

5.2-ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ

46 θέματα

13755²

1. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από την κορυφή A φέρουμε ευθεία (ε) παράλληλη προς τη $B\Gamma$. Από το τυχαίο σημείο Δ της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε τις παράλληλες προς την AB και $A\Gamma$, οι οποίες τέμνουν την ευθεία (ε) στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

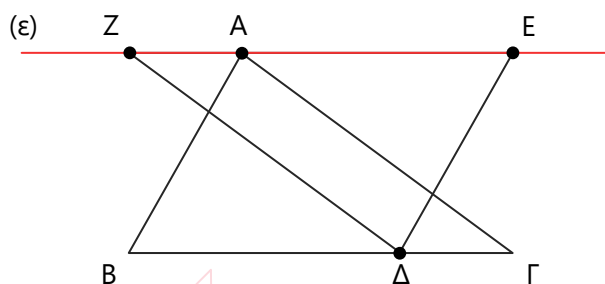
Να αποδείξετε ότι :

α) τα τετράπλευρα $ZAG\Delta$ και $ABDE$ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 10)

β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και ΔEZ είναι ίσα.

(Μονάδες 15)



2. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ τέτοιο, ώστε $AD < AB$ και M το μέσο της $B\Gamma$.

Προεκτείνουμε την AM προς το M κατά τμήμα $ME = AM$.

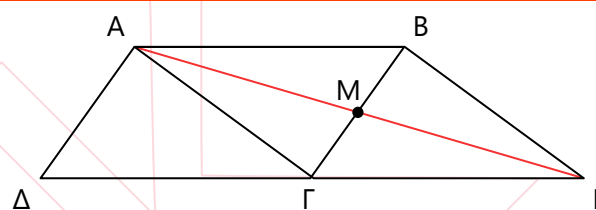
Να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο $ABE\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 10)

β) τα σημεία Δ , Γ και E είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 15)

**13816**²

3. Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με βάσεις AB και $\Gamma\Delta$. Αν E και Z τα μέσα των $\Gamma\Delta$ και BE αντίστοιχα και Θ το σημείο τομής της AB και της προέκτασης της ΓZ , να αποδείξετε ότι:

13824²α) Τα τρίγωνα ΓEZ , ΘBZ είναι ίσα.

(Μονάδες 13)

β) $E\Gamma = \Theta B$.

(Μονάδες 5)

γ) Το τετράπλευρο $EB\Theta\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)

4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της $B\Gamma$ γράφουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την BA και ένα άλλο ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την ΓA (τα σημεία Δ και E βρίσκονται στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

13825²α) Τα τετράπλευρα $A\Delta M B$ και $A\Gamma M E$ είναι παραλληλόγραμμα.

(Μονάδες 12)

β) $\Delta A = A E$.

(Μονάδες 13)

5. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε τα σημεία E και Z των τμημάτων AO και ΓO αντίστοιχα, τέτοια ώστε $A E = \Gamma Z$.

13829²α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A E \Delta$ και $\Gamma Z B$ είναι ίσα.

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Delta E B Z$ είναι παραλληλόγραμμο.

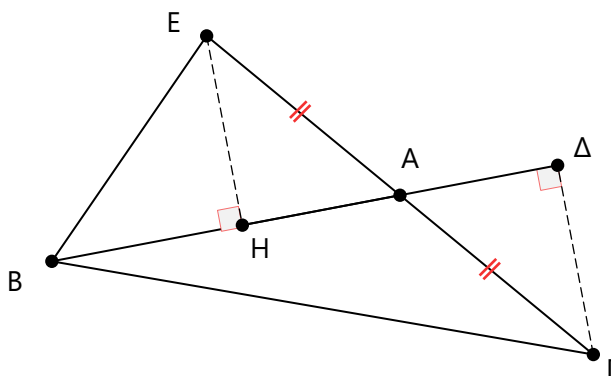
(Μονάδες 13)

6. Στο παρακάτω σχήμα το $\Gamma\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $AB\Gamma$, το EH είναι ύψος του τριγώνου ABE και η BA είναι διάμεσος του τριγώνου BEG .

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $A\Gamma\Delta$ και AEH είναι ίσα. (Μονάδες 10)

β) Να αποδείξετε ότι $AH=AD$. (Μονάδες 5)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $\Gamma\Delta EH$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



13833 ²

7. Σε τυχαίο τρίγωνο $AB\Gamma$ φέρουμε τη διάμεσό του AM . Προεκτείνουμε την πλευρά $B\Gamma$ προς το μέρος του B κατά τμήμα $BZ = B\Gamma$ και προς το μέρος του Γ κατά τμήμα $\Gamma H = B\Gamma$, επίσης προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $ME = AM$.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AMZ και EMH είναι ίσα. (Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AHEZ$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

13834 ²

8. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB = 2B\Gamma$. Προεκτείνουμε την πλευρά $A\Delta$ (προς το μέρος του Δ) κατά τμήμα $\Delta E = A\Delta$ και φέρουμε την $B\epsilon$ που τέμνει τη $\Delta\Gamma$ στο σημείο H .

