

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 4ο : Ανισώσεις

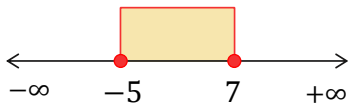
76 θέματα

- 1.** Δίνεται ο πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει $|x - 3| < 5$. **12909** 2 **4.1** ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
1ου ΒΑΘΜΟΥ
- α) Να δείξετε ότι $x \in (-2, 8)$. (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες ισχύει $|x - 3| < 5$. (Μονάδες 7)
- γ) Αν A το σύνολο που έχει στοιχεία τις ακέραιες τιμές του x που βρήκατε στο β) ερώτημα και B το σύνολο με $B = \{-3, -2, -1, 0, 3, 4\}$ να παραστήσετε τα σύνολα $A \cup B$ και $A \cap B$ με αναγραφή των στοιχείων τους. (Μονάδες 9)
-
- 2.** α) Να λύσετε την ανίσωση $-\frac{3-2x}{7} \geq 5$. (Μονάδες 10) **13025** 2 **2.1** ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΙ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΟΥΣ, **2.2**
ΔΙΑΤΑΞΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩ
Ν ΑΡΙΘΜΩΝ,
2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, **4.1**
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου
ΒΑΘΜΟΥ
- β) Να λύσετε την ανίσωση $|-x - 1| \leq 23$. (Μονάδες 10)
- γ) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 5)

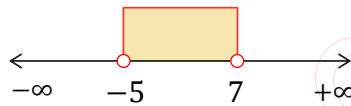
3. α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της ανίσωσης $|x - 1| \geq 6$ και στη συνέχεια να βρείτε τη θέση του πραγματικού αριθμού x πάνω στον άξονα, επιλέγοντας μια από τις παρακάτω αναπαραστάσεις:

14295 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

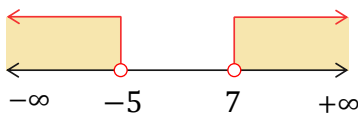
1.



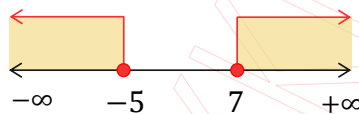
2.



3.



4.



(Μονάδες 12)

- β) Να αποδείξετε αλγεβρικά την απάντησή σας στο α) ερώτημα. (Μονάδες 13)

4. Δίνεται η ανίσωση $|2x - 5| < 3$

14319 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

- α) Να λύσετε την ανίσωση.

(Μονάδες 12)

- β) αν ο αριθμός α είναι μια λύση της ανίσωσης να βρείτε το πρόσημο του γινομένου:

$$A = (\alpha - 1)(\alpha - 5).$$

(Μονάδες 13)

5. Για τους πραγματικούς αριθμούς $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει ότι: $|\alpha - 2| < 1$ και $|\beta - 3| \leq$

34148 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

2.

- α) Να αποδείξετε ότι $1 < \alpha < 3$.

(Μονάδες 4)

- β) Να βρείτε τα όρια μεταξύ των οποίων βρίσκεται ο β .

(Μονάδες 5)

- γ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $2\alpha - 3\beta$.

(Μονάδες 7)

- δ) Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της παράστασης $\frac{\alpha}{\beta}$.

(Μονάδες 9)

6. Δίνεται η εξίσωση:

$$x^2 - x + \lambda - \lambda^2 = 0, \text{ με παράμετρο } \lambda \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ της εξίσωσης και να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του λ η εξίσωση (1) έχει δύο άνισες ρίζες; (Μονάδες 6)

γ) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του λ ισχύει

$$0 < d(x_1, x_2) < 2. \quad (\text{Μονάδες } 9)$$

3504

3

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

7. Δίνονται οι πραγματικοί αριθμοί y , για τους οποίους ισχύει: $|y - 2| < 1$.

3504

4

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

α) Να αποδείξετε ότι: $y \in (1, 3)$ (Μονάδες 12)

β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|y-1| + |y-3|}{2}$ (Μονάδες 13)

8. α) Να βρείτε για ποιες πραγματικές τιμές του y ισχύει: $|y - 3| < 1$. (Μονάδες 15)

3540

4

2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

β) Αν για τους x, y ισχύουν $1 < x < 3$ και $2 < y < 4$, τότε να αποδείξετε ότι

$$3 < x + y < 7. \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

9. Δίνεται η παράσταση: $A = |x - 1| - |x - 2|$.

35415

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

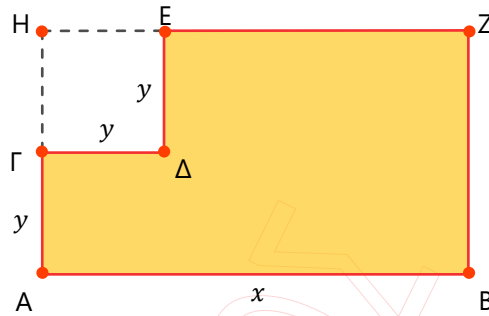
α) Για $1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $A = 2x - 3$ (Μονάδες 13)

β) Για $x < 1$, να δείξετε ότι η παράσταση A έχει σταθερή τιμή (ανεξάρτητη του x), την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 12)

10. Από το ορθογώνιο ABZH

αφαιρέθηκε το τετράγωνο ΓΔΕΗ
πλευράς y .

α) Να αποδείξετε ότι η περίμετρος
του γραμμοσκιασμένου σχήματος
EZBAΓΔ που απέμεινε δίνεται από
τη σχέση: $\Pi = 2x + 4y$.



3554
9

2 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
1ου ΒΑΘΜΟΥ

(Μονάδες 10)

β) Αν ισχύει $5 < x < 8$ και $1 < y < 2$, να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών
βρίσκεται η τιμή της περιμέτρου του παραπάνω γραμμοσκιασμένου
σχήματος.

