

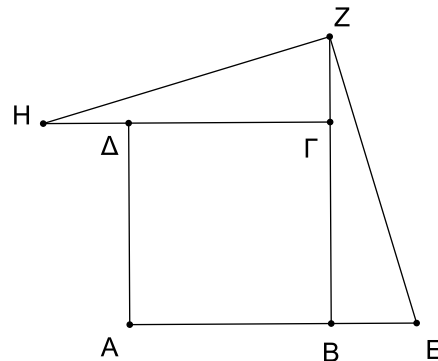
5.5-ΤΕΤΡΑΓΩΝΟ

16 θέματα

1. Δίνεται τετράγωνο ΑΒΓΔ. Στις προεκτάσεις των πλευρών ΑΒ προς το Β, ΒΓ προς το Γ και ΓΔ προς το Δ θεωρούμε σημεία Ε, Ζ και Η αντίστοιχα, ώστε $BE = \Gamma Z = \Delta H$.

α) Να αποδείξετε ότι $ZE = ZH$. (Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι $\angle EZH = 90^\circ$. (Μονάδες 10)

13536²

2. Σε κύκλο κέντρου Ο φέρουμε τις διαμέτρους του ΑΓ και ΒΔ.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)

β) Τί είδους γωνία σχηματίζουν οι διάμετροι ΑΓ και ΒΔ αν το ΑΒΓΔ είναι τετράγωνο; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

14883²

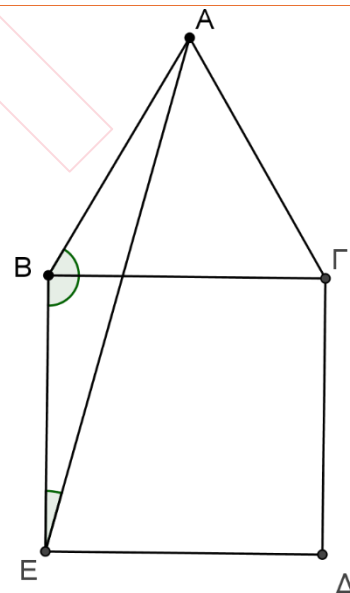
3. Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ και εκτός αυτού κατασκευάζουμε τετράγωνο ΒΓΔΕ.

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες :

i. $\widehat{ABE}$ (Μονάδες 8)

ii. $\widehat{BEA}$ (Μονάδες 9)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΑΕΔ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)

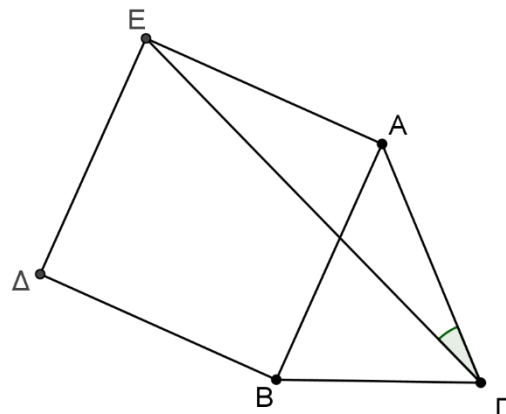
36173²

4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $AB = AG$. Κατασκευάζουμε εξωτερικά του τριγώνου το τετράγωνο ΑΒΔΕ.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο ΑΓΕ είναι ισοσκελές, (Μονάδες 10)

β) $2 \cdot \widehat{E\Gamma A} = 90^\circ - \widehat{B\Gamma A}$. (Μονάδες 15)

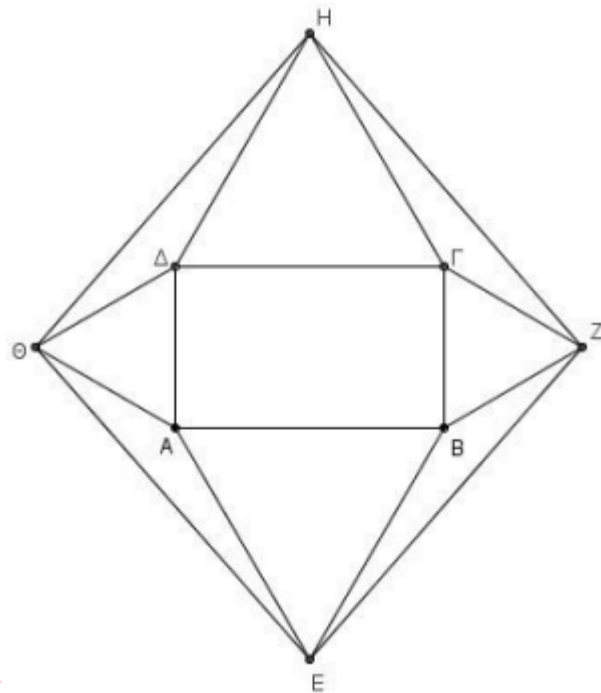
36174²

5. Δίνεται ορθογώνιο $AB\Gamma\Delta$ και έξω από αυτό, κατασκευάζουμε τέσσερα ισόπλευρα τρίγωνα ABE , $B\Gamma Z$, $\Gamma\Delta H$, $\Delta A\Theta$.

