~5.2 ΑΡΙΘΜΗΤΙΚΗ ΠΡΟΟΔΟΣ.

45 θέματα

1. Δίνονται οι αριθμοί $1-x$, $\frac{x}{2}$, $2x-1$, $x \in \mathbb{R}$. **13319** [2]

α) Να αποδείξετε ότι οι παραπάνω αριθμοί, με αυτή τη σειρά, είναι πάντοτε διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13)

β) Να βρείτε την τιμή του x, αν γνωρίζουμε ότι η διαφορά ω αυτής της προόδου είναι 5. (Μονάδες 12)

2. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται οι δυο πρώτοι όροι, $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_2 = 7$. **14259** [2]

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι ο 20ος όρος της προόδου ισούται με 97. (Μονάδες 12)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $2+7+12+\ldots+97$. (Μονάδες 9)

3. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) των θετικών περιττών αριθμών: 1, 3, 5, 7,... **14476** [2]

α)

i. Να γράψετε τον πρώτο όρο και τη διαφορά της προόδου. (Μονάδες 4)

ii. Να βρείτε τον τριακοστό της όρο. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα των 30 πρώτων όρων της προόδου ισούται με 30^2. (Μονάδες 13)

4. α) Να λύσετε τις εξισώσεις $x^2 = 1$ και $x^2 = 9$. (Μονάδες 9) **14512** [2]

β) Να διατάξετε τις λύσεις των εξισώσεων του α) ερωτήματος σε αύξουσα σειρά και στη συνέχεια

i) να δείξετε ότι με αυτή τη σειρά αποτελούν διαδοχικούς αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω. (Μονάδες 9)

ii) να δείξετε ότι ο αριθμός 46 δεν αποτελεί όρο της προόδου (α_ν). (Μονάδες 7)

5. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 - \alpha_2 = 10$. **14573** [2]

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 5$. (Μονάδες 10)

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων της προόδου είναι ίσο με 33, να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 15)

6. Ο 1ος όρος μιας αριθμητικής προόδου (α_ν) ισούται με 2 και ο 3ος όρος ισούται με 8. **14574** [2]

α) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Αν είναι $\omega = 3$, να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με 35. (Μονάδες 13)

7. Ένα μικρό γήπεδο μπάσκετ έχει δέκα σειρές καθισμάτων και κάθε επόμενη σειρά έχει τέσσερα καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη. Η έβδομη σειρά έχει 36 καθίσματα. **14597** [2]

α) Αποτελούν τα καθίσματα κάθε σειράς του γηπέδου όρους αριθμητικής προόδου; Αιτιολογήσετε τον συλλογισμό σας. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε το πλήθος των καθισμάτων της πρώτης σειράς. (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γήπεδο συνολικά. (Μονάδες 9)

8. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) δίνονται $\alpha_1 = 41$ και $\alpha_6 = 26$. **14656** [2]

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με -3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το θετικό ακέραιο ν, ώστε $\alpha_\nu = \nu$. (Μονάδες 13)

9. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά ω. **34145** [2]

α) Να δείξετε ότι: $\frac{\alpha_{15} - \alpha_9}{\alpha_{10} - \alpha_7} = 2$ (Μονάδες 13)

β) Αν $\alpha_{15} - \alpha_9 = 18$, να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 12)

10. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) με διαφορά $\omega = 4$, ισχύει: $\alpha_6 + \alpha_{11} = 40$. **34147** [2]

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 της προόδου. (Μονάδες 12)

β) Πόσους πρώτους όρους της προόδου πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με το μηδέν; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

11. Οι αριθμοί $x+6$, $5x+2$, $11x-6$ είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου με πρώτο όρο α_1 και διαφορά ω. **34153** [2]

α) Να βρείτε την τιμή του x και να αποδείξετε ότι $\omega = 4$. (Μονάδες 12)

β) Αν ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1 = 0$, να υπολογίσετε το άθροισμα S_8 των 8 πρώτων όρων. (Μονάδες 13)

12. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_5 = 14$. **34158** [2]

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι ίση με 3. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε πόσους από τους πρώτους όρους της αριθμητικής προόδου (α_ν) πρέπει να προσθέσουμε, ώστε το άθροισμά τους να είναι ίσο με 77.

