

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3ο: ΤΡΙΓΩΝΑ

~3.14. ΣΧΕΤΙΚΕΣ ΘΕΣΕΙΣ ΕΥΘΕΙΑΣ ΚΑΙ ΚΥΚΛΟΥ, ~3.15. ΕΦΑΠΤΟΜΕΝΑ ΤΜΗΜΑΤΑ

9 θέματα

1. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα $\rho = 6$. Έστω d η απόσταση του κέντρου O του κύκλου από μια ευθεία (ϵ) . Να βρείτε τη σχετική θέση του κύκλου και της ευθείας (ϵ) στις εξής περιπτώσεις:

13759 2

α) $d = 3$.

(Μονάδες 9)

β) $d = 6$.

(Μονάδες 8)

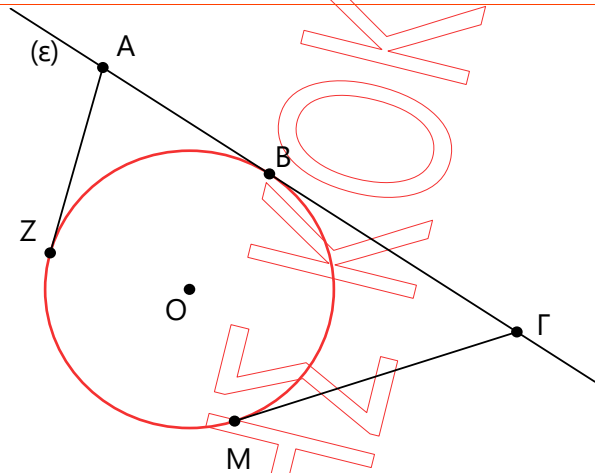
γ) $d = 9$.

(Μονάδες 8)

2. Δίνεται κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο B του κύκλου φέρουμε

13817 2

εφαπτόμενη ευθεία (ϵ) . Θεωρούμε στην ευθεία (ϵ) δύο σημεία A και Γ εκατέρωθεν του B έτσι ώστε $BA < B\Gamma$ και από τα σημεία αυτά, φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AZ και ΓM στον κύκλο.



- α) Να γράψετε τα ευθύγραμμα τμήματα τα οποία είναι ίσα, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 15)

- β) Να αποδείξετε ότι $A\Gamma = AZ + M\Gamma$.

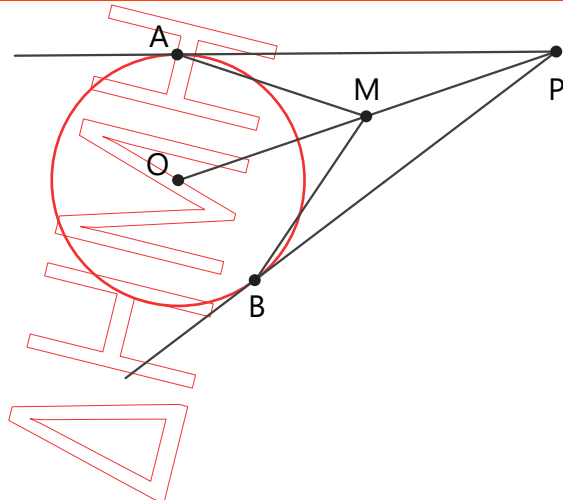
(Μονάδες 10)

3. Από εξωτερικό σημείο P ενός κύκλου (O, ρ) φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήματα PA και PB . Αν M είναι ένα τυχαίο εσωτερικό σημείο του ευθυγράμμου τμήματος OP , να αποδείξετε ότι:

36095 2

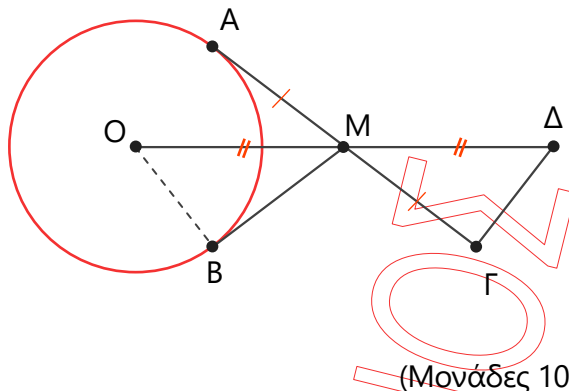
- α) τα τρίγωνα PAM και PMB είναι ίσα, (Μονάδες 12)

- β) οι γωνίες $\widehat{MAO}$ και $\widehat{MBO}$ είναι ίσες. (Μονάδες 13)



4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται κύκλος (O, R) και τα εφαπτόμενα τμήματα MA και MB . Προεκτείνουμε την AM κατά τμήμα $MG=MA$ και την OM κατά τμήμα $MD=OM$.

