

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΤΡΙΓΩΝΑ

ΚΡΙΤΗΡΙΑ ΙΣΟΤΗΤΑΣ ΤΡΙΓΩΝΩΝ [ΈΩΣ 3.04]

1. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης του $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ προς τα B, Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$ και ΓE ώστε $B\Delta = \Gamma E$. 12635 2

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{M\Delta E}$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{ME\Delta}$.

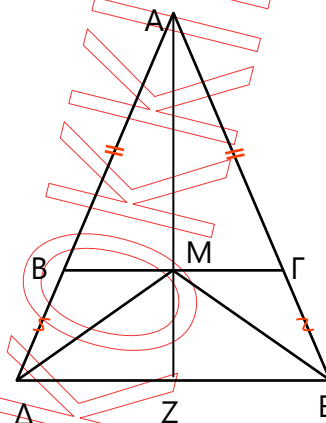
(Μονάδες 10)

2. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών AB , $A\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta$, ΓE αντίστοιχα ώστε $B\Delta = \Gamma E$. 12636 2

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $MB\Delta$ και $M\Gamma E$ είναι ίσα.
(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\widehat{M\Delta E}$ είναι ίση με τη γωνία $\widehat{ME\Delta}$.
(Μονάδες 6)

γ) Αν η AM τέμνει την ΔE στο σημείο Z να αποδείξετε ότι η AZ είναι κάθετη στην ΔE .
(Μονάδες 7)



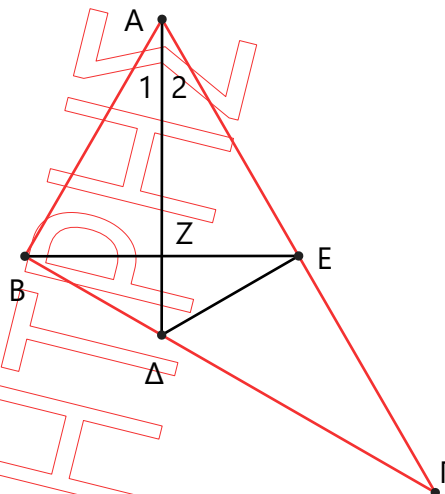
3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ τέτοιο, ώστε $A\Gamma = 2AB$. Η διχοτόμος του $\Delta\Delta$ τέμνει την διάμεσο BE στο σημείο Z . 12705 2

Να αποδείξετε ότι:

α) $AB = AE = \frac{A\Gamma}{2}$ (Μονάδες 7)

β) $\Delta B = \Delta E$. (Μονάδες 8)

γ) $AZ \perp BE$ (Μονάδες 10)



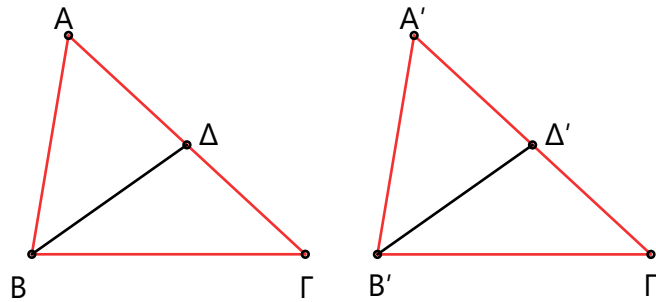
4. Δίνονται τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ του σχήματος με $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $AB = A'B'$. Αν οι διάμεσοι $B\Delta$ και $B'\Delta'$ είναι ίσες, να αποδείξετε ότι:

α) $\hat{A} = \hat{A}'$

(Μονάδες 15)

β) Τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)



5. Τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ του σχήματος έχουν $AB = \Gamma\Delta = AK = \Gamma\Lambda$ και $\hat{A} = \hat{\Gamma}$.

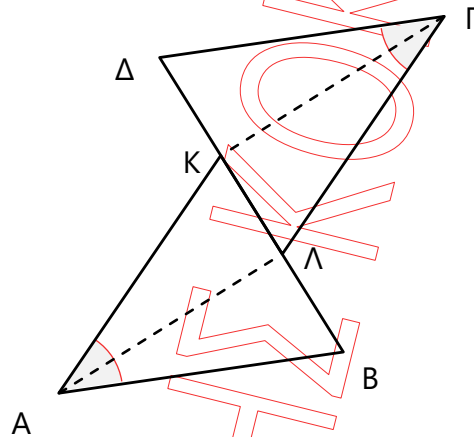
13826 2

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ABK και $\Gamma\Delta\Lambda$ είναι ίσα και ότι έχουν $BK = \Delta\Lambda$. (Μονάδες 12)