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο BAE είναι ισοσκελές, (Μονάδες 7)

β) το $\Delta E\Gamma B$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 9)

γ) η AH είναι διάμεσος του BAE τριγώνου. (Μονάδες 9)

34386 ²

9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο φέρουμε τις διαμέσους του BM και ΓN . Προεκτείνουμε την BM (προς το M) κατά τμήμα $M\Delta = BM$ και την ΓN (προς το N) κατά τμήμα $N\epsilon = \Gamma N$.

α) Να αποδείξετε ότι $A\Delta \parallel B\Gamma$ και $A\epsilon \parallel B\Gamma$. (Μονάδες 13)

β) Είναι τα σημεία E , A και Δ συνευθειακά; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 12)

34388 ²

10. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και η διαγώνιός του $B\Delta$. Από τις κορυφές A και Γ φέρουμε τις κάθετες AE και ΓZ στη $B\Delta$, που την τέμνουν στα σημεία E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) τα τρίγωνα $A\Delta E$ και $\Gamma B Z$ είναι ίσα, (Μονάδες 10)

β) το τετράπλευρο $A\epsilon\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)

34389 ²

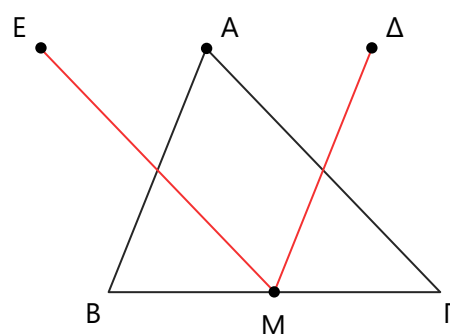
11. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M της πλευράς $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα $M\Delta$ ίσο και παράλληλο προς την πλευρά BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο προς την πλευρά ΓA .

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta A = A\epsilon$, (Μονάδες 8)

β) τα σημεία Δ , A και E βρίσκονται στην ίδια ευθεία, (Μονάδες 9)

γ) $\Delta E = B\Gamma$.



(Μονάδες 8)

34391 ²

- 12.** Δίνεται ΑΒΓΔ παραλληλόγραμμο με $AB=2AD$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\hat{A}$ του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την ΑΒ στο Ε. **34394**²

α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΔΕ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 12)

β) Είναι το σημείο Ε μέσο της πλευράς ΑΒ; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

- 13.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και Ο το σημείο τομής των διαγωνίων του. Θεωρούμε σημείο Ε του τμήματος ΑΟ και σημείο Ζ του τμήματος ΟΓ, ώστε $OE=OZ$. **34395**²

Να αποδείξετε ότι:

α) $DE=BZ$, (Μονάδες 12)

β) το ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

- 14.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ με $AB=2BG$ και Ε το μέσο της πλευράς του ΑΒ. **34423**²

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΕΑΔ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 10)

β) η ΔΕ είναι διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$. (Μονάδες 15)

- 15.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ και η διάμεσός του ΑΜ. Στην προέκταση της διαμέσου ΜΔ του τριγώνου ΑΜΓ (προς το Δ) θεωρούμε σημείο Ε ώστε $MD=DE$. **34425**²

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΑΜΓΕ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)

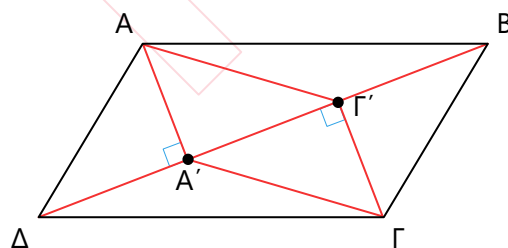
β) η ΒΕ διέρχεται από το μέσο της διαμέσου ΑΜ. (Μονάδες 13)

- 16.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ και τμήματα AA' , GG' κάθετα στη διαγώνιο ΒΔ από τις κορυφές Α, Γ αντίστοιχα. Αν τα σημεία Α' και Γ' δεν ταυτίζονται, να αποδείξετε ότι: **34783**²

α) $AA' \parallel GG'$, (Μονάδες 8)

β) $AA' = GG'$, (Μονάδες 10)

γ) Το τετράπλευρο ΑΓ'ΓΑ' είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 7)



- 17.** Θεωρούμε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ. Αν οι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$ τέμνουν τις πλευρές ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: **36089**²

α) τα τρίγωνα ΑΕΔ και ΒΓΖ είναι ίσα, (Μονάδες 12)

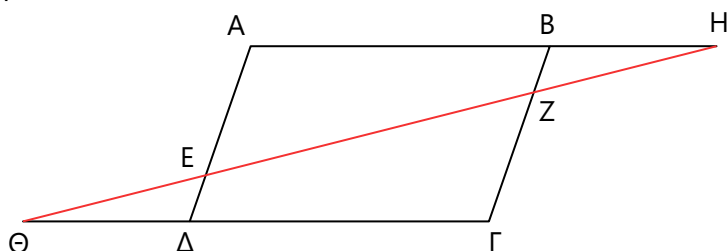
β) το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