α) Να αποδείξετε ότι $MB = MG$.



(Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα OMB και MGD είναι ίσα.

(Μονάδες 15)

5. Δίνονται δύο ομόκεντροι κύκλοι με κέντρο O και ακτίνες ρ και R ($\rho < R$). Οι χορδές $\Delta\Gamma$ και ZE του κύκλου (O, R) εφάπτονται του κύκλου (O, ρ) στα σημεία A και B αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta\Gamma = ZE$.

(Μονάδες 12)

β) Αν οι $\Delta\Gamma$ και ZE προεκτεινόμενες τέμνονται στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $KE\Gamma$ είναι ισοσκελές.

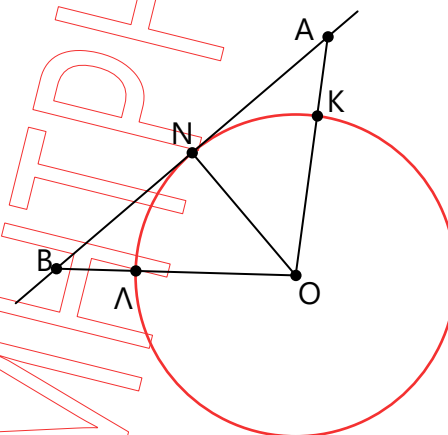
(Μονάδες 13)

6. Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Σε σημείο N του κύκλου φέρουμε την εφαπτόμενή του, και εκατέρωθεν του N θεωρούμε σημεία A και B , τέτοια ώστε $NA = NB$. Οι OA και OB τέμνουν τον κύκλο στα K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $\triangle AOB$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 13)

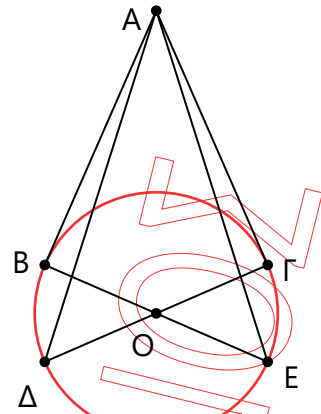
β) Το σημείο N είναι μέσο του τόξου $K\Lambda$. (Μονάδες 12)



7. Έστω κύκλος (O, ρ) και ένα εξωτερικό του σημείο A . Από το A φέρουμε τα εφαπτόμενα τμήματα AB και AG του κύκλου και έστω E και Δ τα αντιδιαμετρικά σημεία των B και Γ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ABE και $AG\Delta$ είναι ίσα, (Μονάδες 13)
 β) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και AGE είναι ίσα. (Μονάδες 12)



36354 2

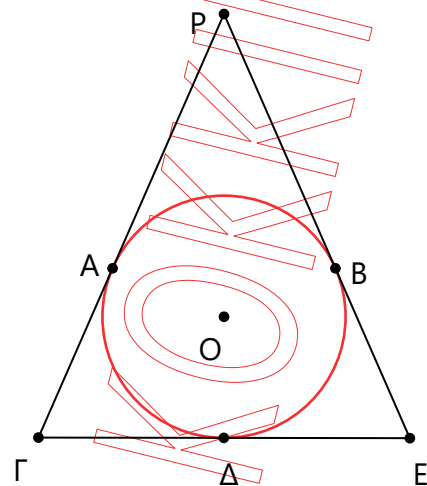
8. Έστω ότι ο κύκλος (O, ρ) εφάπτεται των πλευρών του τριγώνου PGE στα σημεία A , Δ και B .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i) $PG = G\Delta + AP$ (Μονάδες 6)
 ii) $PG - G\Delta = PE - \Delta E$ (Μονάδες 8)

β) Αν $AG = BE$, να αποδείξετε ότι

- i) Το τρίγωνο PGE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
 ii) Τα σημεία P , O και Δ είναι συνευθειακά. (Μονάδες 5)



1751 4

9. Θεωρούμε κύκλο κέντρου O και εξωτερικό σημείο του P . Από το P φέρνουμε τα εφαπτόμενα τμήμα PA και PB . Η διακεντρική ευθεία PO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Λ . Η εφαπτόμενη του κύκλου στο Λ τέμνει τα PA και PB στα σημεία Γ και Δ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο $P\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)
 β) $\Gamma A = \Delta B$. (Μονάδες 8)
 γ) η περίμετρος του τριγώνου $P\Gamma\Delta$ είναι ίση με $PA + PB$. (Μονάδες 7)

1752 4