(Δίνεται: $\sqrt{1849} = 43$). (Μονάδες 13)

13. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\beta x + (\beta^2 - 4)$, (1) με παράμετρο $\beta \in \mathbb{R}$. **34746** [2]

.α) Να δείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει ρίζες τις: $x_1 = \beta - 2$ και $x_2 = \beta + 2$ (Μονάδες 12)

β) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί x_1, β, x_2, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να αιτιολογήσετε το συλλογισμό σας. (Μονάδες 13)

14. α) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό x, ώστε οι αριθμοί $x+2$, $x+1$, $3x+2$, με τη σειρά που δίνονται, να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 13) **34871** [2]

β) Για $x = -1$, να βρείτε τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

15. α) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 2x - 3 = 0$ (1). (Μονάδες 13) **34877** [2]

β) Αν x_1, x_2 με $x_1 < x_2$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να εξετάσετε αν οι αριθμοί $x_1, 1, x_2$ με τη σειρά που δίνονται είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 12)

16. Σε μία αριθμητική πρόοδο (α_ν) ισχύουν: $\alpha_1 = 2$ και $\alpha_{25} = \alpha_{12} + 39$. **35046** [2]

α) Να δείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 3$. (Μονάδες 12)

β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 152. (Μονάδες 13)

17. Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (α_ν) με όρους $\alpha_2 = 0$, $\alpha_4 = 4$. **35143** [2]

α) Να αποδείξετε ότι $\omega = 2$ και $\alpha_1 = -2$, όπου ω είναι η διαφορά της προόδου και α_1 ο πρώτος όρος της. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι ο ν-οστος όρος της προόδου είναι ίσος με $\alpha_\nu = 2\nu - 4$, $\nu \in \mathbb{N}^*$ και να βρείτε ποιος όρος της προόδου είναι ίσος με 98. (Μονάδες 15)

18. Σε ένα γυμναστήριο με 10 σειρές καθισμάτων, η πρώτη σειρά έχει 120 καθίσματα και κάθε σειρά έχει 20 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη της. **35299** [2]

α) Να εκφράσετε με μια αριθμητική πρόοδο το πλήθος των καθισμάτων της ν-οστής σειράς. (Μονάδες 9)

β) Πόσα καθίσματα έχει η τελευταία σειρά; (Μονάδες 8)

γ) Πόσα καθίσματα έχει το γυμναστήριο; (Μονάδες 8)

19. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει ότι: $\alpha_1 = 19$ και $\alpha_{10} - \alpha_6 = 24$. **35375** [2]

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά της προόδου είναι $\omega = 6$. (Μονάδες 9)

β) Να βρείτε τον α_{20}. (Μονάδες 8)

γ) Να βρείτε το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου. (Μονάδες 8)

20. Οι αριθμοί $A=1$, $B=x+4$, $\Gamma=x+8$, είναι, με τη σειρά που δίνονται, διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_ν). **35408** [2]

α) Να βρείτε την τιμή του x. (Μονάδες 10)

β) Αν $x=1$ και ο αριθμός A είναι ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου (α_ν).

i) να υπολογίσετε τη διαφορά ω. (Μονάδες 7)

ii) να υπολογίσετε τον εικοστό όρο της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 8)

---

21. α) Να βρείτε το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών θετικών ακεραίων $1,2,3,\ldots,\nu$. (Μονάδες 12) **36897** [2]

β) Να βρείτε πόσοι από τους πρώτους διαδοχικούς θετικούς ακέραιους έχουν άθροισμα 45 (Μονάδες 13)

---

22. Ένα παιχνίδι στον υπολογιστή έχει επίπεδα δυσκολίας. Ένας παίκτης έχει καθορισμένο χρόνο για να ολοκληρώσει κάθε επίπεδο. Στο επίπεδο 1 (το πιο εύκολο επίπεδο) ο παίκτης έχει χρονικό όριο 300 δευτερολέπτων για να το ολοκληρώσει. Στο επίπεδο 4 το χρονικό όριο είναι 255 δευτερόλεπτα. Οι μέγιστοι επιτρεπόμενοι χρόνοι σε κάθε επίπεδο αποτελούν όρους αριθμητικής προόδου. **12694** [4]

α) Να υπολογίσετε τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. Τι δηλώνει η διαφορά ω στο πλαίσιο του προβλήματος; (Μονάδες 3 + 4)

β) Το τελευταίο επίπεδο έχει χρονικό όριο 45 δευτερολέπτων. Να βρείτε τον αριθμό των επιπέδων στο παιχνίδι. (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τον μέγιστο επιτρεπόμενο χρόνο που θα χρειαστεί ένας παίκτης για να ολοκληρώσει το παιχνίδι. (Μονάδες 6)

δ) Ένας παίκτης ολοκληρώνει το επίπεδο 1 σε 147 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 2 σε 150 δευτερόλεπτα, το επίπεδο 3 σε 153 και κάθε φορά που ανεβαίνει επίπεδο χρειάζεται 3 επιπλέον δευτερόλεπτα. Μέχρι ποιο επίπεδο θα προλάβει να παίξει; Θα ολοκληρώσει το παιχνίδι; (Μονάδες 6)

