (3) και $\alpha \cdot \gamma \neq 0$, τότε

i) $\rho \neq 0$. (Μονάδες 5)

ii) $\frac{1}{\rho}$ είναι ρίζα της εξίσωσης (4). (Μονάδες 10)

---

39. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (2\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$. **34310** 4 ~K3.3

α) Να δείξετε ότι η διακρίνουσα Δ της εξίσωσης είναι ανεξάρτητη του λ, δηλαδή σταθερή. (Μονάδες 8)

β) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της εξίσωσης συναρτήσει του λ. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η απόσταση των ριζών της εξίσωσης στον άξονα των πραγματικών αριθμών είναι ίση με 2 μονάδες. (Μονάδες 10)

---

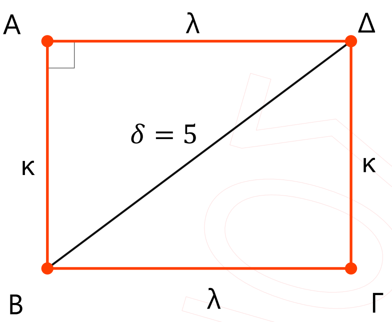
40. **α)** Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 3x - 4 = 0$ (1). (Μονάδες 10) **34327** 4 ~K3.3

β) Δίνονται οι ομόσημοι αριθμοί α, β για τους οποίους ισχύει: $\alpha^2 - 3\alpha\beta - 4\beta^2 = 0$.

i) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha}{\beta}$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 7)

ii) Να αιτιολογήσετε γιατί ο α είναι τετραπλάσιος του β. (Μονάδες 8)

41. Δίνεται ορθογώνιο με διαστάσεις κ και λ του οποίου η περίμετρος είναι $\Pi = 14\ cm$ και μια διαγώνιος $\delta = 5\ cm$. **34390** 4 ~Κ3.3



α)

i. Με χρήση της ταυτότητας $(\kappa+\lambda)^2 = \kappa^2 + 2\kappa\lambda + \lambda^2$, να δείξετε ότι για το εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E = 12\ cm^2$. (Μονάδες 7)

ii. Να αιτιολογήσετε γιατί οι τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 7x + 12 = 0$. (Μονάδες 7)

iii. Να βρείτε τις διαστάσεις κ και λ του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ένα ορθογώνιο με περίμετρο $\Pi = 14\ cm$ πρέπει να έχει εμβαδόν $E \leq \frac{49}{4}$.
(Μονάδες 7)

---

42. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4(\lambda - 1) = 0$ (1) με άγνωστο το x και παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. **34544** 4 ~Κ3.3

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα της εξίσωσης (1) είναι η $\Delta = (2\lambda - 4)^2$.(Μονάδες 7)

β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης (1) για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου λ. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή της παραμέτρου λ ο αριθμός $x = 2$ είναι λύση της εξίσωσης (1). (Μονάδες 9)

---

43. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + 4\lambda + 5 = 0$ με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$. **36651** 4 ~Κ3.3

α) Να βρείτε το πλήθος των πραγματικών ριζών της εξίσωσης όταν $\lambda = -2$ και όταν $\lambda = 3$.
(Μονάδες 8)

β) i. Να αποδείξετε ότι αν $\lambda = 5$, τότε η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα. (Μονάδες 3)

ii. Να εξετάσετε αν υπάρχει άλλη τιμή του λ, ώστε η εξίσωση να έχει διπλή ρίζα.(Μονάδες 6)

γ) Αν ισχύει $|\lambda^2 - 4\lambda - 5| = 4\lambda - \lambda^2 + 5, \lambda \in \mathbb{R} - \{-1{,}5\}$ να αποδείξετε ότι η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 8)

---

44. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 - \lambda)x^2 - (\lambda^2 - 1)x + \lambda - 1 = 0$, (1) με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$ **36661** 4 ~Κ3.3

α) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις οποίες η (1) είναι εξίσωση 2ου βαθμού.

(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) παίρνει τη μορφή: $\lambda x^2 - (\lambda + 1)x + 1 = 0$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι για τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ που βρήκατε στο (α) ερώτημα η (1) έχει δυο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 7)

δ) Να προσδιορίσετε τις ρίζες της (1), αν αυτή είναι 2ου βαθμού. (Μονάδες 6)

45. Για την κάλυψη, με τετράγωνα πλακάκια, μέρους ενός τοίχου, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πλακάκια τύπου Α με πλευρά d cm ή πλακάκια τύπου Β με πλευρά $(d+1)$ cm. **36663** 4 ~K3.3

α) Να βρείτε, ως συνάρτηση του d, το εμβαδόν που καλύπτει κάθε πλακάκι τύπου Α και κάθε πλακάκι τύπου Β. (Μονάδες 6)

β) Αν η επιφάνεια μπορεί να καλυφθεί είτε με 200 πλακάκια τύπου Α είτε με 128 τύπου Β, να βρείτε:

i) Τη διάσταση που έχει το πλακάκι κάθε τύπου. (Μονάδες 12)

ii) Το εμβαδόν της επιφάνειας που καλύπτουν. (Μονάδες 7)

---

46. Δίνεται η εξίσωση $x^2-4x+2-\lambda^2=0$ (1) με παράμετρο $\lambda\in\mathbb{R}$. **36675** 4 ~K3.3

α) Να αποδείξετε ότι, για οποιαδήποτε τιμή του $\lambda\in\mathbb{R}$, η (1) έχει δύο ρίζες άνισες. (Μονάδες 10)

β) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1):

i) Να βρείτε το $S=x_1+x_2$.

ii) Να βρείτε το $P=x_1\cdot x_2$ ως συνάρτηση του πραγματικού αριθμού λ.