β) Έστω ότι Λ και K είναι τα μέσα των BK και $\Delta\Lambda$ αντίστοιχα:

i. Να εξετάσετε αν τα τμήματα $B\Lambda$, ΛK και $K\Delta$ είναι ίσα. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

ii. Να αποδείξετε ότι οι $A\Lambda$ και ΓK είναι κάθετες στην ευθεία $K\Lambda$. (Μονάδες 8)



6. Έστω δυο ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και $A'B'\Gamma'$ ($A'B' = A'\Gamma'$).

34493 2

α) Αν ισχύει $AB = A'B'$ και $\hat{A} = \hat{A}'$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 13)

β) Αν ισχύει $A\Gamma = A'\Gamma'$ και $\hat{B} = \hat{B}'$, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και $A'B'\Gamma'$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

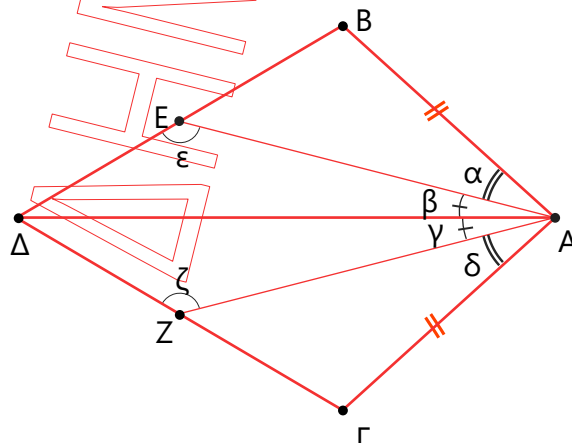
7. Αν στο παρακάτω σχήμα είναι

34511 2

$\hat{\alpha} = \hat{\delta}$, $\hat{\beta} = \hat{\gamma}$ και $AB = A\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα. (12 Μονάδες)

β) Οι γωνίες $\hat{\epsilon}$ και $\hat{\zeta}$ είναι ίσες. (13 Μονάδες)



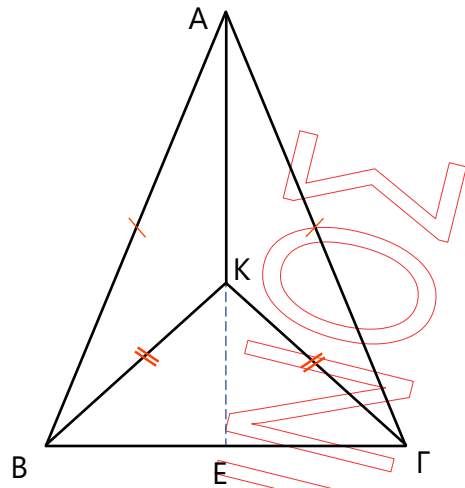
8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και K εσωτερικό σημείο του τριγώνου τέτοιο ώστε $KB = K\Gamma$.

34773 2

α) Να αποδείξετε ότι

- i) τα τρίγωνα BAK και $KA\Gamma$ είναι ίσα.
(Μονάδες 12)
- ii) η AK είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$
(Μονάδες 6)

β) Αν η προέκταση της AK τέμνει την $B\Gamma$ στο E ,
τοτε να δείξετε ότι η KE είναι διάμεσος του
τριγώνου $BK\Gamma$.
(Μονάδες 7)



9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και η διάμεσος του AM . Στην προέκταση της πλευράς $B\Gamma$ και προς τα δυο της άκρα, θεωρούμε σημεία Δ και E αντίστοιχα έτσι ώστε $B\Delta = \Gamma E$.