---

23. Σε ένα γήπεδο καλαθοσφαίρισης, σε μία από τις κερκίδες του, η οποία διαθέτει 40 σειρές καθισμάτων, στη 10η σειρά υπάρχουν 50 καθίσματα. Μετά την πρώτη σειρά κάθε επόμενη διαθέτει 2 καθίσματα περισσότερα από την προηγούμενη σειρά. **12764** [4]

α) Αν α_ν το πλήθος των καθισμάτων της ν - οστής σειράς, τότε να αποδείξετε ότι α_ν είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τον πρώτο όρο α_1 και τη διαφορά ω .(Μονάδες 9)

β) Να υπολογίσετε το σύνολο των καθισμάτων που διαθέτει η συγκεκριμένη κερκίδα. (Μονάδες 9)

γ) Αν για λόγους ασφαλείας σε έναν αγώνα επιτρέπεται να καθίσουν θεατές μόνο στις περιττές σειρές καθισμάτων της κερκίδας, να βρείτε πόσους καθήμενους θεατές θα χωρέσει αυτή η κερκίδα. (Μονάδες 7)

---

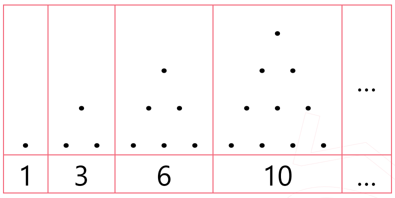
24. Θεωρούμε αριθμητική πρόοδο (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ με $\alpha_3=8$ και $\alpha_{11}=32$ και την αριθμητική πρόοδο (β_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ που περιέχει τους περιττούς αριθμούς που είναι μεγαλύτεροι του 56. **12945** [4]

α) Να αποδείξετε ότι $\alpha_1=2$ και $\omega=3$. (Μονάδες 7)

β) Να βρείτε αν ο αριθμός β_2 περιέχεται στην πρώτη πρόοδο. (Μονάδες 8)

γ) Αν το άθροισμα των 2ν πρώτων όρων της (α_ν) είναι ίσο με το άθροισμα των ν πρώτων όρων της (β_ν) να βρείτε τον αριθμό ν. (Μονάδες 10)

25. Οι αριθμοί 1,3,6,10,... και γενικά αυτοί που είναι δυνατόν, αν παρασταθούν με τελείες, να τοποθετηθούν σε μια τριγωνική διάταξη της μορφής που φαίνεται στον παρακάτω πίνακα λέγονται τριγωνικοί. **13056** [4]



Αποδεικνύεται ότι ο νιοστός τριγωνικός αριθμός δίνεται από τον τύπο $T_\nu = \dfrac{\nu(\nu+1)}{2}, \nu \in \mathbb{N}^*$.

α) Να βρείτε τον 10ο τριγωνικό αριθμό. (Μονάδες 6)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 120 είναι τριγωνικός. (Μονάδες 9)

γ) Να αποδείξετε ότι το άθροισμα δυο διαδοχικών τριγωνικών αριθμών είναι ίσο με το τετράγωνο θετικού ακεραίου. (Μονάδες 10)

26. Η Μαρία αγόρασε ένα βιβλίο που το διάβασε δυο φορές γιατί της άρεσε πολύ! **13089** [4]
Την πρώτη φορά, διάβασε την 1η ημέρα 1 σελίδα, την 2η ημέρα 3 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. Τη δεύτερη φορά άλλαξε τρόπο διαβάσματος. Διάβασε την 1η ημέρα 13 σελίδες, την 2η ημέρα 11 σελίδες και γενικά κάθε ημέρα διάβαζε 2 σελίδες λιγότερες από την προηγούμενη. Η Μαρία παρατήρησε ότι και τις δυο φορές χρειάστηκε ακριβώς το ίδιο πλήθος ημερών για να διαβάσει το βιβλίο.

α)

i) Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα την πρώτη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο α_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)

ii) Να δείξετε ότι το πλήθος των σελίδων του βιβλίου που διάβαζε κάθε ημέρα τη δεύτερη φορά είναι όροι αριθμητικής προόδου (β_ν) της οποίας να βρείτε το γενικό τύπο β_ν, αν ως πρώτο όρο της θεωρήσουμε το πλήθος των σελίδων που διάβασε την πρώτη μέρα. (Μονάδες 4)

β) Να δείξετε ότι η Μαρία χρειάστηκε 7 ημέρες για να διαβάσει το βιβλίο. (Μονάδες 7)

γ) Να βρείτε πόσες σελίδες έχει το βιβλίο. (Μονάδες 5)

δ) Να δείξετε ότι $\alpha_\nu = \beta_{8-\nu}$ για κάθε $\nu = 1,2,...,7$. (Μονάδες 5)

27. Το άθροισμα των ν πρώτων διαδοχικών όρων μιας ακολουθίας (α_ν) είναι **13171** [4]

$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_\nu = S_\nu = 2\nu^2 + 3\nu$, $\nu \in \mathbb{N}$ με $\nu \geq 1$.

