

ΚΕΦΑΛΑΙΟ-5-ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ-ΤΡΑΠΕΖΙΑ

5.6-ΒΑΡΥΚΕΝΤΡΟ-ΤΡΙΓΩΝΟΥ 5.8-ΤΟ-ΟΡΘΟΚΕΝΤΡΟ-ΤΡΙΓΩΝΟΥ

14 θέματα

1. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και μ_β, μ_γ οι διάμεσοι του τριγώνου που αντιστοιχούν στις πλευρές β και γ αντίστοιχα. Δίνεται η ακόλουθη πρόταση: **1706** 4

Π: Αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $\beta = \gamma$, τότε οι διάμεσοι μ_β, μ_γ είναι ίσες.

α) Να εξετάσετε αν ισχύει η πρόταση **Π**, αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

β) Να διατυπώσετε την αντίστροφη πρόταση της **Π** και να εξετάσετε αν ισχύει αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 10)

γ) Στην περίπτωση που οι δυο προτάσεις, η **Π** και η **αντίστροφή της** ισχύουν, να τις διατυπώσετε ως ενιαία πρόταση. (Μονάδες 5)

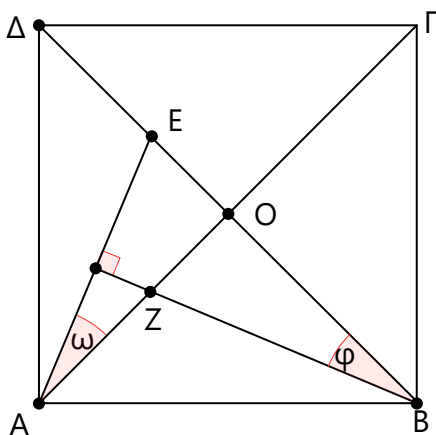
2. Στο τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ ονομάζουμε O το κέντρο του και θεωρούμε τυχαίο σημείο E του τμήματος OD . Φέρνουμε την κάθετη από το B στην AE , που τέμνει το τμήμα AO στο Z . **1748** 4

Να αποδείξετε ότι:

α) Οι γωνίες ω και φ του παρακάτω σχήματος είναι ίσες. (Μονάδες 6)

β) $BZ=AE$ και $\Gamma Z=BE$ (Μονάδες 12)

γ) Το τμήμα EZ είναι κάθετο στο AB . (Μονάδες 7)



3. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ και το ύψος του AD . Στο AD θεωρούμε σημείο H τέτοιο ώστε $HA=HB$. Έστω ότι E είναι το σημείο τομής της BH με την AG . Φέρνουμε την AZ κάθετη στην BE , η οποία τέμνει την πλευρά $B\Gamma$ στο Θ .

1754 4

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα $H\Delta B$ και HZA είναι ίσα.

(Μονάδες 6)

ii. $\Delta\Theta = \Theta Z$.

(Μονάδες 6)

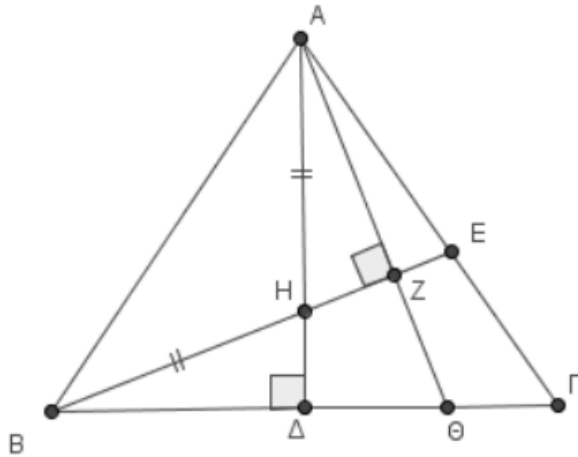
iii. Η ευθεία ΘH είναι μεσοκάθετος του τμήματος AB .

(Μονάδες 6)

β) Ποιο από τα σημεία του σχήματος είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου AHB ;

Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 7)



4. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και AM το ύψος του στην πλευρά $B\Gamma$. Στην προέκταση του AM θεωρούμε τμήμα $MN=AM$. Στην προέκταση του $B\Gamma$ προς το μέρος του Γ θεωρούμε τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$.

1760 4

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $ABN\Gamma$ ρόμβος.