(Μονάδες 15)

11. Δίνονται δύο ευθύγραμμα τμήματα με μήκη x και y , για τα οποία ισχύουν:

$$|x - 3| \leq 2 \text{ και } |y - 6| \leq 4.$$

α) Να αποδείξετε ότι: $1 \leq x \leq 5$ και $2 \leq y \leq 10$.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε την μικρότερη και τη μεγαλύτερη τιμή που μπορεί να πάρει η
περίμετρος ενός ορθογωνίου με διαστάσεις $2x$ και y .

(Μονάδες 13)

36777 2

2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩ
Ν ΑΡΙΘΜΩΝ,
2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου
ΒΑΘΜΟΥ

12. α) Να λύσετε την ανίσωση $|x - 5| < 2$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $|2 - 3x| > 5$.

(Μονάδες 8)

γ) Να παραστήσετε τις λύσεις των δυο προηγούμενων ανισώσεων στον ίδιο
άξονα των πραγματικών αριθμών. Με τη βοήθεια του άξονα, να προσδιορίσετε
το σύνολο των κοινών τους λύσεων και να το αναπαραστήσετε με διάστημα ή
ένωση διαστημάτων.

(Μονάδες 9)

36886 2

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου
ΒΑΘΜΟΥ

13. α) Να λύσετε την ανίσωση $3x - 1 < x + 9$.

(Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση $2 - \frac{x}{2} \leq x + \frac{1}{2}$.

(Μονάδες 8)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις
των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή
διαστήματος.

(Μονάδες 10)

36888 2

4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
1ου ΒΑΘΜΟΥ

14. α) Να λύσετε την ανίσωση: $|2x - 1| \leq 7$.

(Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| > 2$.

(Μονάδες 9)

γ) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών να βρείτε τις κοινές λύσεις
των ανισώσεων των ερωτημάτων α) και β) και να τις γράψετε σε μορφή
διαστήματος.

(Μονάδες 7)

36893 2

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου
ΒΑΘΜΟΥ

- 15.** α) Να λύσετε την εξίσωση: $|2x + 4| = 10$. (Μονάδες 9) **36895** 2 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ
- β) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 5| > 1$. (Μονάδες 9)
- γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
-
- 16.** Η θερμοκρασία T σε βαθμούς Κελσίου ($^{\circ}\text{C}$), σε βάθος x χιλιομέτρων κάτω από την επιφάνεια της Γης, δίνεται κατά προσέγγιση από τη σχέση:
- $$T = 15 + 25 \cdot x, \text{ όταν } 0 \leq x \leq 200$$
- α) Να βρείτε τη θερμοκρασία ενός σημείου, το οποίο βρίσκεται 30 χιλιόμετρα κάτω από την επιφάνεια της Γης. (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε το βάθος στο οποίο η θερμοκρασία είναι ίση με 290°C . (Μονάδες 10)
- γ) Σε ποιο βάθος μπορεί να βρίσκεται ένα σημείο, στο οποίο η θερμοκρασία είναι μεγαλύτερη από 440°C ; (Μονάδες 8)
-
- 17.** α) Να λύσετε τις παρακάτω ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:
- i. $|1 - 2x| < 5$ (Μονάδες 9)
- ii. $|1 - 2x| \geq 1$ (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τις ακέραιες τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)
-
- 18.** Δίνεται η παράσταση $A = (\sqrt{x - 4} + \sqrt{x + 1}) \cdot (\sqrt{x - 4} - \sqrt{x + 1})$ **37193** 2 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ
- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι η παράσταση A είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 13)
-
- 19.** Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x - 4} + \sqrt{6 - x}$ **37195** 2 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ
- α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 13)
- β) Για $x = 5$, να αποδείξετε ότι: $A^2 + A - 6 = 0$ (Μονάδες 12)

20. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{x^2 + 4} - \sqrt{x - 4}$

37196 2 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

α) Για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας και να γράψετε το σύνολο των δυνατών τιμών του x σε μορφή διαστήματος. (Μονάδες 12)

β) Αν $x = 4$, να αποδείξετε ότι $A^2 - A = 2 \cdot (10 - \sqrt{5})$. (Μονάδες 13)

21. Αν ο πραγματικός αριθμός x ικανοποιεί τη σχέση: $|x + 1| < 2$,

37200 2 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

α) Να δείξετε ότι $x \in (-3, 1)$ (Μονάδες 12)

β) Να δείξετε ότι η τιμή της παράστασης $K = \frac{|x+3|+|x-1|}{4}$, είναι αριθμός ανεξάρτητος του x . (Μονάδες 13)

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x-1|-|3-3x|+|2x-4|}{2}$.

13114 4 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

α) Να δείξετε ότι $f(x) = d(x, 2) - d(x, 1)$. (Μονάδες 9)

β) Αν τα σημεία A και B παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς 1 και 2, να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της εξίσωσης $f(x) = 0$ και να προσδιορίσετε τη λύση της. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 0$. (Μονάδες 8)

23. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 6x + \lambda = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.