- 18.** Στις πλευρές ΑΔ και ΒΓ παραλληλογράμμου ΑΒΓΔ θεωρούμε σημεία Ε και Ζ, τέτοια ώστε $AE = GZ$. Αν η ευθεία ΖΕ τέμνει τις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ και ΓΔ στα σημεία Η και Θ, να αποδείξετε ότι: **36090**²

α) $H\hat{B}Z = E\hat{A}\Theta$ (Μονάδες 8)

β) $B\hat{Z}H = \Delta\hat{E}\Theta$ (Μονάδες 8)

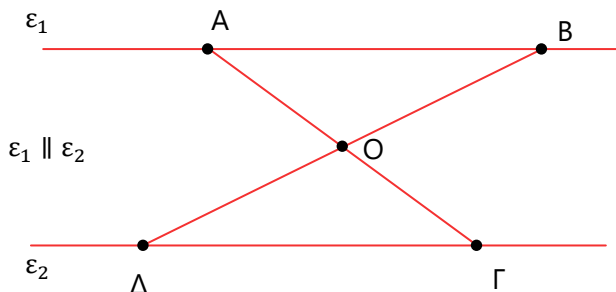
γ) $BH = \Theta\Delta$ (Μονάδες 9)



- 19.** Θεωρούμε δύο παράλληλες ευθείες ε_1 και ε_2 και τα σημεία A, B στην ε_1 και Δ και Γ στην ε_2 ώστε τα τμήματα ΑΓ και ΒΔ να τέμνονται στο μέσο Ο του ΒΔ. 36096 ²

Να αποδείξετε ότι:

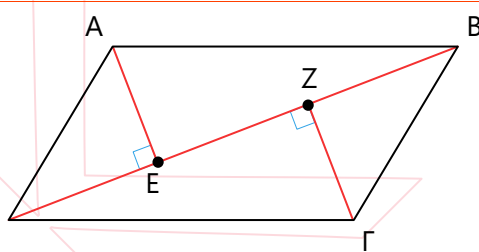
- α) τα τρίγωνα ΑΟΒ και ΓΟΔ είναι ίσα και να αναφέρετε τα ίσα κύρια στοιχεία τους αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 12)
- β) το ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



- 20.** Σε παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ (ΑΒ||ΓΔ) με $AB > BG$ φέρουμε από τις κορυφές Α και Γ καθέτους στη διαγώνιο ΒΔ, οι οποίες την τέμνουν σε διαφορετικά σημεία Ε και Ζ αντίστοιχα.

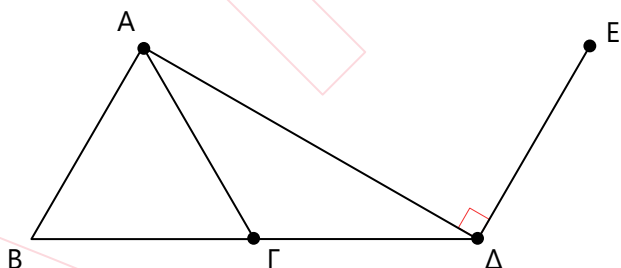
Να αποδείξετε ότι:

- α) $AE = GZ$, (Μονάδες 15)
- β) το τετράπλευρο ΑΕΓΖ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)



- 21.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το μέρος του Γ) θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = BG$. Φέρουμε τμήμα ΔΕ κάθετο στην ΑΔ στο σημείο της Δ, τέτοιο ώστε $\Delta E = BG$ (τα Α και Ε είναι στο ίδιο ημιεπίπεδο ως προς την ΒΔ).

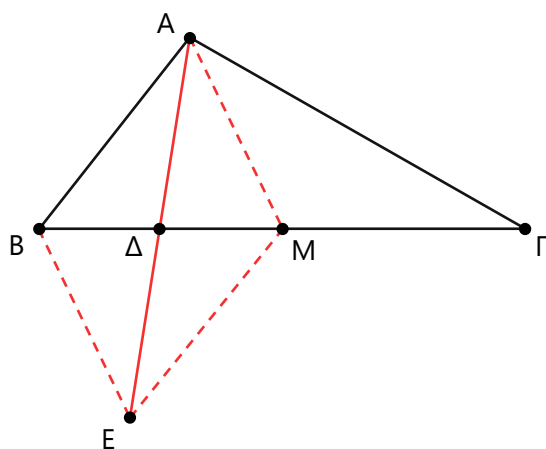
- α) Να βρείτε τις γωνίες του τριγώνου ΑΒΔ. (Μονάδες 12)
- β) Να αποδείξετε ότι το ΑΒΔΕ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)



- 22.** Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ στο οποίο ισχύει $B\Gamma = 2AB$ και έστω Μ το μέσο της ΒΓ. Αν η ΑΔ είναι διάμεσος του τριγώνου ΑΒΜ και Ε σημείο στην προέκτασή της ώστε $AD = DE$.