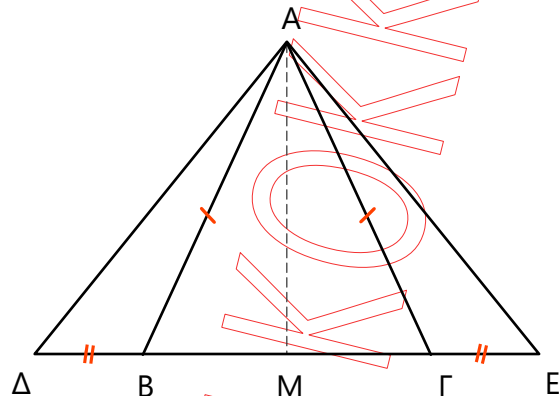
34774 2

Να αποδείξετε ότι:

α) $A\widehat{B}\Delta = A\widehat{\Gamma}E$,
(Μονάδες 6)

β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma E$ είναι ίσα,
(Μονάδες 12)

γ) η AM είναι και διάμεσος του τριγώνου $A\Delta E$.
(Μονάδες 7)



10. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) τριγώνου $AB\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα

34780 2

$A\Delta = AB$ και $AE = A\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta E = B\Gamma$.
(Μονάδες 12)

β) Αν AM είναι η διάμεσος του τριγώνου $AB\Gamma$ και η προέκταση της AM τέμνει την $E\Delta$ στο Z , να αποδείξετε ότι:

- i. τα τρίγωνα $A\Delta Z$ και ABM είναι ίσα,
(Μονάδες 7)
- ii. $Z\Delta = \frac{\Delta E}{2}$.
(Μονάδες 6)

11. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και σημείο M εσωτερικό του τριγώνου, τέτοιο ώστε $MB = M\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

34784 2

α) Τα τρίγωνα AMB και $AM\Gamma$ είναι ίσα.
(Μονάδες 12)

β) Η ευθεία AM διχοτομεί τη γωνία $\widehat{B\hat{M}\Gamma}$.
(Μονάδες 13)

- 12.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$) και στις ίσες πλευρές AB , $A\Gamma$ παίρνουμε αντίστοιχα τμήματα $AD = \frac{1}{3} AB$ και $AE = \frac{1}{3} A\Gamma$. Αν M είναι το μέσο της $B\Gamma$, να αποδείξετε ότι:

- α) τα τμήματα BD και GE είναι ίσα.
 β) τα τρίγωνα BDM και $ME\Gamma$ είναι ίσα.
 γ) το τρίγωνο DEM είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 5)

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 10)

- 13.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο KAB ($KA = KB$) και $K\Gamma$ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{K}$. Στην προέκταση της BA (προς το A) παίρνουμε σημείο Λ και στην προέκταση της AB (προς το B) παίρνουμε σημείο M , έτσι ώστε $\Lambda A = BM$. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο $K\Lambda M$ είναι ισοσκελές
 β) η $K\Gamma$ είναι διάμεσος του τριγώνου $K\Lambda M$

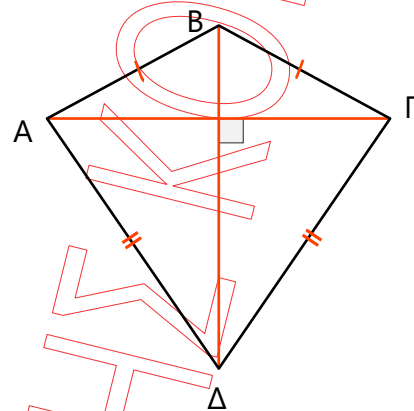
(Μονάδες 12)

(Μονάδες 13)

- 14.** Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $BA = B\Gamma$ και $\Delta A = \Delta\Gamma$. Οι διαγώνιοι $A\Gamma$, $B\Delta$ του τετράπλευρου είναι ίσες και τέμνονται κάθετα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος των γωνιών B και Δ του τετραπλεύρου $AB\Gamma\Delta$. (Μονάδες 12)
 β) Η $B\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 13)

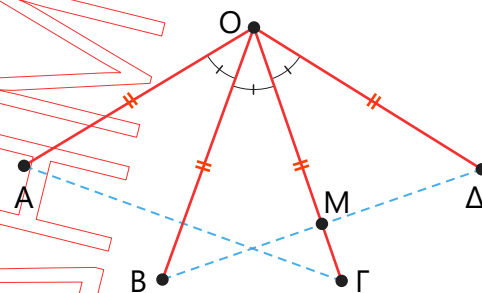


- 15.** Δίνεται γωνία $\widehat{xOy}$ και η διχοτόμος της $O\delta$. Θεωρούμε σημείο M της $O\delta$ και σημεία A και B στις ημιευθείες Ox και Oy αντίστοιχα, τέτοια ώστε $OA = OB$. Να αποδείξετε ότι:

- α) $MA = MB$. (Μονάδες 15)
 β) Η $O\delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{AMB}$. (Μονάδες 10)