13312 4 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του λ η εξίσωση (1) έχει πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

β) Αν δύο πραγματικοί αριθμοί α και β έχουν σταθερό άθροισμα 6 και γινόμενο $\alpha \cdot \beta = \lambda$, τότε:

i. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta \leq 9$. (Μονάδες 6)

ii. Να δείξετε ότι $\alpha \cdot \beta = 9$ αν και μόνο αν $\alpha = \beta$. (Μονάδες 5)

γ) Να δείξετε ότι από όλα τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα με διαστάσεις α , β και περίμετρο 12, μεγαλύτερο εμβαδόν έχει το τετράγωνο. (Μονάδες 7)

24. Δίνονται οι ανισώσεις

13474 4 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

$$|x - 1| \leq \sqrt{3} \quad (1) \text{ και } 3 - \frac{x+4}{2} < 0 \quad (2)$$

α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 5)

β) Να σχηματίσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες τη μικρότερη και τη μεγαλύτερη λύση της (1). (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2). (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αν οι αριθμοί α, β είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) τότε και ο αριθμός $\frac{3\alpha+4\beta}{7}$ είναι επίσης κοινή λύση τους. (Μονάδες 8)

25. α) Να λύσετε την ανίσωση: $|x - 1| \leq 3$ (1). (Μονάδες 7) **14650** 4

β) Να απεικονίσετε το σύνολο των λύσεων της ανίσωσης αυτής πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να ερμηνεύσετε το αποτέλεσμα, με βάση τη γεωμετρική σημασία της παράστασης $|x - 1|$. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε όλους τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $|x - 1| \leq 3$. (Μονάδες 5)

δ) Να βρείτε τους ακέραιους αριθμούς x που ικανοποιούν την ανίσωση $||x| - 1| \leq 3$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

26. Δύο φίλοι αποφασίζουν να συνεταιριστούν και ανοίγουν μια επιχείρηση που **33586** 4 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

γεμίζει τόνερ (toner) για φωτοτυπικά μηχανήματα.

Τα πάγια μηνιαία έξοδα της εταιρείας ανέρχονται στο ποσό των 6500 ευρώ (για ενοίκιο, παροχές, μισθούς, φόρους, κ.α.).

Το κόστος γεμίσματος ενός τόνερ είναι 15 ευρώ, η δε τιμή πώλησης του ενός τόνερ καθορίζεται σε 25 ευρώ.

α) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει το μηνιαίο κόστος $K(v)$ της επιχείρησης, εάν γεμίζει v τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

β) Να γράψετε μια σχέση που να περιγράφει τα μηνιαία έσοδα $E(v)$ της επιχείρησης από την πώληση v τόνερ το μήνα. (Μονάδες 5)

γ) Να βρείτε πόσα τόνερ πρέπει να πωλούνται κάθε μήνα ώστε η επιχείρηση
i. να μην έχει ζημιά. (Μονάδες 7)

ii. να έχει μηνιαίο κέρδος τουλάχιστον 500 ευρώ. (Μονάδες 8)

- 27.** α) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x για τους οποίους ισχύει
 $|x - 4| < 2$. (Μονάδες 7)
- β) Θεωρούμε πραγματικό αριθμό x του οποίου η απόσταση από το 4 πάνω στο άξονα των πραγματικών είναι μικρότερη από 2.
- i. Να δείξετε ότι $3x - 4 > 0$. (Μονάδες 5)
- ii. Να αποδείξετε ότι η απόσταση του τριπλάσιου του αριθμού x από το 4 είναι μεγαλύτερη του 2 και μικρότερη του 14. (Μονάδες 5)
- iii. Να βρείτε μεταξύ ποιων τιμών κυμαίνεται η τιμή της απόστασης του $3x$ από το 19. (Μονάδες 8)

33893 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

- 28.** α) Να λύσετε τις ανισώσεις και να παραστήσετε τις λύσεις τους στον άξονα των πραγματικών αριθμών:
- i) $|2x - 3| \leq 5$ (Μονάδες 9)
- ii) $|2x - 3| \geq 1$ (Μονάδες 9)
- β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες συναληθεύουν οι παραπάνω ανισώσεις. (Μονάδες 7)

33896 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

- 29.** Μια υπολογιστική μηχανή έχει προγραμματιστεί έτσι ώστε, όταν εισάγεται σε αυτήν ένας πραγματικός αριθμός x , να δίνει ως εξαγόμενο τον αριθμό λ που προκύπτει από τη σχέση:
- $$\lambda = (2x + 5)^2 - 8x \quad (1)$$
- α) Αν ο εισαγόμενος αριθμός x είναι ο -5 , ποιος είναι ο εξαγόμενος αριθμός λ ; (Μονάδες 4)
- β) Αν ο εξαγόμενος αριθμός λ είναι ο 20, ποιος είναι ο εισαγόμενος αριθμός x ; (Μονάδες 6)
- γ)
- i. Να δείξετε ότι η σχέση (1) μπορεί ισοδύναμα να γραφεί στη μορφή:
 $4x^2 + 12x + (25 - \lambda) = 0$. (Μονάδες 2)
- ii. Να αποδείξετε ότι οποιαδήποτε τιμή και να έχει ο εισαγόμενος αριθμός x , ο εξαγόμενος αριθμός λ δεν μπορεί να είναι ίσος με 5. (Μονάδες 6)
- iii. Να προσδιορίσετε τις δυνατές τιμές που μπορεί να έχει ο εξαγόμενος αριθμός λ . (Μονάδες 7)