α) Να βρείτε τον πρώτο όρο α_1. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι $S_{\nu-1} = 2\nu^2 - \nu - 1,\ \nu \geq 2$ (Μονάδες 6)

γ) Να αποδείξετε ότι $\alpha_\nu = 4\nu + 1,\ \nu \geq 1$ (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι αυτή η ακολουθία είναι αριθμητική πρόοδος, της οποίας να βρείτε τη διαφορά ω. (Μονάδες 7)

28. Δίνεται η ακολουθία (α_ν) με γενικό τύπο $\alpha_\nu = 10 + 3\nu$. **13173** [4]

α)

i) Να δείξετε ότι η ακολουθία (α_ν) είναι αριθμητική πρόοδος. (Μονάδες 6)

ii) Να βρείτε τον πρώτο όρο της α_1 και τη διαφορά ω της παραπάνω αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 3)

β) Να βρείτε ποιοι όροι της (α_ν) βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. Πόσοι είναι οι όροι αυτοί; (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των όρων που βρίσκονται ανάμεσα στους αριθμούς 14 και 401. (Μονάδες 8)

29. Ένα εργοστάσιο κατασκευής πολυτελών αυτοκινήτων κατασκευάζει ένα νέο μοντέλο. Τον πρώτο μήνα κατασκευάστηκαν 5 τέτοια οχήματα. Στη συνέχεια όμως, κάθε μήνα κατασκευάζονταν 13 νέα οχήματα. **14758** [4]

α) Πόσα αυτοκίνητα θα είναι κατασκευασμένα συνολικά στο τέλος κάθε μήνα στο διάστημα του πρώτου εξαμήνου; (Μονάδες 6)

β) Να αιτιολογήσετε γιατί ο συνολικός αριθμός των αυτοκινήτων που είναι κατασκευασμένα στο τέλος κάθε μήνα αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Πόσα αυτοκίνητα κατασκευάστηκαν τα τέσσερα πρώτα χρόνια; (Μονάδες 6)

δ) Μετά από πόσους μήνες θα έχει κατασκευαστεί το 250^{o} αυτοκίνητο; (Μονάδες 7)

---

30. Ο Θοδωρής γράφει διαδοχικά και επαναλαμβανόμενα τα γράμματα της λέξης «ΑΛΓΕΒΡΑ». Στην πρώτη θέση το Α, στη δεύτερη το Λ, κοκ. Έτσι, σχηματίζεται η διαδοχή γραμμάτων ΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑΑΛΓΕΒΡΑ… **14809** [4]

α) Να αποδείξετε ότι οι θέσεις, στην διαδοχή, όπου συναντάμε το γράμμα Β σχηματίζουν αριθμητική πρόοδο (α_ν) με $\alpha_1 = 5$ και να βρείτε τη διαφορά της. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε σε ποια θέση της διαδοχής συναντάμε για 23η φορά το γράμμα Β. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε το γράμμα που βρίσκεται στην 200η θέση στην παραπάνω διαδοχή. (Μονάδες 9)

---

31. Ένας χώρος δεξίωσης γάμων διαφημίζεται ως εξής: το κόστος για 50 καλεσμένους είναι 6560ευρώ, ενώ για 100 καλεσμένους είναι 11910 ευρώ. Επιπλέον, μόνο για τη δέσμευση του χώρου πρέπει ο ενδιαφερόμενος να πληρώσει ένα πάγιο ποσό, ακόμα κι αν τελικά δεν γίνει η δεξίωση. Υποθέτουμε ότι οι τιμές του κόστους για τους καλεσμένους είναι όροι αριθμητικής προόδου (α_ν). **14927** [4]

α) Να δείξετε ότι το κόστος για ν καλεσμένους είναι $\alpha_\nu = 107\nu + 1210$. (1) (Μονάδες 9)

β) Να ερμηνεύσετε τη σημασία

i) του αριθμού 1210 στη σχέση (1). (Μονάδες 5)

ii) της διαφοράς $\omega = 107$ της προόδου στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 5)

γ) Να υπολογίσετε το κόστος για 80 καλεσμένους. (Μονάδες 6)

