

5.3-ΟΡΘΟΓΩΝΙΟ

20 θέματα

34781 ²

1. Σε ορθογώνιο ΑΒΓΔ θεωρούμε τα μέσα Μ και Ν των πλευρών του ΑΒ και ΓΔ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) $ΜΔ=ΜΓ$,

(Μονάδες 12)

β) η ευθεία που ορίζουν τα σημεία Μ και Ν είναι μεσοκάθετος του τμήματος ΓΔ. (Μονάδες 13)

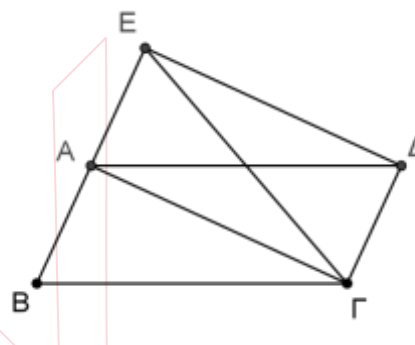
2. Στο παρακάτω σχήμα το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο και το ΑΓΔΕ είναι ορθογώνιο.

Να αποδείξετε ότι:

α) το σημείο Α είναι μέσο του ΒΕ, (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο ΒΕΓ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 9)

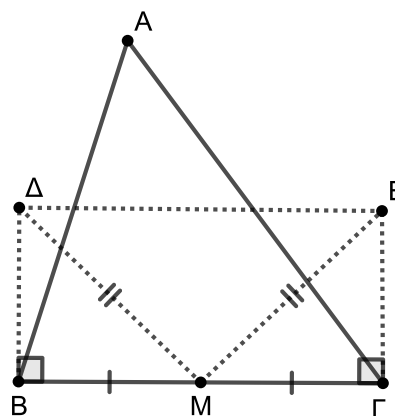
γ) $\hat{ΒΓΑ} = \hat{ΑΔΕ}$. (Μονάδες 8)

36175 ²

3. Στο σχήμα που ακολουθεί, το Μ είναι το μέσο της πλευράς ΒΓ τριγώνου ΑΒΓ, και τα τμήματα ΒΔ και ΕΓ είναι κάθετα στη ΒΓ στα σημεία Β, Γ αντίστοιχα, τέτοια ώστε $ΜΔ = ΜΕ$. Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα ΒΔ και ΓΕ είναι ίσα, (Μονάδες 13)

β) το τετράπλευρο ΒΔΕΓ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 12)

36339 ²

4. Σε κύκλο κέντρου Ο και ακτίνας ρ φέρουμε δυο διαμέτρους του ΑΒ και ΓΔ.

Να αποδείξετε ότι:

α) οι χορδές ΑΓ και ΒΔ του κύκλου είναι ίσες,

(Μονάδες 13)

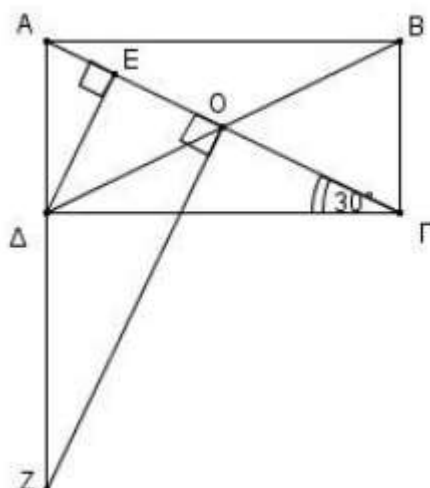
β) το τετράπλευρο με κορυφές τα σημεία Α, Γ, Β και Δ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 12)

5. Στο ορθογώνιο παραλληλόγραμμο ΑΒΓΔ είναι $\hat{ΔΓΑ} = 30^\circ$ και Ο το κέντρο του. Φέρουμε $ΔΕ \perp ΑΓ$.