Να αποδείξετε ότι:

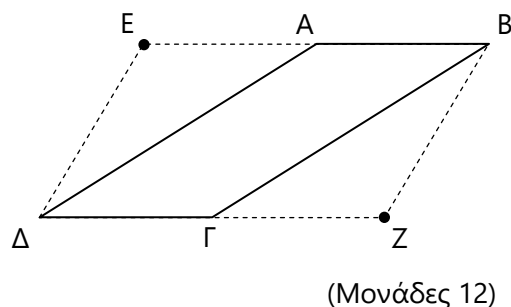
- α) Το τετράπλευρο ΑΒΕΜ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)
- β) $ME = MG$ (Μονάδες 13)



- 23.** Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά BA (προς το A) και την πλευρά $\Delta\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήματα $AE = AB$ και $\Gamma Z = \Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ΔE και $B\Gamma Z$ είναι ίσα, (Μονάδες 13)
β) το τετράπλευρο $EBZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

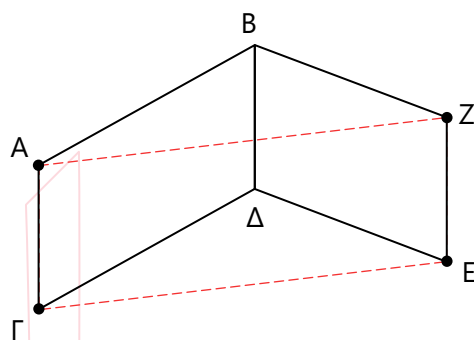


36225²

- 24.** Δίνονται τα παραλληλόγραμμο $AB\Delta\Gamma$ και $B\Delta E Z$.

Να αποδείξετε ότι:

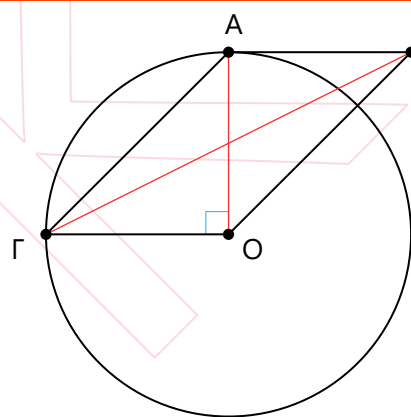
- α) το τετράπλευρο $A\Gamma E Z$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 13)
β) $\widehat{ABZ} = \widehat{\Gamma\Delta E}$. (Μονάδες 12)



36327²

- 25.** Έστω κύκλος με κέντρο O και ακτίνα ρ . Θεωρούμε κάθετες ακτίνες OA , OG και εφαπτόμενο στον κύκλο τμήμα AB τέτοιο ώστε $AB = OG$.

- α) Να αποδείξετε ότι τα τμήματα AO και $B\Gamma$ διχοτομούνται. (Μονάδες 10)
β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $ABOG$. (Μονάδες 15)



36348²

- 26.** Έστω ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και τα σημεία N και K των AB και $\Delta\Gamma$ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $AN = K\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα $AN\Delta$ και $B\Gamma K$ είναι ίσα, (Μονάδες 12)
β) το τετράπλευρο $NBK\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 13)

- 27.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και M το μέσο της $B\Gamma$. Προεκτείνουμε τη διάμεσο AM κατά τμήμα $M\Delta = MA$. Από το A φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$ η οποία τέμνει την προέκταση της $\Delta\Gamma$ στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο, (Μονάδες 12)
β) $BM = \frac{AE}{2}$. (Μονάδες 13)

- 28.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, στο οποίο η εξωτερική του γωνία $\widehat{\Gamma}$ είναι διπλάσια εσωτερικής του γωνίας $\widehat{A}$. Από την κορυφή A διέρχεται ημιευθεία $Ax \parallel B\Gamma$ ημιεπίπεδο (AB, Γ) . Στην ημιευθεία Ax θεωρούμε σημείο Δ τέτοιο ώστε $\Delta\Delta = B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι:

- α) Η $B\Delta$ διέρχεται από το μέσο του τμήματος $A\Gamma$. (Μονάδες 7)
β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της $\widehat{\Gamma_{εξ}}$. (Μονάδες 9)
γ) Το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

- 29.** Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ παραλληλογράμμου ABΓΔ αντίστοιχα. 1730 ⁴
 Αν για το παραλληλόγραμμο ABΓΔ επιπλέον ισχύει $AB > AD$, να εξετάσετε αν είναι αληθείς ή όχι οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: $A\hat{E}D = B\hat{Z}Γ$.

Ισχυρισμός 3: Οι ΔΕ και ΒΖ είναι διχοτόμοι των απέναντι γωνιών $\hat{A}$ και $\hat{B}$.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
 (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 (Μονάδες 9)

- 30.** Έστω ότι E και Z είναι τα μέσα των πλευρών AB και ΓΔ παραλληλογράμμου ABΓΔ αντίστοιχα. 1731 ⁴
 Αν για το παραλληλόγραμμο ABΓΔ επιπλέον ισχύουν $AB > AD$ και γωνία $\hat{A}$ αμβλεία, να εξετάσετε αν είναι αληθείς οι ακόλουθοι ισχυρισμοί:

Ισχυρισμός 1: Το τετράπλευρο ΔΕΒΖ είναι παραλληλόγραμμο.