---

32. Έστω μία αριθμητική πρόοδος (α_ν) με διαφορά $\omega = 3$. Αν είναι γνωστό ότι στο διάστημα $\Delta = [2,8]$ υπάρχουν ακριβώς 3 διαδοχικοί όροι της αριθμητικής προόδου (α_ν), **14962** [4]

α) Να εξετάσετε αν ο αριθμός μηδέν είναι όρος της (α_ν). (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τους 3 διαδοχικούς όρους της (α_ν) που υπάρχουν στο $\Delta = [2,8]$. (Μονάδες 7)

γ) Αν $\alpha_6 = 14$,

i) να βρείτε τον α_1. (Μονάδες 6)

ii) να βρείτε το ελάχιστο πλήθος πρώτων όρων της (α_ν) που πρέπει να προσθέσουμε ώστε το άθροισμα να είναι μεγαλύτερο του 186. (Μονάδες 6)

(Δίνεται $\sqrt{4489} = 67$)

---

33. Στην Α΄ τάξη ενός Λυκείου της Καρδίτσας, η σύμβουλος των μαθηματικών πρόκειται να πραγματοποιήσει μια δραστηριότητα. Επειδή όμως δεν γνωρίζει το πλήθος των μαθητών της τάξης, συμβουλεύεται τον Γυμναστή του σχολείου, που στοιχίζει τους μαθητές για τις παρελάσεις και εκείνος απαντά με ένα πρόβλημα: **32741** [4]

«Μπορώ να τοποθετήσω όλους τους μαθητές σε x σειρές με $x-1$ μαθητές σε κάθε σειρά. Αν όμως θελήσω να τους τοποθετήσω σε $x+3$ σειρές με $x-3$ μαθητές σε κάθε σειρά, θα μου λείπει ένας μαθητής».

α) Να βρείτε την τιμή του x. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι η Α΄ τάξη έχει 90 μαθητές. (Μονάδες 6)

γ) Η σύμβουλος σκοπεύει να μοιράσει τους παραπάνω μαθητές σε ν ομάδες εργασίας, ώστε στην πρώτη ομάδα να πάνε 2 μαθητές και σε κάθε επόμενη ομάδα να πηγαίνουν 2 παραπάνω κάθε φορά. Να βρείτε την τιμή του ν, δηλαδή πόσες ομάδες θα δημιουργηθούν. (Μονάδες 13)

34. Οι αριθμοί : $x^2+5, \quad x^2+x, \quad 2x+4$, με τη σειρά που δίνονται, είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. **33579** [4]

α) Να βρείτε τις δυνατές τιμές του αριθμού x. (Μονάδες 6)

β) Αν $x=3$ και ο αριθμός x^2+5 είναι ο 4ος όρος της προόδου, να βρείτε:

i) Τη διαφορά ω της αριθμητικής προόδου. (Μονάδες 5)

ii) Τον πρώτο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

iii) Το άθροισμα $S=\alpha_{15}+\alpha_{16}+\alpha_{17}+\ldots+\alpha_{24}$. (Μονάδες 8)

35. Σε μια αριθμητική πρόοδο (α_ν), ο 3ος όρος είναι $\alpha_3=8$ και ο 8ος όρος είναι $\alpha_8=23$. **33581** [4]

α) Να βρείτε τον 1ο όρο α_1 και τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 9)

Αν $\alpha_1=2$ και $\omega=3$,

β) Να υπολογίσετε τον 31ο όρο της προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $S=(\alpha_1+1)+(\alpha_2+2)+(\alpha_3+3)+\ldots+(\alpha_{31}+31)$ (Μονάδες 10)

36. Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) με $\alpha_3=10$ και $\alpha_{20}=61$. **33583** [4]

α) Να αποδείξετε ότι ο πρώτος όρος της προόδου είναι $\alpha_1=4$ και η διαφορά είναι $\omega=3$. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν ο αριθμός 333 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 8)

γ) Να εξετάσετε αν υπάρχουν διαδοχικοί όροι x και y της παραπάνω προόδου (α_ν), τέτοιοι ώστε να ισχύει: $\frac{x}{2}=\frac{y}{3}$ (Μονάδες 9)

37. Σε αριθμητική πρόοδο (α_ν) είναι $\alpha_2=\kappa^2$ και $\alpha_3=(\kappa+1)^2$, όπου κ ακέραιος με $\kappa>1$. **33858** [4]

α) Να αποδείξετε ότι η διαφορά ω της προόδου είναι περιττός αριθμός. (Μονάδες 8)

β) Αν επιπλέον ο πρώτος όρος της είναι $\alpha_1=2$, τότε:

Να βρείτε την τιμή του κ και να αποδείξετε ότι $\omega=7$. (Μονάδες 8)

Να εξετάσετε αν ο αριθμός 72 είναι όρος της προόδου. (Μονάδες 9)

38. Ο ιδιοκτήτης ενός ταξιδιωτικού γραφείου εκτιμά ότι, όταν για μια συγκεκριμένη διαδρομή διαθέτει τα εισιτήρια στην κανονική τιμή των 21€ ανά εισιτήριο, τότε πουλά κατά μέσο όρο 30 μόνο εισιτήρια, ενώ το λεωφορείο έχει 51 θέσεις. **36650** [4]

Θέλοντας να αυξήσει την πελατεία του, κάνει την ακόλουθη προσφορά: Ο πρώτος επιβάτης που θα αγοράσει εισιτήριο θα πληρώσει 3€ και κάθε επόμενος επιβάτης να πληρώνει 0,5€ περισσότερα από τον προηγούμενο.

α) Να βρείτε πόσο θα πληρώσει ο δεύτερος, ο τρίτος και ο τέταρτος επιβάτης. (Μονάδες 4)

β) Αν, για κάθε $\nu\le 51$ ο αριθμός α_ν εκφράζει το ποσό που θα πληρώσει ο ν-οστός επιβάτης, να δείξετε ότι οι αριθμοί $\alpha_1,\alpha_2,\ldots,\alpha_{51}$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου και να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου. (Μονάδες 6)

γ) Αν το λεωφορείο γεμίσει, να βρείτε το ποσό που θα πληρώσει ο 51ος επιβάτης. (Μονάδες 7)

δ) Να βρείτε πόσα τουλάχιστον εισιτήρια θα πρέπει να πουληθούν ώστε η είσπραξη του γραφείου με αυτή την προσφορά να ξεπερνά την είσπραξη που θα έκανε αν πουλούσε 30 εισιτήρια στην τιμή των 21€ ανά εισιτήριο. (Μονάδες 8)

(Δίνεται: $\sqrt{10201}=101$)

39. Δίνεται μια αριθμητική πρόοδος (α_ν), $\nu\in\mathbb{N}^*$ της οποίας οι τρεις πρώτοι όροι είναι: **36653** [4]

$\alpha_1=x$, $\alpha_2=2x^2-3x-4$, $\alpha_3=x^2-2$ με x ακέραιο.

α) Να αποδείξετε ότι $x=3$ (Μονάδες 10)

β) Να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου $\alpha_1=x, \alpha_2=2x^2-3x-4, \alpha_3=x^2-2$ και να αποδείξετε ότι δεν υπάρχει όρος της προόδου που να είναι ίσος με 2014. (Μονάδες 8)

γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα $S=\alpha_1+\alpha_3+\alpha_5+\ldots+\alpha_{15}$. (Μονάδες 7)

40. Ένας μελισσοκόμος έχει τοποθετήσει 20 κυψέλες σε μια ευθεία η οποία διέρχεται από την αποθήκη του Α. Η πρώτη κυψέλη απέχει 1 μέτρο από την αποθήκη Α, η δεύτερη 4 μέτρα από το Α, η τρίτη 7 μέτρα από το Α και γενικά κάθε επόμενη κυψέλη απέχει από την αποθήκη Α, 3 επιπλέον μέτρα, σε σχέση με την προηγούμενη κυψέλη. **36660** [4]

α) Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των κυψελών από την αποθήκη Α αποτελούν διαδοχικούς όρους αριθμητικής προόδου και να βρείτε τον ν-οστό όρο της προόδου. Τι εκφράζει ο πρώτος όρος της αριθμητικής προόδου και τι η διαφορά της; (Μονάδες 6)

β) Σε πόση απόσταση από την αποθήκη Α είναι η 20η κυψέλη; (Μονάδες 6)

γ) Ο μελισσοκόμος ξεκινώντας από την αποθήκη συλλέγει το μέλι, από μια κυψέλη κάθε φορά, και το μεταφέρει στην αποθήκη Α.

i) Ποια είναι η απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι από την 3η κυψέλη; (Μονάδες 6)

ii) Ποια είναι η συνολική απόσταση που θα διανύσει ο μελισσοκόμος για να συλλέξει το μέλι και από τις 20 κυψέλες; (Μονάδες 7)

41. Ένα κλειστό στάδιο έχει 25 σειρές καθισμάτων. Στην πρώτη σειρά έχει 12 καθίσματα και καθεμιά από τις επόμενες σειρές έχει δυο καθίσματα παραπάνω από την προηγούμενη. **36662** [4]