α) Να αποδείξετε ότι η γωνία $\hat{ΑΔΓ}$ χωρίζεται από τη ΔΕ και τη διαγώνιο ΔΒ σε τρεις ίσες γωνίες. (Μονάδες 13)

β) Φέρουμε κάθετη στην ΑΓ στο σημείο Ο η οποία τέμνει την προέκταση της ΑΔ στο Ζ. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΖΟ και ΑΒΓ είναι ίσα. (Μονάδες 12)

1729 ⁴

6. Έστω $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ δυο κάθετες ευθείες που τέμνονται στο O και τυχαίο σημείο M του επιπέδου που δεν ανήκει στις ευθείες. 1733 4

α) Αν M_1 είναι το συμμετρικό του M ως προς την ε_1 και M_2 το συμμετρικό του M_1 ως προς την ε_2 , να αποδείξετε ότι:

I. $OM = OM_1$ (Μονάδες 6)

II. Τα σημεία M, O και M_2 είναι συνευθειακά. (Μονάδες 8)

III. Το τρίγωνο MM_1M_2 είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)

Β) Αν M_3 είναι το συμμετρικό σημείο του M_2 ως προς την ε_1 τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το $MM_1M_2M_3$; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

7. Θεωρούμε ευθεία (ε) και δυο σημεία A και B εκτός αυτής, τα οποία βρίσκονται στο ίδιο ημιπίεδο σε σχέση με την (ε) έτσι ώστε, η ευθεία AB να μην είναι κάθετη στην (ε) . Έστω A' και B' τα συμμετρικά σημεία των A και B αντίστοιχα ως προς την ευθεία (ε) . 1735 4

α) Να αποδείξετε ότι $AA' \parallel BB'$. (Μονάδες 6)

β) Αν η μεσοκάθετος του AB τέμνει την ευθεία (ε) στο σημείο K , να αποδείξετε ότι το K ανήκει και στη μεσοκάθετο του $A'B'$. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε τη σχέση της ευθείας AB με την ευθεία (ε) ώστε το τετράπλευρο $ABB'A'$ να είναι ορθογώνιο. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

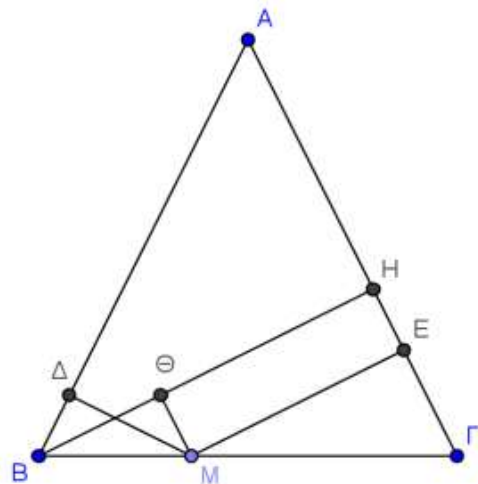
8. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$, τυχαίο σημείο M της βάσης του $B\Gamma$ και το ύψος του BH . Από το M φέρουμε κάθετες $M\Delta$, ME και $M\Theta$ στις AB , $A\Gamma$ και BH αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MEH\Theta$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)

β) $B\Theta = \Delta M$ (Μονάδες 5)

γ) Το άθροισμα $M\Delta + ME = BH$. (Μονάδες 7)



9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και σημείο Δ στην προέκταση της $B\Gamma$. Από το Δ φέρουμε ΔK κάθετη στην AB και ΔE κάθετη στην προέκταση της $A\Gamma$. Από το σημείο Γ φέρουμε ΓH κάθετη στην AB και ΓZ κάθετη στην $K\Delta$. 1816 4

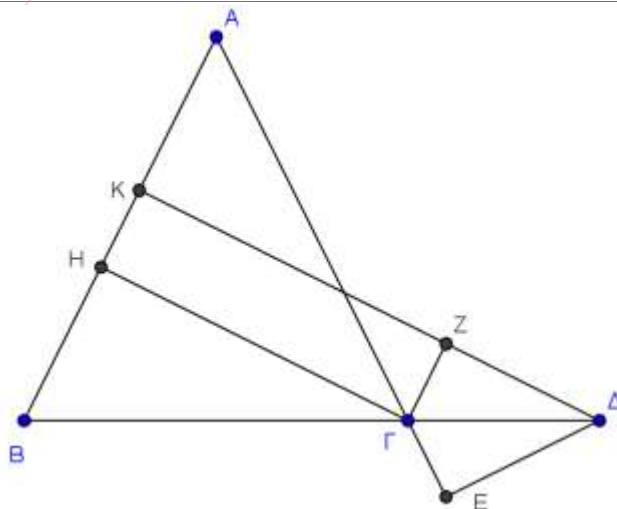
Να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία $Z\Gamma\Delta$ είναι ίση με τη γωνία B . (Μονάδες 4)