1734⁴

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EZH\Theta$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 15)

β) Αν το αρχικό τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο, τότε το $EZH\Theta$ τι είδους παραλληλόγραμμο είναι; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 10)



6. Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε την πλευρά AB κατά τμήμα BN και την πλευρά $B\Gamma$ κατά τμήμα $\Gamma M = AN$.

1750⁴

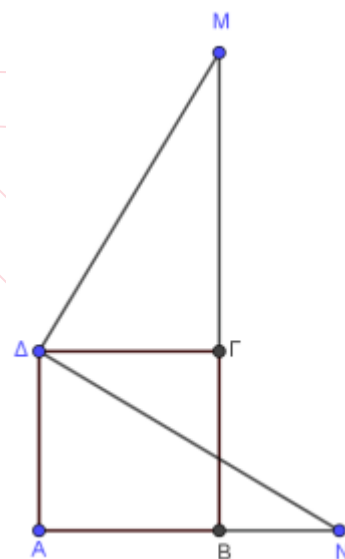
Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta N = \Delta M$

(Μονάδες 12)

β) $\Delta N \perp \Delta M$

(Μονάδες 13)



7. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ και στο εξωτερικό του σχηματίζονται τα τετράγωνα $AB\Delta E$ και $A\Gamma ZH$.

1788⁴

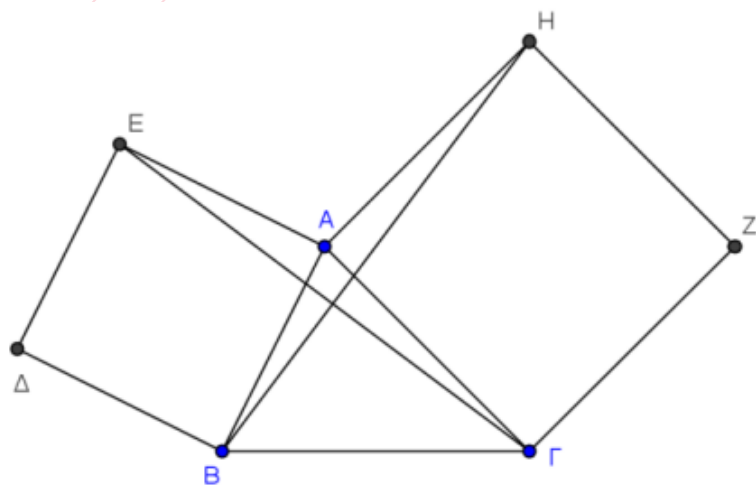
Να αποδείξετε ότι:

α) $EAH = AB\Gamma + A\Gamma B$ (Μονάδες 8)

β) $E\Gamma = BH$ (Μονάδες 9)

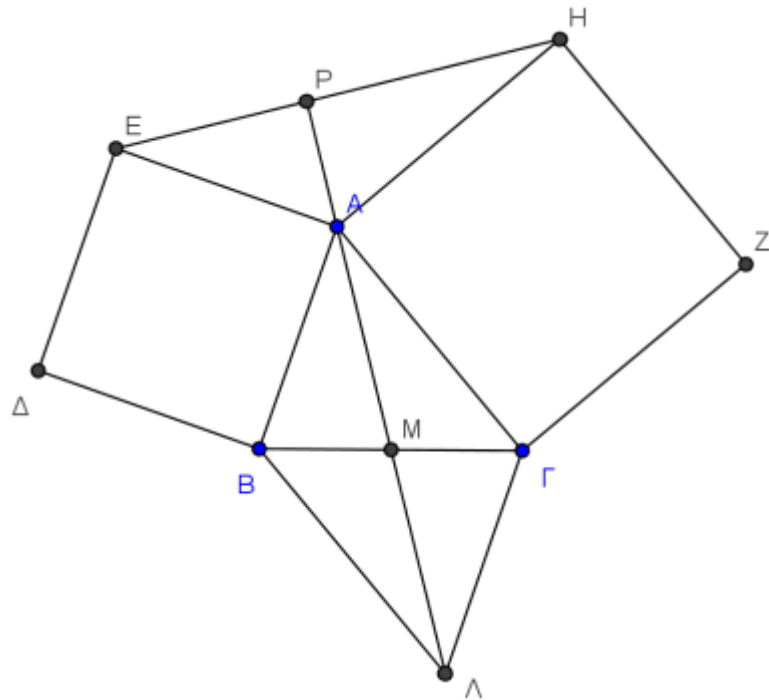
γ) Η $E\Gamma$ είναι κάθετη στη BH . (Μονάδες 8)