- 16.** Αν στο σχήμα που ακολουθεί είναι $\widehat{AOB} = \widehat{BO\Gamma} = \widehat{\Gamma O\Delta}$ και $OA = OB = O\Gamma = O\Delta$, να αποδείξετε ότι:

- α) $A\Gamma = B\Delta$. (Μονάδες 10)
 β) Το M είναι μέσον της $B\Delta$, όπου M το σημείο τομής των τμημάτων $O\Gamma$ και $B\Delta$. (Μονάδες 15)



- 17.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Στις προεκτάσεις των πλευρών BA και ΓA (προς το A) θεωρούμε τα σημεία E και Δ αντίστοιχα τέτοια ώστε $A\Delta = AE$. 36170 2

Να αποδείξετε ότι:

α) $BE = \Gamma\Delta$

β) $B\Delta = \Gamma E$

γ) $\Delta\hat{B}\Gamma = E\hat{\Gamma}B$

(Μονάδες 6)

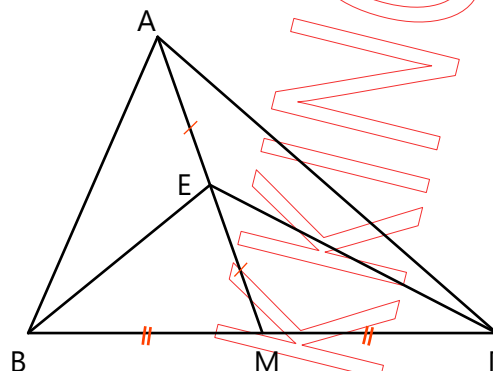
(Μονάδες 10)

(Μονάδες 9)

- 18.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου του AM . Αν $B\Gamma = 2 BE$, τότε να αποδείξετε ότι:

α) $A\hat{E}B = E\hat{M}\Gamma$ (Μονάδες 12)

β) $AB = E\Gamma$. (Μονάδες 13)

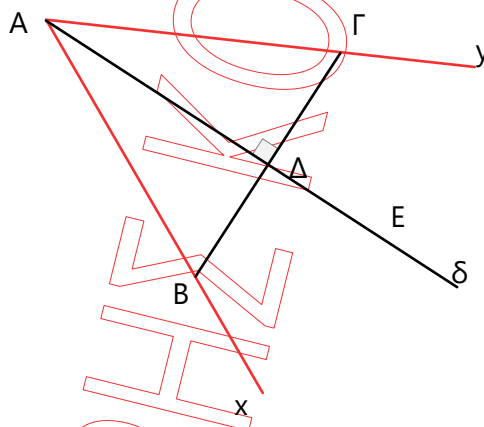


36333 2

- 19.** Δίνεται γωνία $x\hat{A}y$ και η διχοτόμος της $A\delta$. Από τυχαίο σημείο B της Ax φέρνουμε κάθετη στη διχοτόμο, η οποία τέμνει την $A\delta$ στο Δ και την Ay στο Γ .

α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AB και $A\Gamma$ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Αν E τυχαίο σημείο της $A\delta$, να αποδείξετε ότι το E ισαπέχει από τα B και Γ . (Μονάδες 13)



36341 2

- 20.** Δίνεται τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = A\Delta$ και $\Gamma B = \Gamma\Delta$. Αν E είναι το σημείο τομής των προεκτάσεων των BA και $\Gamma\Delta$ και Z το σημείο τομής των προεκτάσεων των ΔA και ΓB να αποδείξετε ότι:

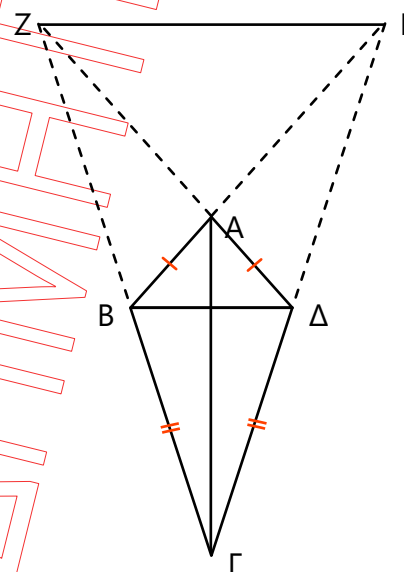
α) Η ΓA είναι διχοτόμος της γωνίας $B\Gamma\Delta$. (Μονάδες 7)

β) $\Gamma Z = \Gamma E$

γ) $EZ \parallel B\Delta$

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 9)



14880 4