Ισχυρισμός 2: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ίσα.

Ισχυρισμός 3: Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΒΓΖ είναι ισοσκελή.

α) Στην περίπτωση που θεωρείτε ότι κάποιος ισχυρισμός είναι αληθής να τον αποδείξετε.
 (Μονάδες 16)

β) Στην περίπτωση που κάποιος ισχυρισμός δεν είναι αληθής, να βρείτε τη σχέση των διαδοχικών πλευρών του παραλληλογράμμου ώστε να είναι αληθής. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
 (Μονάδες 9)

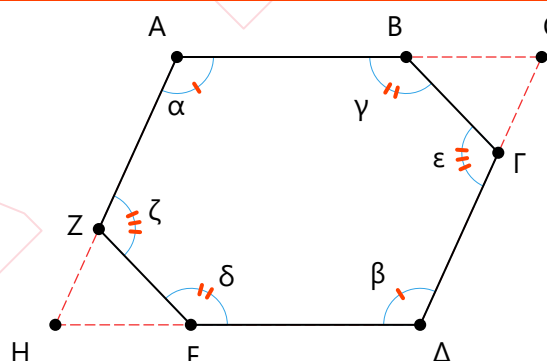
- 31.** Στο κυρτό εξάγωνο ABΓΔΕΖ ισχύουν τα εξής: $\hat{\alpha} = \hat{\beta}$, $\hat{\gamma} = \hat{\delta}$ και $\hat{\epsilon} = \hat{\zeta}$.

α) Να υπολογίσετε το άθροισμα $\hat{\alpha} + \hat{\gamma} + \hat{\epsilon}$.
 (Μονάδες 8)

β) Αν οι πλευρές ΑΖ και ΔΕ προεκτείνόμενες τέμνονται στο Η και οι πλευρές ΑΒ και ΔΓ προεκτείνόμενες τέμνονται στο Θ, να αποδείξετε ότι:

Οι γωνίες Α και Η είναι παραπληρωματικές

Το τετράπλευρο ΑΘΔΗ είναι παραλληλόγραμμο.



(Μονάδες 10)

(Μονάδες 7)

- 32.** Δίνεται παραλληλόγραμμο ABΓΔ, με $AB > AD$. Θεωρούμε σημεία Κ, Λ, των ΑΔ και ΑΒ αντίστοιχα ώστε $AK = AL$. Έστω Μ το μέσο του ΚΛ και η προέκταση του ΑΜ (προς το Μ) τέμνει τη ΔΓ στο σημείο Ε.

Να αποδείξετε ότι:

α) $AD = DE$.

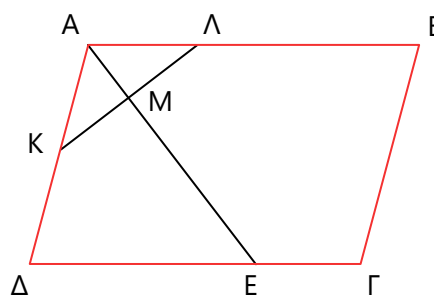
β) $BΓ + ΓΕ = AB$.

γ) $\hat{B} = 2 \cdot \hat{A\hat{L}K}$.

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 7)



1785 ⁴

- 33.** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ και στην προέκταση της $A\Delta$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $DE = \Delta\Gamma$ ενώ στην προέκταση της AB θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $BZ = B\Gamma$.

α) Να αποδείξετε ότι:

$$B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E. \quad (\text{Μονάδες } 10)$$

τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

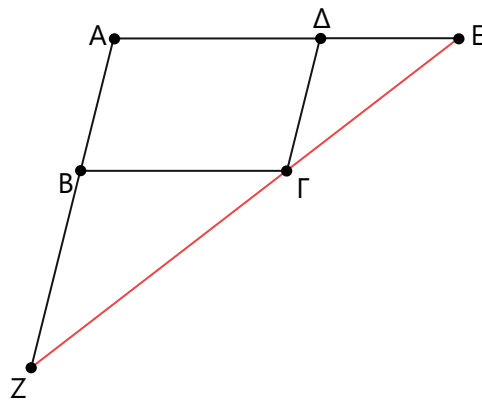
β) Ένας μαθητής για να αποδείξει ότι τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά ανέπτυξε τον παρακάτω συλλογισμό. « Έχουμε:

$B\hat{\Gamma}Z = \Delta\hat{\Gamma}E$ (ως εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των παραλλήλων DE και $B\Gamma$ που τέμνονται από τη ZE) και

$B\hat{\Gamma}\Delta = \Gamma\hat{\Delta}E$ (ως εντός εναλλάξ των παραλλήλων DE και $B\Gamma$ που τέμνονται από την $\Delta\Gamma$).