3432 4 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ

- 30.** Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x - 2| < 3$ **3432** 4 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ
- α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$ (Μονάδες 12) **5**
- β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1|+|x-5|}{3}$ (Μονάδες 13)
-
- 31.** Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός x που ικανοποιεί τη σχέση: $d(x, 5) \leq 9$. **36671** 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ
- α) Να αποδώσετε την παραπάνω σχέση λεκτικά. (Μονάδες 5)
- β) Με χρήση του άξονα των πραγματικών αριθμών, να παραστήσετε σε μορφή διαστήματος το σύνολο των δυνατών τιμών του x . (Μονάδες 5)
- γ) Να γράψετε τη σχέση με το σύμβολο της απόλυτης τιμής και να επιβεβαιώσετε με αλγεβρικό τρόπο το συμπέρασμα του ερωτήματος (β). (Μονάδες 10)
- δ) Να χρησιμοποιήσετε το συμπέρασμα του ερωτήματος (γ) για να δείξετε ότι:
- $|x + 4| + |x - 14| = 18$ (Μονάδες 5)
-
- 32.** Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = x^2 - x - 3$ **12722** 2 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
- α) Να βρείτε τις ρίζες του $f(x)$ (Μονάδες 12)
- β) Να επιλύσετε την ανίσωση $-2 \cdot f(x) < 0$ (Μονάδες 13)
-
- 33.** α) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $2x^2 - x - 1$. (Μονάδες 12) **12976** 2 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
- β) Να λύσετε την ανίσωση $x(1 - 2x) \leq -1$. (Μονάδες 13)
-
- 34.** α) Να λύσετε την εξίσωση $x^4 - 16 = 0$. (1) (Μονάδες 8) **13321** 2 3.2 Η ΕΞΙΣΩΣΗ $x^n = a$, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
- β) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 3x \leq 0$. (2) (Μονάδες 9)
- γ) Να εξετάσετε εάν οι λύσεις της εξίσωσης (1) είναι και λύσεις της ανίσωσης (2). (Μονάδες 8)
-
- 35.** α) Αν $x^2 - 3x - 4 < 0$, να δείξετε ότι $-1 < x < 4$. (Μονάδες 12) **14189** 2 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ
- β) Δίνεται η παράσταση $A = |2x + 2| + |x - 5|$ με τις τιμές του x να επαληθεύουν την ανίσωση του ερωτήματος α). Να αποδείξετε ότι: $A = x + 7$. (Μονάδες 13)

36. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 + 3x - 5$.

α) Να εξετάσετε αν το 1 είναι ρίζα του τριωνύμου. (Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο. (Μονάδες 13)

14474 2 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
2ου ΒΑΘΜΟΥ,
4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
2ου ΒΑΘΜΟΥ

37. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$ (1).

α) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει ρίζα τον αριθμό -1 . (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε και τη δεύτερη ρίζα της εξίσωσης (1). (Μονάδες 8)

γ) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = \frac{x^2 - x - 2}{x^2 + x}$, $x \neq 0$, $x \neq -1$. (Μονάδες 9)

14577 2 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ
ΚΑΙ ΟΙ
ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ
ΤΟΥΣ, 3.3
ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου
ΒΑΘΜΟΥ, 4.2
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου
ΒΑΘΜΟΥ

38. α) Να λύσετε τις ανισώσεις: $|2x - 5| \leq 3$ και $2x^2 - x - 1 \geq 0$. (Μονάδες 16)

β) Να βρείτε τις κοινές λύσεις των ανισώσεων του ερωτήματος (α). (Μονάδες 09)

34162 2 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
1ου ΒΑΘΜΟΥ,
4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
2ου ΒΑΘΜΟΥ

39. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 10x + 21 < 0$ (1). (Μονάδες 13)

β) Αν η ανίσωση (1) έχει λύσεις τους αριθμούς x για τους οποίους ισχύει $3 < x < 7$ και ο αριθμός x είναι λύση της παραπάνω ανίσωσης, να δείξετε ότι η παράσταση

$A = |x - 3| + |x - 7|$ είναι σταθερή, δηλαδή ανεξάρτητη του x . (Μονάδες 12)

34919 2 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.2
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου
ΒΑΘΜΟΥ

40. α) Να αποδείξετε ότι $x^2 + 4x + 5 > 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x . (Μονάδες 10)

β) Να γράψετε χωρίς απόλυτες τιμές την παράσταση:

$B = |x^2 + 4x + 5| - |x^2 + 4x + 4|$ (Μονάδες 15)

35030 2 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.2
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου
ΒΑΘΜΟΥ

41. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + 9x - 12$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεων της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 13)

β) Να ελέγξετε αν ο αριθμός $\sqrt[3]{2}$ είναι λύση της ανίσωσης του α) ερωτήματος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

35035 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ,
2.4 ΡΙΖΕΣ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ,
4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
2ου ΒΑΘΜΟΥ

42. Δίνεται το τριώνυμο $2x^2 - 3x + 1$.

α) Να βρείτε τις ρίζες του. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες $2x^2 - 3x + 1 < 0$. (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι αριθμοί $\frac{\sqrt{3}}{2}$ και $\frac{3}{2}$ είναι λύσεις της ανίσωσης του ερωτήματος β). (Μονάδες 9)

36887 2 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

43. α) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|x|}{3} - \frac{|x|+4}{5} = \frac{2}{3}$. (Μονάδες 9)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $-x^2 + 2x + 3 \leq 0$. (Μονάδες 9)

γ) Είναι οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

36892 2 3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

44. Δίνονται οι ανισώσεις: $-x^2 + 5x - 6 < 0$ (1), $x^2 - 16 \leq 0$ (2).

α) Να βρεθούν οι λύσεις των (1), (2). (Μονάδες 12)

β) Να παρασταθούν οι λύσεις των ανισώσεων (1) και (2) πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών και να βρεθούν οι κοινές λύσεις των παραπάνω ανισώσεων. (Μονάδες 13)

37168 2 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

45. Δίνεται το τριώνυμο $-x^2 + (\sqrt{3} - 1)x + \sqrt{3}$.

α) Να αποδείξετε ότι η διακρίνουσα του τριωνύμου είναι :

$\Delta = (\sqrt{3} + 1)^2$. (Μονάδες 12)

β) Να παραγοντοποιήσετε το αρχικό τριώνυμο. (Μονάδες 13)

37169 2 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

46. α) Να λυθεί η εξίσωση: $x^2 - x - 2 = 0$. (Μονάδες 8)

β) Να λυθεί η ανίσωση: $x^2 - x - 2 > 0$ και να παραστήσετε το σύνολο των λύσεών της στον άξονα των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 12)

γ) Να τοποθετήσετε τον αριθμό $-\frac{4}{3}$ στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Είναι ο αριθμός $-\frac{4}{3}$ λύση της ανίσωσης του ερωτήματος (β); (Μονάδες 5)

37182 2 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

47. α) Να λύσετε την εξίσωση: $x^2 - 25 = 0$. (Μονάδες 7)

β) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 - 36 \leq 0$. (Μονάδες 9)

γ) Να εξετάσετε αν οι λύσεις της εξίσωσης του α) ερωτήματος είναι και λύσεις της ανίσωσης του β) ερωτήματος. (Μονάδες 9)

38203 2 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

48. Δίνονται οι παραστάσεις $A = \frac{-x^2+4|x|-3}{|x|-1}$ και $B = \frac{x^2-4|x|+4}{|x|-2}$.