H



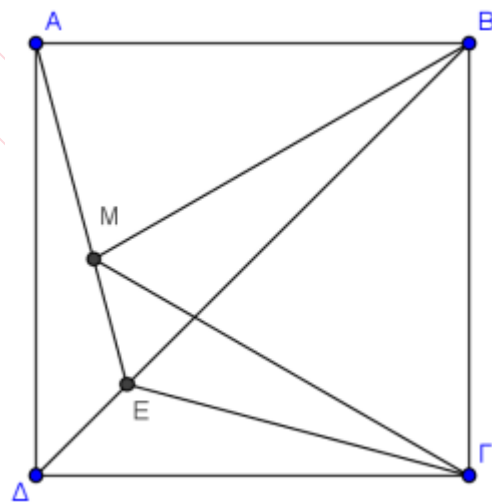
8. Εκτός τριγώνου ABΓ κατασκευάζουμε τετράγωνα ABΔΕ και ΑΓΖΗ. Αν Μ το μέσο του ΒΓ και Λ σημείο στην προέκταση της ΑΜ τέτοιο ώστε $AM = MA$, να αποδείξετε ότι:

- α) $ΓΛ = ΑΕ$. (Μονάδες 10)
 β) Οι γωνίες ΑΓΛ και ΕΑΗ είναι ίσες. (Μονάδες 10)
 γ) Η προέκταση της ΜΑ (προς το Α) τέμνει κάθετα την ΕΗ. (Μονάδες 5)



9. Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ και εντός αυτού ισόπλευρο τρίγωνο MBΓ. Αν η προέκταση της ΑΜ τέμνει την ΒΔ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι:

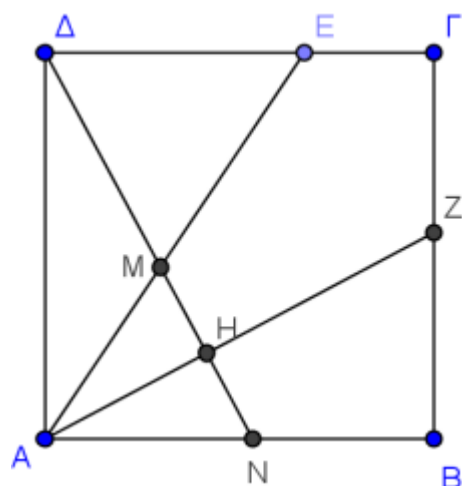
- α) $\widehat{ΔΑΕ} = 15^\circ$. (Μονάδες 8)
 β) Τα τρίγωνα ΔΑΕ και ΔΕΓ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
 γ) Η ΓΕ είναι διχοτόμος της γωνίας ΔΓΜ. (Μονάδες 9)



10. Δίνεται τετράγωνο ABΓΔ και τυχαίο σημείο Ε στην πλευρά ΔΓ. Φέρουμε τη διχοτόμο ΑΖ της γωνίας ΕΑΒ και τη ΔΗ κάθετη από το Δ προς την ΑΖ, η οποία τέμνει την ΑΕ στο Μ και την ΑΒ στο Ν.

Να αποδείξετε ότι:

- α) Τα τρίγωνα ΑΔΝ και ΑΒΖ είναι ίσα. (Μονάδες 8)
 β) $AM = AN$ και $ΔΕ = EM$. (Μονάδες 10)
 γ) $AE = ΔΕ + BZ$ (Μονάδες 7)



- 11.** Δίνεται τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Στις προεκτάσεις των πλευρών του AB και $B\Gamma$ προς το B και προς το Γ αντίστοιχα, παίρνουμε τα σημεία E και Z τέτοια ώστε $BE = \Gamma Z$. Αν P είναι το σημείο τομής των AZ και ΔE , τότε:

13744⁴

α) Να αποδείξετε ότι:

- Οι γωνίες $A\hat{E}\Delta$ και $B\hat{Z}A$ είναι ίσες.
- Τα τμήματα AZ και ΔE είναι κάθετα.

(Μονάδες 18)

β) Αν γνωρίζετε ότι το σημείο τομής P των AZ και ΔE είναι τέτοιο ώστε $PB = AB$, να προσδιορίσετε τη θέση του σημείου E στην προέκταση του τμήματος AB .

(Μονάδες 07)

- 12.** Σε τρίγωνο $AB\Gamma$, $B\Delta$ η διχοτόμος της γωνίας B και M το μέσο της. Από το σημείο Δ φέρουμε παράλληλη προς τη $B\Gamma$, η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο E . Αν η EM τέμνει τη $B\Gamma$ στο σημείο Z τότε:

13841⁴

α) Να αποδείξετε ότι $BE = E\Delta$.