Όμως $\Delta\hat{\Gamma}E + \Gamma\hat{\Delta}E + \Delta\hat{E}\Gamma = 180^\circ$ (ως άθροισμα των γωνιών του τριγώνου $\Delta E\Gamma$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα: $\Delta\hat{\Gamma}E + B\hat{\Gamma}\Delta + B\hat{\Gamma}Z = 180^\circ$. Οπότε τα σημεία Z, Γ, E είναι συνευθειακά.»

Όμως ο καθηγητής υπέδειξε ένα λάθος στο συλλογισμό αυτό. Να βρείτε το λάθος στο συγκεκριμένο συλλογισμό. (Μονάδες 5)



1805 ⁴

- 34.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Από το μέσο M του $B\Gamma$ φέρουμε ευθύγραμμο τμήμα MD ίσο και παράλληλο με το BA και ευθύγραμμο τμήμα ME ίσο και παράλληλο με το GA (τα σημεία Δ και E είναι στο ημιεπίπεδο που ορίζεται από τη $B\Gamma$ και το σημείο A). Να αποδείξετε ότι:

α) Τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά. (Μονάδες 10)

β) Η περίμετρος του τριγώνου $M\Delta E$ είναι ίση με την περίμετρο του τριγώνου $AB\Gamma$.

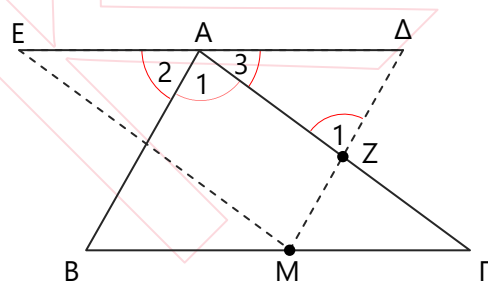
γ) Όταν ένας καθηγητής έθεσε στους μαθητές του το ερώτημα αν τα σημεία Δ, A, E είναι συνευθειακά, ένας από αυτούς έκανε το παρακάτω σχήμα και απάντησε ως εξής:

$\hat{Z}_1 = \hat{A}_1$ (εντός εναλλάξ των $AB \parallel MD$ που τέμνονται από AZ)

$\hat{A}\hat{\Delta}Z = \hat{A}_2$ (εντός εκτός και επί τα αυτά μέρη των $AB \parallel MD$ που τέμνονται από ΔE)

Όμως $\hat{Z}_1 + \hat{A}_3 + \hat{A}\hat{\Delta}Z = 180^\circ$ (άθροισμα γωνιών του τριγώνου $\Delta\Delta Z$). Άρα σύμφωνα με τα προηγούμενα έχουμε: $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 + \hat{A}_3 = 180^\circ$. Οπότε Δ, E, A συνευθειακά.

Όμως ο καθηγητής είπε ότι υπάρχει λάθος στο συλλογισμό. Μπορείτε να εντοπίσετε το λάθος του μαθητή; (Μονάδες 6)



(Μονάδες 9)

1810 ⁴

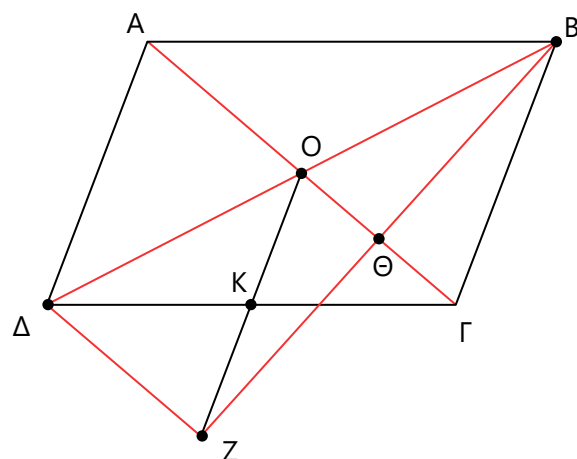
- 35.** Έστω παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το σημείο τομής των διαγώνιων του και K το μέσο του $\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε το τμήμα OK κατά τμήμα $KZ = KO$. Η BZ τέμνει τη διαγώνιο $A\Gamma$ στο Θ .

Να αποδείξετε ότι:

α) Τα τμήματα $ΟΓ$ και BZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

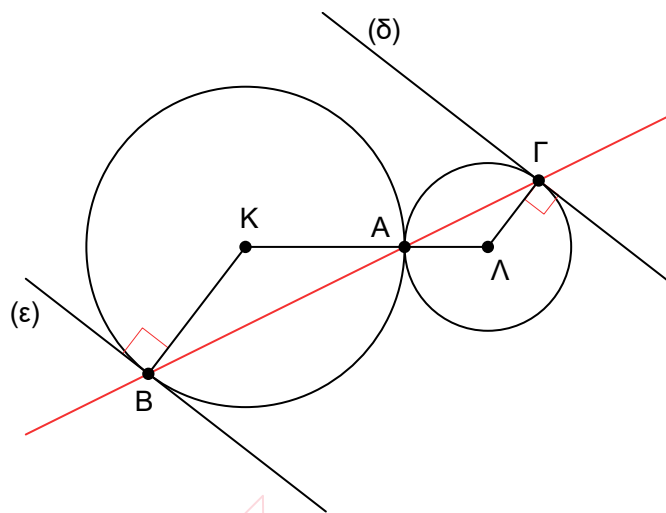
β) $AO = \Delta Z$. (Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα $\hat{A}\hat{O}\hat{B}$ και $\hat{\Delta}\hat{Z}\hat{\Gamma}$ είναι ίσα. (Μονάδες 8)