α) Για ποιες τιμές του $x \in \mathbb{R}$ ορίζονται οι παραστάσεις A και B; (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι $A = 3 - |x|$ και $B = |x| - 2$. (Μονάδες 8)

γ) Να λύσετε την ανίσωση: $B - A < 2 d(x, 4) - 5$. (Μονάδες 9)

13174 4 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ, 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

49. Δίνονται οι ανισώσεις $|x - 1| < 2$ και $x^2 - 3x + 2 \geq 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 8)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in (-1, 1] \cup [2, 3)$. (Μονάδες 8)

γ)

i) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1, \rho_2 \in (-1, 1]$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση; (Μονάδες 4)

ii) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 , με $\rho_1 < \rho_2$, είναι κοινές λύσεις των ανισώσεων με $\rho_1 \in (-1, 1]$ και $\rho_2 \in [2, 3)$, είναι και ο αριθμός $\frac{\rho_1+3\rho_2}{4}$ κοινή τους λύση; (Μονάδες 5)

13176 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

50. Στο παρακάτω σχήμα οι κορυφές του τετραγώνου $EZH\theta$ βρίσκονται πάνω στις πλευρές του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$.

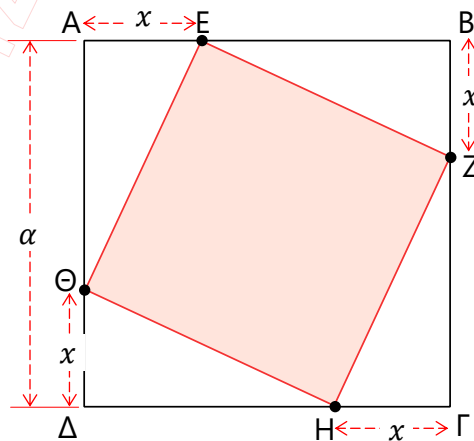
α) Αν η πλευρά του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ είναι α και η απόσταση των κορυφών του $EZH\theta$ από τις αντίστοιχες κορυφές του $AB\Gamma\Delta$ είναι x , όπως φαίνεται στο σχήμα, να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\theta$ δίνεται από τη σχέση:

$(EZH\theta) = x^2 + (\alpha - x)^2$ με $0 \leq x \leq \alpha$. (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι το εμβαδόν του $EZH\theta$ δεν μπορεί να είναι μικρότερο από το μισό του εμβαδού $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 11)

γ) Να βρείτε την πλευρά α του τετραγώνου $AB\Gamma\Delta$ αν για $x = 1$, το εμβαδόν του $EZH\theta$ είναι τα δύο τρίτα του εμβαδού του $AB\Gamma\Delta$, δηλαδή: $(EZH\theta) = \frac{2}{3}(AB\Gamma\Delta)$. (Μονάδες 8)

(Δίνεται $\sqrt{3} \approx 1,73$)



13368 4 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

51. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - ax - (\alpha + 1)$, $x \in \mathbb{R}$, με παράμετρο $\alpha \in \mathbb{R}$.

α) Για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α να βρείτε το πλήθος των ριζών του τριωνύμου. (Μονάδες 7)

β) Αν είναι $\alpha > -2$, τότε:

i) Να αποδείξετε ότι οι ρίζες του τριωνύμου είναι οι αριθμοί -1 και $\alpha + 1$. (Μονάδες 4)

ii) Να βρείτε την τιμή του α για την οποία το μήκος του διαστήματος λύσεων της ανίσωσης $x^2 - ax - (\alpha + 1) \leq 0$ είναι ίσο με 2024. (Μονάδες 7)

iii) Να βρείτε το πρόσημο του $f\left(\frac{\alpha}{2}\right)$. (Μονάδες 7)

14123 4 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

52. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 - 1 = 0$, με παράμετρο $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να αιτιολογήσετε γιατί η εξίσωση έχει, για οποιαδήποτε τιμή του λ , πραγματικές και άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

β) Να λύσετε την εξίσωση. (Μονάδες 7)

Έστω ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της εξίσωσης με $\rho_1 < \rho_2$.

γ) Να βρείτε για ποιες της παραμέτρου λ , η απόσταση των αριθμών ρ_2 και $-\rho_1$ πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, είναι τουλάχιστον 8. (Μονάδες 6)

δ) Θεωρούμε έναν αριθμό κ ώστε $\rho_1 < \kappa < \rho_2$. Να βρείτε, με απόδειξη, το πρόσημο του αριθμού $\kappa^2 - 2\lambda\kappa + \lambda^2 - 1$ (Μονάδες 6)

14615 4 2.1 ΟΙ ΠΡΑΞΕΙΣ ΚΑΙ ΟΙ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΟΥΣ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 3.1 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

53. α) Να λύσετε την ανίσωση: $x^2 > x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο τους αριθμούς: $0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}$ αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

ii) Να κάνετε το ίδιο για τους αριθμούς: $\alpha, \alpha^2, \frac{\alpha + \alpha^2}{2}$ (Μονάδες 7)

14652 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

54. Δίνεται η ανίσωση $|x - 1| \leq 3$. (1)