(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι $BE \parallel Z\Delta$.

(Μονάδες 8)

γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΔEBZ είναι ρόμβος.

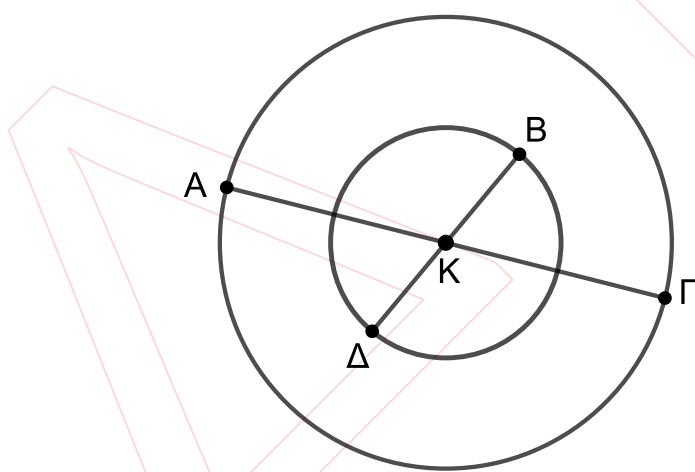
(Μονάδες 5)

δ) Ποιο θα έπρεπε να είναι το είδος του τριγώνου $AB\Gamma$ ώστε το τετράπλευρο ΔEBZ να είναι τετράγωνο; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)

- 13.** Στο παρακάτω σχήμα οι κύκλοι έχουν κέντρο K και οι $A\Gamma$ και $B\Delta$ είναι διάμετροί τους.

13848⁴



α) Αν ισχύει $A\Gamma > B\Delta$:

i. να σχεδιάσετε το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ και να αποδείξετε ότι είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

ii. να διατυπώσετε μια επιπλέον υπόθεση για τις $A\Gamma$ και $B\Delta$, ώστε το $AB\Gamma\Delta$ να είναι ρόμβος. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 9)

β) Αν οι δύο κύκλοι ταυτίζονται, τότε να εξετάσετε αν ο ακόλουθος ισχυρισμός είναι αληθής:

«Το $AB\Gamma\Delta$ είναι τετράγωνο».

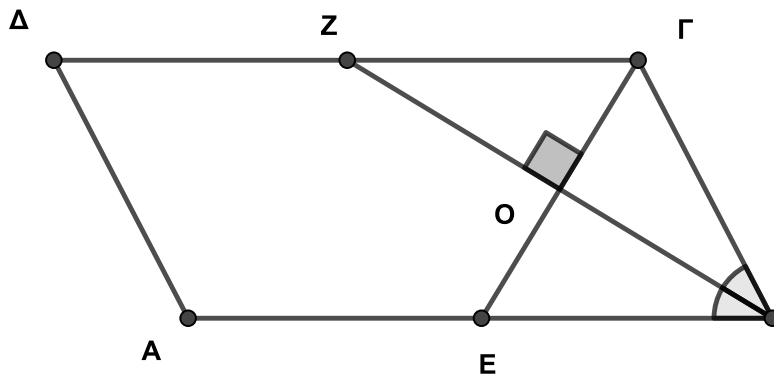
Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 8)

14. Δίνεται το παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ του σχήματος και η BZ διχοτόμος της γωνίας $\widehat{B}$. Φέρουμε GO κάθετη στη BZ και την προεκτείνουμε έτσι ώστε να τέμνει την AB στο σημείο E .

13850⁴

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $EB\Gamma$ είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)
- β) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $OZ\Gamma$ και OBE είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- γ) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ είναι ρόμβος (Μονάδες 6)
- δ) Πόσο πρέπει να είναι το μέτρο της γωνίας $\widehat{B}$ ώστε το τετράπλευρο $EB\Gamma Z$ να είναι τετράγωνο; (Μονάδες 4)



15. Δίνεται το τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$. Προεκτείνουμε την πλευρά AB προς το B κατά τμήμα BZ και την πλευρά $B\Gamma$ προς το Γ κατά τμήμα $\Gamma M = AZ$. Θεωρούμε σημείο E τέτοιο, ώστε το τετράπλευρο ΔMEZ να είναι παραλληλόγραμμο.

34336⁴

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ΔAZ και $\Gamma\Delta M$ είναι ίσα και οι γωνίες $\widehat{AZ\Delta}$ και $\widehat{M\Gamma\Delta}$ είναι ίσες, (Μονάδες 9)
- β) το τετράπλευρο ΔMEZ είναι τετράγωνο, (Μονάδες 9)
- γ) οι γωνίες $\widehat{BZE}$ και $\widehat{EMB}$ είναι παραπληρωματικές. (Μονάδες 7)