1877 ⁴

- 36.** Οι κύκλοι (K,R) , (Λ,ρ) εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο A . Φέρουμε τυχαία ευθεία η οποία διέρχεται από το A και δεν περνάει από τα κέντρα των κύκλων, τέμνει τους κύκλους αντίστοιχα στα σημεία B και Γ . Φέρουμε τις εφαπτόμενες (ϵ) και (δ) στα σημεία B και Γ .

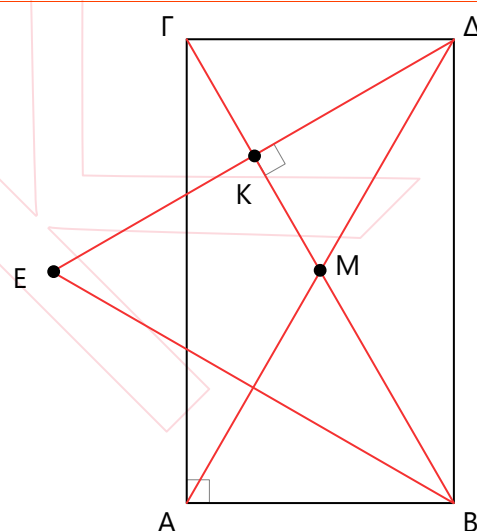


13845 ⁴

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\widehat{KBA} = \widehat{\Lambda\Gamma A}$. (Μονάδες 8)
 β) $(\epsilon) \parallel (\delta)$. (Μονάδες 10)
 γ) Να εξετάσετε σε ποια περίπτωση το τετράπλευρο $K\Gamma\Lambda B$ θα είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)

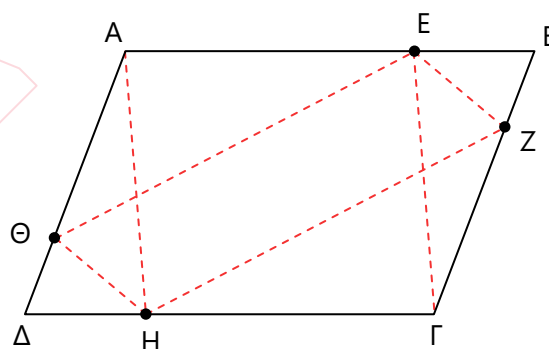
- 37.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\widehat{A} = 90^\circ$). Φέρουμε τη διάμεσο του AM την οποία προεκτείνουμε (προς το μέρος του M) κατά τμήμα $M\Delta = AM$. Θεωρούμε ευθεία ΔK κάθετη στη $B\Gamma$, η οποία τέμνει τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{B}$ στο E . Να αποδείξετε ότι:



37102 ⁴

- α) Το τετράπλευρο $AB\Delta\Gamma$ είναι ορθογώνιο (Μονάδες 8)
 β) $\widehat{KEB} = 90^\circ - \frac{\widehat{B}}{2}$. (Μονάδες 8)
 γ) $\Delta E = B\Delta$ (Μονάδες 9)

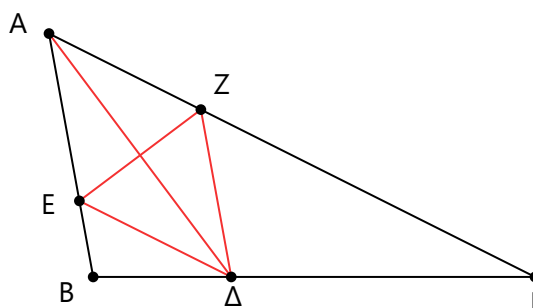
- 38.** Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημεία E , Z , H , Θ στις πλευρές AB , $B\Gamma$, $\Gamma\Delta$, ΔA αντίστοιχα, με $AE = \Gamma H$ και $BZ = \Delta\Theta$. Να αποδείξετε ότι:



37108 ⁴

- α) Το τετράπλευρο $AE\Gamma H$ είναι παραλληλόγραμμο. (6 μονάδες)
 β) Το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι παραλληλόγραμμο. (10 μονάδες)
 γ) Τα τμήματα $A\Gamma$, $B\Delta$, EH και $Z\Theta$ διέρχονται από το ίδιο σημείο. (9 μονάδες)

- 39.** Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και AD η διχοτόμος της γωνίας A , για την οποία ισχύει $AD = \Delta\Gamma$. Η ΔE είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{A\Delta B}$ και η ΔZ παράλληλη στην AB .