- α) Να λύσετε την ανίσωση (1). (Μονάδες 7)
- β) Να βρείτε όλες τις ακέραιες λύσεις της ανίσωσης (1). (Μονάδες 3)
- γ) Να βρείτε μία ανίσωση 2ου βαθμού που να έχει τις ίδιες ακριβώς λύσεις με την (1). (Μονάδες 8)
- δ) Να δείξετε ότι αν το τετράγωνο ενός αριθμού ελαττωμένο κατά 8 δεν ξεπερνάει το διπλάσιό του, τότε η απόσταση του από το 1 δεν ξεπερνάει το 3. (Μονάδες 7)

14653 4 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
1ου ΒΑΘΜΟΥ,
4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
2ου ΒΑΘΜΟΥ

55. α) Δίνεται το τριώνυμο $x^2 - 3x + 2$, $x \in \mathbb{R}$. Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου. (Μονάδες 10)
- β) Θεωρούμε πραγματικούς αριθμούς α, β με $\alpha < \beta$ για τους οποίους ισχύει $(\alpha^2 - 3\alpha + 2)(\beta^2 - 3\beta + 2) < 0$.
- i) Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha - 1$ και $\beta - 2$ είναι ομόσημοι. (Μονάδες 10)
- ii) Να δείξετε ότι $|(\alpha - 1)(\beta - 2)| = (\alpha - 1)(\beta - 2)$. (Μονάδες 5)

14654 4 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.2
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου
ΒΑΘΜΟΥ

56. α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 - x - 12$ για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 8)
- β) Να δείξετε ότι $\left(\frac{\pi+9}{3}\right)^2 - \left(\frac{\pi+9}{3}\right) - 12 > 0$, όπου $\pi = 3, 1415 \dots$ (Μονάδες 9)
- γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό α ισχύει ότι $(|\alpha| + 3)^2 - (|\alpha| + 3) - 12 < 0$, να δείξετε ότι $\alpha \in (-1, 1)$. (Μονάδες 8)

14924 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ
ΑΡΙΘΜΩΝ,
2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.2
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου
ΒΑΘΜΟΥ

57. Δίνεται η εξίσωση $|x - 4| - |x - 2| = 2$.

- α) Να διατυπώσετε γεωμετρικά το ζητούμενο της παραπάνω εξίσωσης. (Μονάδες 8)
- β) Να αιτιολογήσετε γεωμετρικά ότι οι λύσεις της παραπάνω εξίσωσης είναι όλοι οι πραγματικοί αριθμοί που ανήκουν στο $(-\infty, 2]$ και μόνο αυτοί. (Μονάδες 8)
- γ) Αν για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει ότι $|x - 4| - |x - 2| = 2$, τότε να δείξετε ότι $x^2 - 6x + 8 \geq 0$. (Μονάδες 9)

14963 4 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου
ΒΑΘΜΟΥ, 4.2
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου
ΒΑΘΜΟΥ

58. α)

i) Να βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$. (Μονάδες 4)

ii) Να λύσετε την εξίσωση $|x + 3| + |x^2 + 9x + 18| = 0$. (Μονάδες 7)

β)

i) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου $x^2 + 9x + 18$, για τις διάφορες τιμές του αριθμού x . (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε τις τιμές του x για τις οποίες ισχύει:

$$|x^2 + 9x + 18| = -x^2 - 9x - 18. \quad (\text{Μονάδες } 7)$$

32682 4 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 3.1 ΕΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ, 3.3 ΕΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

59. Ένα ορθογώνιο έχει περίμετρο $\Pi = 40$ cm. Αν x cm είναι το μήκος του ορθογωνίου, τότε να δείξετε ότι:

α) $0 < x < 20$. (Μονάδες 4)

β) Το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου δίνεται από τη σχέση $E(x) = 20x - x^2$. (Μονάδες 8)

γ) Για το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ισχύει: $E(x) \leq 100$, για κάθε $x \in (0, 20)$. (Μονάδες 6)

δ) Από όλα τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο 40 cm, εκείνο που έχει το μεγαλύτερο εμβαδόν είναι το τετράγωνο πλευράς 10 cm. (Μονάδες 7)

33582 4 3.3 ΕΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

60. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 2x + 3$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Να βρείτε το πρόσημο του παραπάνω τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε, αιτιολογώντας την απάντησή σας, το πρόσημο του γινομένου: $f(2, 999) \cdot f(-1, 002)$. (Μονάδες 7)

γ) Αν $-3 < a < 3$, να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $-a^2 + 2|a| + 3$. (Μονάδες 9)

33587 4 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 3.3 ΕΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

61. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = x^2 - 6x + \lambda - 3$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

α) Να υπολογίσετε την διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το τριώνυμο έχει δύο άνισες πραγματικές ρίζες. (Μονάδες 7)

γ) Αν $3 < \lambda < 12$ τότε:

i) Να δείξετε ότι το τριώνυμο έχει δύο άνισες θετικές ρίζες. (Μονάδες 6)

ii) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι δύο ρίζες του τριωνύμου και κ, μ είναι δύο αριθμοί με $\kappa < 0$ και $x_1 < \mu < x_2$, να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\kappa \cdot f(\kappa) \cdot \mu \cdot f(\mu)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας (Μονάδες 7)

33698 4 3.3 ΕΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

62. Δίνεται το τριώνυμο:

$$x^2 - 2x - 8.$$

α) Να βρείτε το πρόσημο του τριωνύμου για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού x . (Μονάδες 10)

β) Αν $\kappa = -\frac{8889}{4444}$, η τιμή της παράστασης $\kappa^2 - 2\kappa - 8$ είναι μηδέν, θετικός ή αρνητικός αριθμός; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 8)

γ) Αν ισχύει $-4 < \mu < 4$, ποιο είναι το πρόσημο της τιμής της παράστασης:

$$\mu^2 - 2|\mu| - 8;$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

33711 4 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

63. Δίνεται το τριώνυμο: $x^2 + \beta x + \beta^2$, όπου $\beta \in \mathbb{R}$.