β) Η $\Gamma\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $Z\Gamma E$. (Μονάδες 4)

γ) Το τρίγωνο ΔZE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 9)

δ) $\Delta K - \Delta E = H\Gamma$ (Μονάδες 8)



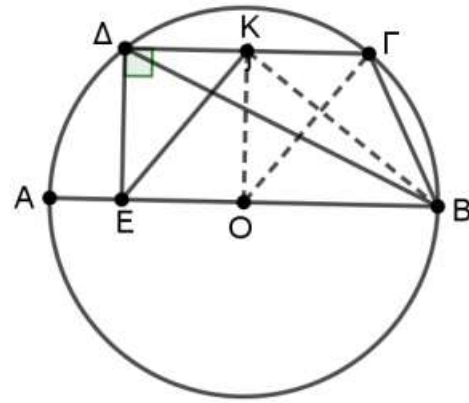
- 10.** Έστω κύκλος με κέντρο O και διάμετρο AB . Φέρνουμε χορδή $\Gamma\Delta // AB$ με K το μέσο της. Από το Δ φέρνουμε το τμήμα DE κάθετο στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $KGOE$ είναι παραλληλόγραμμο.
(Μονάδες 8)

β) $\Delta\hat{E}K = \frac{\Delta\hat{O}\Gamma}{2}$ (Μονάδες 12)

- γ) $KE < KB$. (Μονάδες 5)



1879 ⁴

- 11.** Δίνονται δυο κύκλοι (K, ρ_1) και (Λ, ρ_2) που εφάπτονται εξωτερικά σε σημείο A . Έστω ότι μια ευθεία (ϵ) εφάπτεται εξωτερικά στους δυο κύκλους σε σημεία τους B και Γ αντίστοιχα και ότι η εσωτερική εφαπτομένη (ζ) των κύκλων στο σημείο επαφής τους A τέμνει την ευθεία (ϵ) σε σημείο M .

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. οι ευθείες KB και ΛM τέμνονται σε σημείο, έστω Δ . (Μονάδες 10)
ii. το τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 10)

γ) Με ποια σχέση πρέπει να συνδέονται οι ακτίνες ρ_1 και ρ_2 των δύο κύκλων ώστε το ισοσκελές τρίγωνο $\Delta K\Lambda$ να είναι ορθογώνιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)

13699 ⁴

- 12.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και η διάμέσός του AD . Στην προέκταση της διαμέσου AD προς το Δ παίρνουμε σημείο E , έτσι ώστε $AD = \Delta E$.

α) Να αποδείξετε ότι :

- i. Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $E\Gamma\Delta$ είναι ίσα. (Μονάδες 07)
ii. Η διάμεσος AD είναι μικρότερη από το ημίθροισμα των πλευρών AB και $A\Gamma$ που την περιέχουν. (Μονάδες 08)

β) Αν στο τρίγωνο $AB\Gamma$ το διπλάσιο της διαμέσου AD ισούται με την πλευρά $B\Gamma$, να χαρακτηρίσετε το είδος του τετράπλευρου $ABE\Gamma$ και το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ και να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)

13746 ⁴

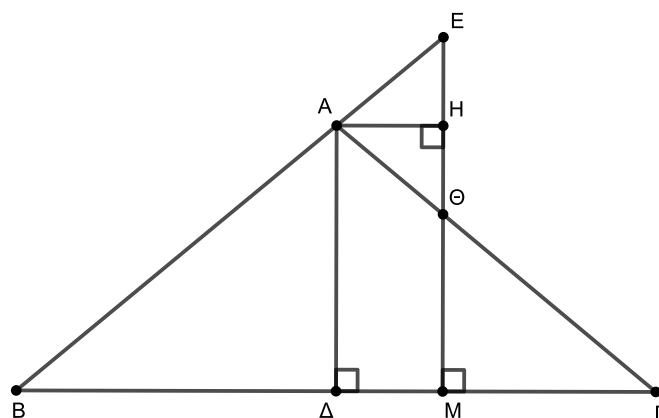
- 13.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$), και τυχαίο σημείο M της πλευράς $B\Gamma$. Από το σημείο M φέρουμε ευθεία κάθετη στην πλευρά $B\Gamma$ που τέμνει τις ευθείες AB και $A\Gamma$ στα σημεία E και Θ αντίστοιχα. Αν AD και AH τα ύψη των τριγώνων $AB\Gamma$ και $A\Theta E$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta\hat{A}H = 90^\circ$. (Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Theta E$ είναι ισοσκελές.
(Μονάδες 8)

γ) $M\Theta + ME = 2AD$.