α) Να βρείτε πόσα καθίσματα έχει η μεσαία και πόσα η τελευταία σειρά. (Μονάδες 10)

β) Να υπολογίσετε τη χωρητικότητα του σταδίου. (Μονάδες 5)

γ) Οι μαθητές ενός Λυκείου προκειμένου να παρακολουθήσουν μια εκδήλωση, κατέλαβαν όλα τα καθίσματα από την 7η μέχρι και την 14η σειρά. Να βρείτε το πλήθος των μαθητών του Λυκείου. (Μονάδες 10)

42. Ο Διονύσης γράφει στο τετράδιό του τους αριθμούς 3, 7, 11, 15,... και συνεχίζει προσθέτοντας κάθε φορά το 4. Σταματάει όταν έχει γράψει τους 40 πρώτους από τους αριθμούς αυτούς. **36674** [4]

α) Είναι οι παραπάνω αριθμοί διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

β) Να βρείτε το άθροισμα των 40 αυτών αριθμών. (Μονάδες 7)

γ) Είναι ο αριθμός 120 ένας από αυτούς τους 40 αριθμούς; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

δ) Ο Γιώργος πήρε το τετράδιο του Διονύση και συνέχισε να γράφει διαδοχικούς όρους της ίδιας αριθμητικής προόδου, από εκεί που είχε σταματήσει ο Διονύσης μέχρι να εμφανιστεί ο αριθμός 235. Να βρείτε το άθροισμα των αριθμών που έγραψε ο Γιώργος. (Μονάδες 7)

43. Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα. **37204** [4]

α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο της και τη διαφορά αυτής της προόδου. (Μονάδες 05)

β) Να βρείτε τον γενικό όρο της προόδου. (Μονάδες 04)

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; (Μονάδες 05)

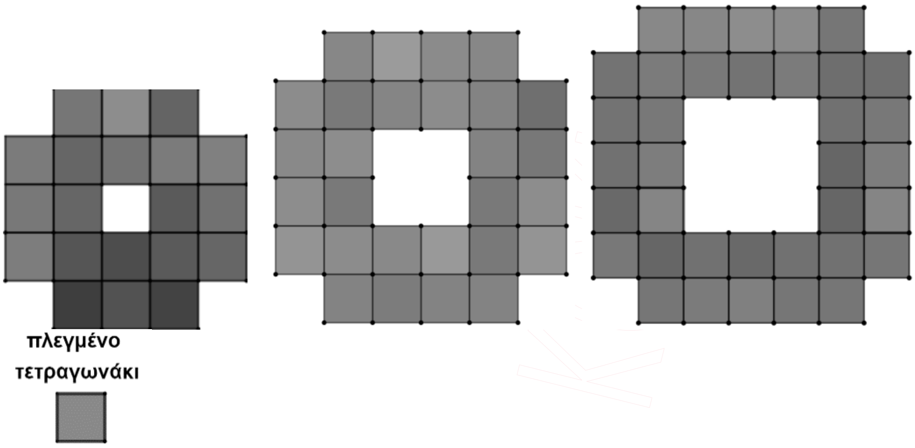
δ) Αν στην 1η σειρά της αίθουσας αυτής υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη 2η υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην 3η υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη 2η και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά της προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. (Μονάδες 05)

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. (Μονάδες 06)

44. Ο Αντρέας θέλει να φτιάξει μια μάλλινη κουβέρτα ενώνοντας μεταξύ τους πλεχτά σχήματα, όπως αυτά που φαίνονται παρακάτω, και καλύπτοντας τα κενά με ύφασμα. **38804** [4]

Χρειάζεται να υπολογίσει πόσα τετραγωνάκια θα πλέξει, για να ξέρει πόσα κουβάρια μαλλί πλεξίματος να αγοράσει. Το κάθε κουβάρι είναι 140m μαλλί.
Όπως βλέπουμε, σε κάθε ένα από τα σχήματα του παρακάτω σχεδίου υπάρχει μια τετράγωνη «τρύπα» στη μέση. Τα σχήματα στο παρακάτω σχέδιο δεν είναι ίδια, ακολουθούν όμως ένα μοτίβο, δηλαδή στο $1^{ο}$ σχήμα η «τρύπα» αντιστοιχεί σε ένα τετραγωνάκι, στο $2^{ο}$ σχήμα η «τρύπα» αντιστοιχεί σε 4 τετραγωνάκια, στο $3^{ο}$ σχήμα σε 9, κοκ.
Για το κάθε πλεγμένο τετραγωνάκι χρειαζόμαστε 16cm μαλλί.