33712 4 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

α) Να υπολογίσετε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου. (Μονάδες 4)

β)

i) Αν $\beta \neq 0$, τι μπορείτε να πείτε για το πρόσημο του τριωνύμου; (Μονάδες 7)

ii) Πως αλλάζει η απάντησή σας στο ερώτημα (i), όταν $\beta = 0$; (Μονάδες 6)

γ) Με τη βοήθεια της απάντησης στο ερώτημα β), να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα

$$a^2 + a\beta + \beta^2 > 0$$

για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς a, β που δεν είναι και οι δύο ταυτόχρονα 0. (Μονάδες 8)

64. α) Θεωρούμε την εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$, με παράμετρο $a \in \mathbb{R}$.

33855 4 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του a η εξίσωση $x^2 + 2x + 3 = a$ έχει δύο πραγματικές και άνισες ρίζες. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε την τιμή του a ώστε η εξίσωση να έχει μια διπλή ρίζα, την οποία και να προσδιορίσετε. (Μονάδες 6)

β) Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + 2x + 3, x \in \mathbb{R}$.

i) Να αποδείξετε ότι $f(x) \geq 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

ii) Να λύσετε την ανίσωση $\sqrt{f(x)} - 2 \leq 2$. (Μονάδες 6)

65. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + 1 \geq \frac{5}{2}x$ (1).

33890 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

(Μονάδες 10)

β) Δίνονται δύο αριθμοί κ, λ οι οποίοι είναι λύσεις της ανίσωσης (1) και ικανοποιούν επιπλέον τη σχέση $(\lambda - 1)(\kappa - 1) < 0$.

i) Να δείξετε ότι το 1 είναι μεταξύ των αριθμών κ, λ . (Μονάδες 8)

ii) Να δείξετε ότι $|\kappa - \lambda| \geq \frac{3}{2}$. (Μονάδες 7)

66. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + x - 6 < 0$.

(Μονάδες 8)

β) Να λύσετε την ανίσωση $\left|x - \frac{1}{2}\right| > 1$.

(Μονάδες 5)

γ) Δίνεται το παρακάτω ορθογώνιο με πλευρές α και $\alpha + 1$.



$\alpha + 1$

Ο αριθμός α ικανοποιεί τη σχέση $\left|\alpha - \frac{1}{2}\right| > 1$. Αν για τον εμβαδόν E του ορθογωνίου ισχύει $E < 6$, τότε:

i) Να δείξετε ότι $\frac{3}{2} < \alpha < 2$. (Μονάδες 7)

ii) Να βρείτε μεταξύ ποιων αριθμών κυμαίνεται η περίμετρος του ορθογωνίου. (Μονάδες 5)

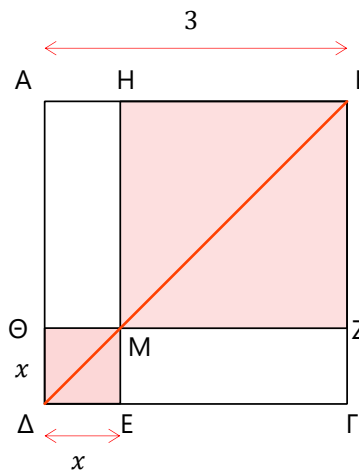
33892 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

67. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ πλευράς $AB = 3\text{cm}$ και τυχαίο σημείο M που κινείται στη διαγώνιο $B\Delta$ εσωτερικά (δηλαδή το M δεν θα ταυτιστεί με τα άκρα της διαγωνίου).

34182 4 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

α) Να εκφράσετε το συνολικό εμβαδόν E των σκιασμένων τετραγώνων $HBZM$ και $\theta ME\Delta$ ως συνάρτηση του x και να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $E(x)$.

(Μονάδες 9)



β) Αν το εμβαδόν των σκιασμένων τετραγώνων είναι $E(x) = 2x^2 - 6x + 9$, να αποδείξετε ότι $E(x) \geq \frac{9}{2}$, για κάθε $x \in (0, 3)$.

(Μονάδες 7)

γ) Για ποια θέση του M πάνω στη $B\Delta$ το εμβαδόν $E(x)$ γίνεται ελάχιστο,

δηλαδή ίσο με $\frac{9}{2}$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

68. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 5x - 6 < 0$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε το πρόσημο του αριθμού $K = \left(-\frac{46}{47}\right)^2 + 5 \cdot \frac{46}{47} - 6$
αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha \in (-6, 6)$, να βρείτε το πρόσημο της παράστασης $\Lambda = \alpha^2 - 5|\alpha| - 6$
αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

34185 4 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ
ΤΙΜΗ
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ
ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.2
ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου
ΒΑΘΜΟΥ

69. Οι πλευρές x_1 και x_2 ενός ορθογωνίου είναι ρίζες της εξίσωσης $x^2 - 2x + \lambda(2 - \lambda) = 0$, με $\lambda \in (0, 2)$.

α) Να βρείτε

i) την περίμετρο Π του ορθογωνίου. (Μονάδες 6)

ii) το εμβαδόν E του ορθογωνίου ως συνάρτηση του λ . (Μονάδες 6)

β) Να δείξετε ότι $E \leq 1$, για κάθε $\lambda \in (0, 2)$. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε την τιμή του $\lambda \in (0, 2)$ για την οποία το εμβαδόν E του ορθογωνίου γίνεται μέγιστο, δηλαδή ίσο με 1. Τι μπορείτε να πείτε τότε για το ορθογώνιο; (Μονάδες 6)

34186 4 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
2ου ΒΑΘΜΟΥ,
4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
2ου ΒΑΘΜΟΥ

70. Θεωρούμε το τριώνυμο $f(x) = 3x^2 + kx - 4$, με παράμετρο $k \in \mathbb{R}$.

α) Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε τιμή του k , το τριώνυμο έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες. (Μονάδες 10)

β) Οι ρίζες του τριωνύμου είναι ομόσημες ή ετερόσημες; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

γ) Αν x_1 και x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου και α, β είναι δύο πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε να ισχύει:

$$\alpha < x_1 < x_2 < \beta,$$

να προσδιορίσετε το πρόσημο του γινομένου $\alpha \cdot f(\alpha) \cdot \beta \cdot f(\beta)$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

34319 4 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ
2ου ΒΑΘΜΟΥ,
4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ
2ου ΒΑΘΜΟΥ

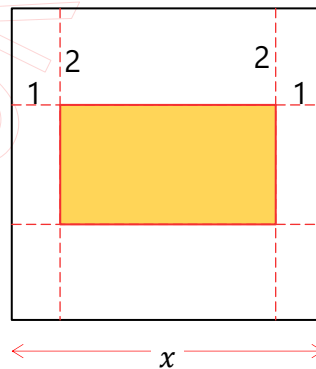
71. Δίνεται το τριώνυμο

$$f(x) = x^2 - x + (\lambda - \lambda^2), \lambda \in \mathbb{R}.$$

- α) Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)
- β) Για ποια τιμή του λ το τριώνυμο έχει δύο ίσες ρίζες; (Μονάδες 6)
- γ) Αν $\lambda \neq \frac{1}{2}$ και x_1, x_2 οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου με $x_1 < x_2$, τότε:
- i) να αποδείξετε ότι $x_1 < \frac{x_1 + x_2}{2} < x_2$, (Μονάδες 4)
- ii) να διατάξετε από τον μικρότερο προς τον μεγαλύτερο τους αριθμούς:

$$f(x_2), f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right), f(x_2 + 1). \quad (\text{Μονάδες } 5)$$

72. Για μια επαγγελματική κάρτα επιλέγεται τετράγωνο χαρτόνι πλευράς x cm ($5 \leq x \leq 10$) στο οποίο η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων (με κίτρινο χρώμα στο παρακάτω σχήμα) περιβάλλεται από περιθώρια 2 cm cm στο πάνω και στο κάτω μέρος της και 1 cm δεξιά και αριστερά.



- α) Να δείξετε ότι το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων εκφράζεται από τη συνάρτηση:
- $$E(x) = (x - 2)(x - 4), 5 \leq x \leq 10. \quad (\text{Μονάδες } 8)$$
- β) Να βρείτε την τιμή του x , x ώστε το εμβαδόν E της περιοχής τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων να είναι 35 cm^2 . (Μονάδες 7)
- γ) Να βρείτε τις τιμές που μπορεί να πάρει η πλευρά x του τετραγώνου, αν η περιοχή τύπωσης των επαγγελματικών στοιχείων έχει εμβαδόν τουλάχιστον 24 cm^2 . (Μονάδες 10)

73. Μια μικρή μεταλλική σφαίρα εκτοξεύεται κατακόρυφα από το έδαφος. Το ύψος y (σε cm) στο οποίο θα βρεθεί η σφαίρα τη χρονική στιγμή t (σε sec) μετά την εκτόξευση, δίνεται από τη σχέση: $y = 60t - 5t^2$.

- α) Μετά πόσο χρόνο η σφαίρα θα επανέλθει στο έδαφος; (Μονάδες 8)
- β) Ποιες χρονικές στιγμές η σφαίρα θα βρεθεί σε ύψος $y = 175 \text{ m}$; (Μονάδες 8)
- γ) Να βρείτε το χρονικό διάστημα στη διάρκεια του οποίου η σφαίρα βρίσκεται σε ύψος μεγαλύτερο από 100m. (Μονάδες 9)

3432 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

3572 4 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

36658 4 3.3 ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

74. Δίνονται οι ανισώσεις: $2 \leq |x| \leq 3$ και $x^2 - 4x < 0$.

α) Να βρείτε τις λύσεις τους. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [2, 3]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι και ο αριθμός $\frac{\rho_1 + \rho_2}{2}$ είναι κοινή τους λύση. (Μονάδες 10)

36669 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

75. Δίνονται οι ανισώσεις $|x + 1| \leq 2$ και $x^2 - x - 2 > 0$.

α) Να λύσετε τις ανισώσεις. (Μονάδες 10)

β) Να δείξετε ότι οι ανισώσεις συναληθεύουν για $x \in [-3, -1]$. (Μονάδες 5)

γ) Αν οι αριθμοί ρ_1 και ρ_2 ανήκουν στο σύνολο των κοινών λύσεων των δυο ανισώσεων, να δείξετε ότι: $\rho_1 - \rho_2 \in (-2, 2)$. (Μονάδες 10)

36670 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.3 ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ, 4.1 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 1ου ΒΑΘΜΟΥ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ

76. α) Να λύσετε την ανίσωση $x^2 < x$ στο σύνολο των πραγματικών αριθμών. (Μονάδες 8)

β) Δίνεται ένας πραγματικός αριθμός α με $0 < \alpha < 1$.

i) Να βάλετε στη σειρά, από τον μικρότερο στον μεγαλύτερο, τους αριθμούς:

$$0, 1, \alpha, \alpha^2, \sqrt{\alpha}.$$

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας με τη βοήθεια και του ερωτήματος α). (Μονάδες 10)

ii) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ανισότητα $\sqrt{1 + \alpha} < 1 + \sqrt{\alpha}$. (Μονάδες 7)

36678 4 2.2 ΔΙΑΤΑΞΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 2.4 ΡΙΖΕΣ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ, 4.2 ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ 2ου ΒΑΘΜΟΥ