37117 ⁴

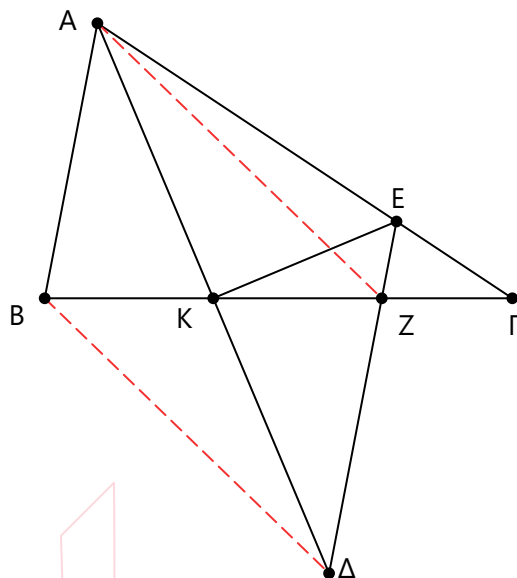
Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τμήματα $E\Delta$ και $A\Gamma$ είναι παράλληλα. (Μονάδες 9)
 β) Το τρίγωνο EAD είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
 γ) Τα τμήματα $A\Delta$ και EZ διχοτομούνται. (Μονάδες 8)

- 40.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, με AK διχοτόμο της γωνίας A . Στην προέκταση της AK θεωρούμε σημείο Δ ώστε $AK = K\Delta$. Η παράλληλη από το Δ προς την AB τέμνει τις $A\Gamma$ και $B\Gamma$ στα E και Z αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο AED είναι ισοσκελές. (Μονάδες 6)
- Η EK είναι μεσοκάθετος της AD . (Μονάδες 6)
- Τα τρίγωνα AKB και $K\Delta Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- Το τετράπλευρο $AZ\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 6)

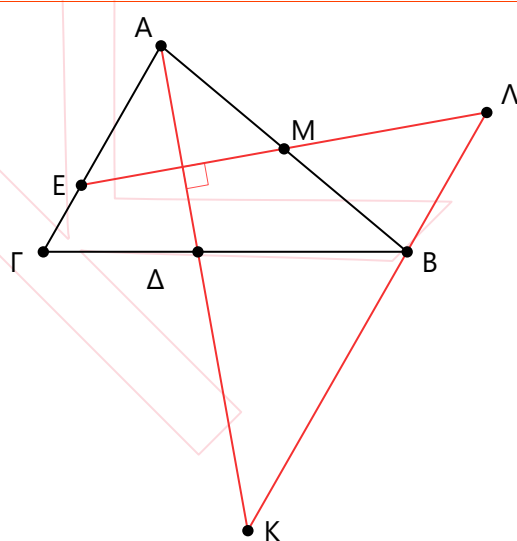


37131 ⁴

- 41.** Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$, AD η διχοτόμος της γωνίας $\hat{A}$ και M το μέσον της AB . Η κάθετη από το M στην AD τέμνει το $A\Gamma$ στο E . Η παράλληλη από το B στο $A\Gamma$ τέμνει την προέκταση της AD στο K και την προέκταση της EM στο Λ .

Να αποδείξετε ότι:

- Τα τρίγωνα AEM , $M\Lambda B$ και ABK είναι ισοσκελή. (Μονάδες 15)
- Το τετράπλευρο $A\Lambda B E$ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 10)

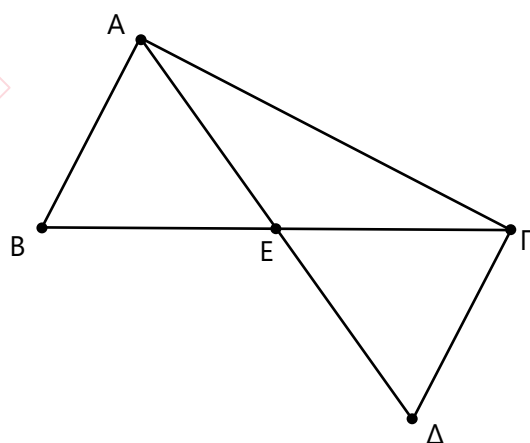


37160 ⁴

- 42.** Στο παρακάτω σχήμα φαίνονται οι θέσεις στο χάρτη πέντε χωριών A, B, Γ, Δ και E και οι δρόμοι που τα συνδέουν. Το χωριό E ισαπέχει από τα χωριά B, Γ και επίσης από τα χωριά A και Δ .

α) Να αποδείξετε ότι:

- η απόσταση των χωριών A και B είναι ίση με την απόσταση των χωριών Γ και Δ . (Μονάδες 5)
- αν οι δρόμοι AB και $\Gamma\Delta$ έχουν δυνατότητα να προεκταθούν, να αποδείξετε ότι αποκλείεται να συναντηθούν. (Μονάδες 5)
- τα χωριά B και Γ ισαπέχουν από τον δρόμο $A\Delta$.



37166 ⁴

- β) Να προσδιορίσετε γεωμετρικά το σημείο του δρόμου $A\Gamma$ που ισαπέχει από τα χωριά A και Δ . (Μονάδες 7)