(Μονάδες 9)



14887 ⁴

- 14.** Έστω κύκλος κέντρου O και $ΑΓ$ μια διάμετρος του. Θεωρούμε δυο ίσες χορδές $ΑΔ$, $ΒΓ$ και χορδές $ΔΓ$, $ΑΒ$ τέτοιες ώστε να είναι κάθετες στις $ΑΔ$, $ΒΓ$ αντίστοιχα. Έστω $Κ$ και $Λ$ τα μέσα των χορδών $ΔΓ$ και $ΒΓ$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) οι χορδές $ΑΒ$ και $ΔΓ$ είναι παράλληλες,
(Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο $ΑΒΓΔ$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο,

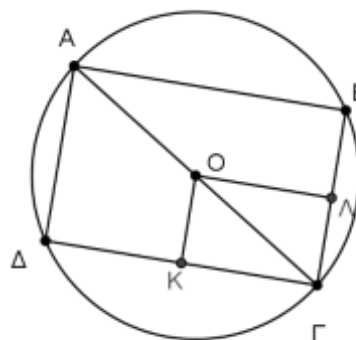
(Μονάδες 7)

γ) η $ΒΔ$ είναι διάμετρος του κύκλου,

(Μονάδες 6)

δ) το τετράπλευρο $ΟΚΓΛ$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 5)



- 15.** Στην παρακάτω εικόνα φαίνεται μια κρεμάστρα τοίχου η οποία αποτελείται από έξι ίσα ευθύγραμμα κομμάτια ξύλου ($ΑΔ$, $ΒΓ$, $ΓΖ$, $ΔΗ$, $ΖΚ$, $ΗΛ$) που είναι στερεωμένα με έντεκα καρφιά ($Α$, $Β$, $Γ$, $Δ$, $Θ$, $Ε$, $Μ$, $Η$, $Κ$, $Λ$, $Ζ$). Αν το σημείο $Θ$, είναι μέσο των τμημάτων $ΑΔ$ και $ΒΓ$ ενώ το σημείο $Ε$ είναι μέσο των τμημάτων $ΓΖ$ και $ΔΗ$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ΓΗΖΔ$ είναι ορθογώνιο.

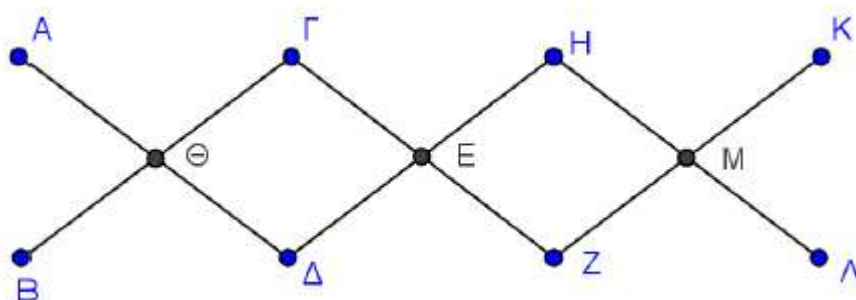
(Μονάδες 10)

β) Τα σημεία $Β$, $Δ$, $Ζ$ είναι συνευθειακά.

(Μονάδες 9)

γ) Το τετράπλευρο $ΑΓΖΔ$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 6)



- 16.** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > AD$ και οι διχοτόμοι των γωνιών του AP , BE , $\Gamma\Sigma$ και ΔT (όπου P , E στην $\Delta\Gamma$ και Σ , T στην AB) τέμνονται στα σημεία K , Λ , M και N όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο ΔEBT είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 7)

β) το τετράπλευρο $K\Lambda MN$ είναι ορθογώνιο.

(Μονάδες 8)

γ) $\Lambda N \parallel AB$

(Μονάδες 5)

δ) $\Lambda N = AB - AD$

(Μονάδες 5)