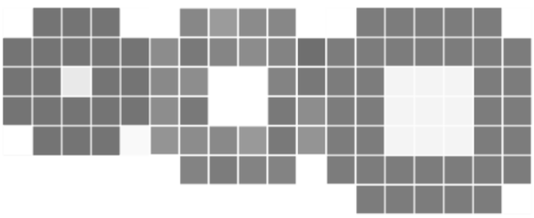
α)

i) Από πόσα πλεγμένα τετραγωνάκια αποτελείται το δέκατο σχήμα στη σειρά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)

ii) Η «τρύπα» στη μέση του δέκατου σχήματος σε πόσα τετραγωνάκια αντιστοιχεί; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 3)

β) Από πόσα πλεγμένα τετραγωνάκια αποτελείται το ν – οστό σχήμα στη σειρά; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας. (Μονάδες 4)

γ) Ο Αντρέας σκέφτηκε να φτιάξει μια ομάδα σχημάτων του μοτίβου, την οποία θα επαναλαμβάνει για να πλέξει την κουβέρτα. Μια τέτοια ομάδα είναι π.χ. η παρακάτω, όπου φαίνονται τα τρία πρώτα σχήματα. Μια άλλη ομάδα θα μπορούσε να έχει τα τέσσερα πρώτα σχήματα, ή τα πέντε πρώτα κ.ο.κ.



i) Να υπολογίσετε πόσα σχήματα του μοτίβου θα πρέπει να φτιάξει, ώστε τα τετραγωνάκια που θα πλέξει να είναι μεταξύ 500 και 600. (Μονάδες 8)

ii) Ο Αντρέας αποφάσισε να φτιάξει τα 10 πρώτα σχήματα του μοτίβου και, για να καλύψει όσο το δυνατόν περισσότερα κενά στη κουβέρτα, αποφάσισε να πλέξει 7 τέτοιες δεκάδες και επιπλέον κάποια μεμονωμένα σχήματα. Πόσα περίπου κουβάρια μαλλί θα πρέπει να αγοράσει, για να φτιάξει την κουβέρτα; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 6)

Δίνονται: $\sqrt{616} \cong 24,8$ και $\sqrt{516} \cong 22,7$.

45. Η Μαρία είναι φοιτήτρια και προσπαθεί να οργανώσει το διάβασμά της για τις εξετάσεις του Ιουνίου, στις οποίες πρέπει να δώσει τρία μαθήματα. Έφτιαξε τον παρακάτω πίνακα, όπου έχει σημειώσει τη σειρά με την οποία δίνει το κάθε μάθημα και τον αριθμό των σελίδων που έχει να διαβάσει για καθένα από αυτά. Ο στόχος της είναι να έχει ολοκληρώσει την ύλη και των τριών μαθημάτων τουλάχιστον δύο μέρες πριν από την έναρξη των εξετάσεων, που είναι στις 15/6. Σκέφτεται λοιπόν να ξεκινήσει διαβάζοντας 20 σελίδες και κάθε επόμενη ημέρα να διαβάζει 5 σελίδες περισσότερες από την προηγούμενη. **38829** 4

Μάθημα	Ύλη-Αριθμός σελίδων
Μ1	296 σελ.
Μ2	274 σελ.
Μ3	400 σελ.

α) Πόσες σελίδες θα διαβάσει η Μαρία την 5η μέρα; (Μονάδες 4)

β) Θα προλάβει να ολοκληρώσει την ύλη του πρώτου μαθήματος Μ1 μέσα σε 8 ημέρες, αν έχει ξεκινήσει το διάβασμά της από αυτό το μάθημα; Να εξηγήσετε τη σκέψη σας. (Μονάδες 6)

γ) Πόσες μέρες θα χρειαστεί η Μαρία, για να διαβάσει όλες τις σελίδες από την ύλη και των τριών μαθημάτων, ακολουθώντας το ρυθμό διαβάσματος που όρισε η ίδια; (Μονάδες 8)
(Δίνεται: $\sqrt{1601} \cong 40$)

δ) Αν η Μαρία διαβάζει τα μαθήματα διαδοχικά με τη σειρά την οποία θα τα δώσει στις εξετάσεις, αφήνοντας το Μ3 τελευταίο, πόσες ημέρες θα χρειαστεί για να διαβάσει το Μ3, αφού έχει ολοκληρώσει το Μ1 και το Μ2, ακολουθώντας πάντα τον ίδιο ρυθμό διαβάσματος τον οποίο όρισε; Πότε πρέπει να αρχίσει να διαβάζει το Μ3, ώστε να ολοκληρώσει το διάβασμά της τουλάχιστον δύο μέρες πριν αρχίσουν οι εξετάσεις; (Μονάδες 7)