(Μονάδες 5)

γ) Αν η μία ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2+\sqrt{3}$ τότε:

i) να αποδείξετε ότι η άλλη ρίζα της εξίσωσης (1) είναι ο αριθμός $2-\sqrt{3}$,

ii) να βρείτε το λ. (Μονάδες 10)

47. Υπάρχουν αρκετοί τύποι για τον υπολογισμό της δόσης ενός φαρμάκου για παιδιά με βάση τη δόση για ενήλικες. Κάποιοι από αυτούς χρησιμοποιούν την ηλικία του παιδιού και κάποιοι το σωματικό του βάρος. Οι τύποι που δίνονται στη συνέχεια χρησιμοποιούν την ηλικία του παιδιού και ισχύουν για παιδιά με μέσο βάρος και μέση ανάπτυξη. **38861** 4 ~Κ3.3

Τύπος του Γιουνγκ (Young's Formula): $Δόση\ για\ παιδιά = \frac{ε}{ε+12} \cdot Δόση\ για\ ενήλικες$, όπου $ε$ είναι η ηλικία του παιδιού (σε έτη) από ενός έτους μέχρι 12 ετών.

Τύπος του Φράιντ (Fried's Formula): $Δόση\ για\ παιδιά = \frac{μ}{150} \cdot Δόση\ για\ ενήλικες$, όπου $μ$ είναι η ηλικία του παιδιού (σε μήνες) έως 24 μηνών.

α) Αν το παιδί είναι 1,5 έτους, να βρείτε τι μέρος της δόσης που αντιστοιχεί στον ενήλικα θα πάρει το παιδί, χρησιμοποιώντας καθέναν από τους δύο παραπάνω τύπους. (Μονάδες 4)

β)

i. Να βρείτε, χρησιμοποιώντας τον τύπο του Γιουνγκ, πόσων ετών πρέπει να είναι το παιδί, για να πάρει δόση φαρμάκου $60mgr$, εάν η δόση για τον ενήλικα είναι $300mg$. (Μονάδες 5)

ii. Να δείξετε ότι σύμφωνα με τον τύπο του Φράιντ, για τη δόση του παιδιού ισχύει:

$$0 < Δόση\ για\ παιδιά \leq \frac{4}{25} \cdot Δόση\ για\ ενήλικες.$$

(Μονάδες 5)

iii. Θα μπορούσε με βάση τον τύπο του Φράιντ η δόση για το παιδί να είναι $60mgr$, αν η δόση για τον ενήλικα είναι $300mgr$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.(Μονάδες 5)

γ) Θα μπορούσε σε κάποια ηλικία το παιδί να πάρει την ίδια δόση του φαρμάκου με βάση και τους δύο παραπάνω τύπους; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας.

(Μονάδες 6)

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.

48. Η Μαρία επιθυμεί να φτιάξει έναν ορθογώνιο κήπο έξω από το σπίτι της και, για να υπολογίσει το μήκος και το πλάτος του, θέλει να ικανοποιούνται δύο βασικές προδιαγραφές: η περίμετρος του κήπου να είναι $26\ m$ και το εμβαδόν του να είναι $40\ m^2$. **38923** 4 ~Κ3.3

α) Να κατασκευάσετε μια εξίσωση, η οποία να έχει ως λύσεις το μήκος και το πλάτος του κήπου. (Μονάδες 6)

β) Ποιες είναι οι διαστάσεις του κήπου (μήκος και πλάτος); (Μονάδες 5)

γ) Η Μαρία θέλει να βάλει στη μέση του κήπου ένα στρογγυλό παρτέρι με εμβαδόν $20m^2$. Θα χωρέσει το παρτέρι στον κήπο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Δίνεται το εμβαδόν κύκλου $E = πρ^2$, όπου $ρ$ η ακτίνα του κύκλου και $π \cong 3,14$).(Μονάδες 7)

δ) Η Μαρία σκέφτεται μήπως αλλάξει το πλάτος του κήπου, διατηρώντας σταθερό το εμβαδόν του στα $40\ m^2$. Επειδή όμως περιορίζεται από την διαθέσιμη επιφάνεια του οικοπέδου του σπιτιού, η νέα διάσταση του πλάτους πρέπει να είναι μικρότερη από $7\ m$ και μεγαλύτερη από $4\ m$. Να υπολογίσετε το διάστημα των τιμών που μπορεί να έχει το μήκος του κήπου. (Μονάδες 7)

Δίνεται $\sqrt{6,37} \cong 2,52$.

Το παραπάνω θέμα αναπτύχθηκε στο πλαίσιο του έργου: «Ανάπτυξη Δοκιμασιών Αξιολόγησης Δεξιοτήτων Εγγραμματισμού στα μαθήματα της Νεοελληνικής Γλώσσας και Λογοτεχνίας, της Άλγεβρας, της Φυσικής και της Χημείας Α' Λυκείου Γενικού Λυκείου» Ανάδοχος: «Ειδικός Λογαριασμός Κονδυλίων Έρευνας (Ε.Λ.Κ.Ε) Πανεπιστημίου Ιωαννίνων» ΑΔΑΜ: 25SYMV016348911 2025-02-20.