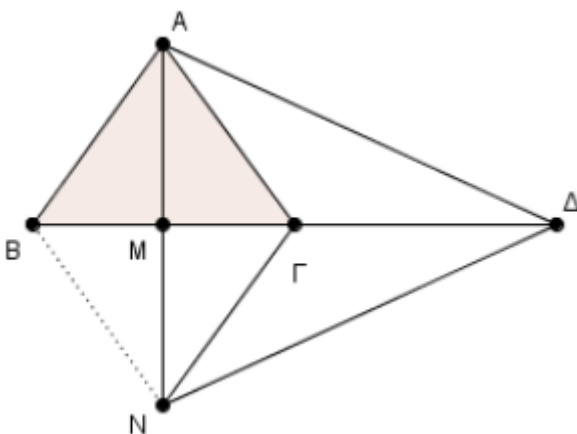
(Μονάδες 8)

β) Το τρίγωνο $A\Delta N$ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 8)

γ) Το σημείο Γ είναι το βαρύκεντρο του τριγώνου $A\Delta N$.

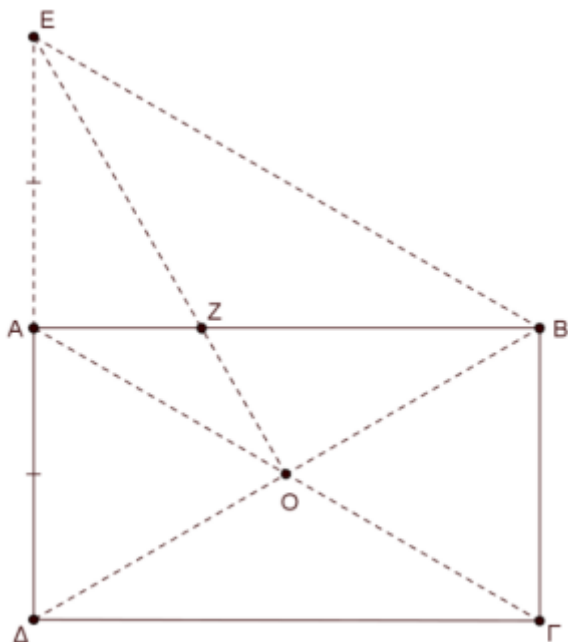
(Μονάδες 9)



5. Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ με κέντρο Ο και $ΑΓ = 2ΒΓ$. Στην προέκταση της πλευράς ΔΑ, προς το Α, παίρνουμε σημείο Ε ώστε $ΔΑ = ΑΕ$.

Να αποδείξετε ότι:

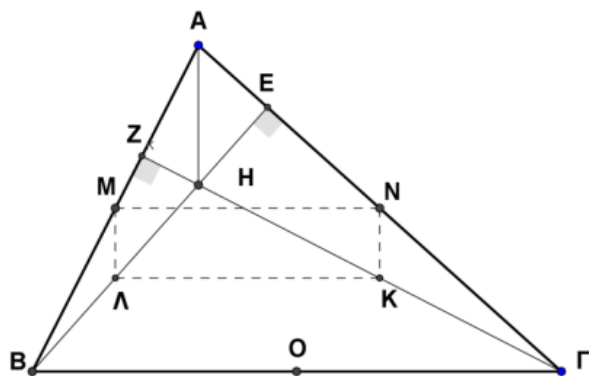
- α) Το τετράπλευρο ΑΕΒΓ είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)
 β) Το τρίγωνο ΕΒΔ είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)
 γ) Αν η ΕΟ τέμνει την πλευρά ΑΒ στο σημείο Ζ, να αποδείξετε ότι $ΔΖ \perp ΕΒ$. (Μονάδες 8)



6. Δίνονται οξυγώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, ΒΕ, ΓΖ, τα ύψη από τις κορυφές Β, Γ αντίστοιχα και Η το ορθόκεντρο του τριγώνου. Επίσης δίνονται τα Μ, Ν, Κ, Λ μέσα των ευθυγράμμων τμημάτων ΑΒ, ΑΓ, ΓΗ, ΒΗ αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

- i. $MN = AK$ (Μονάδες 6)
 ii. $NK = ML = \frac{AH}{2}$ (Μονάδες 6)
 iii. Το τετράπλευρο ΜΝΚΛ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 6)
 β) Αν το Ο είναι το μέσο της ΒΓ, να αποδείξετε ότι το $\widehat{ΜΟΚ} = 90^\circ$. (Μονάδες 7)



7. Σε τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ προεκτείνουμε τη διαγώνιο $B\Delta$ (προς το Δ) κατά τμήμα $\Delta E = \Delta B$. Έστω M το μέσο της $A\Delta$ και N το σημείο τομής των ευθειών AE και $\Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι $\Delta N = \Delta M$.

(Μονάδες 6)

β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου $NM\Delta$.

(Μονάδες 5)

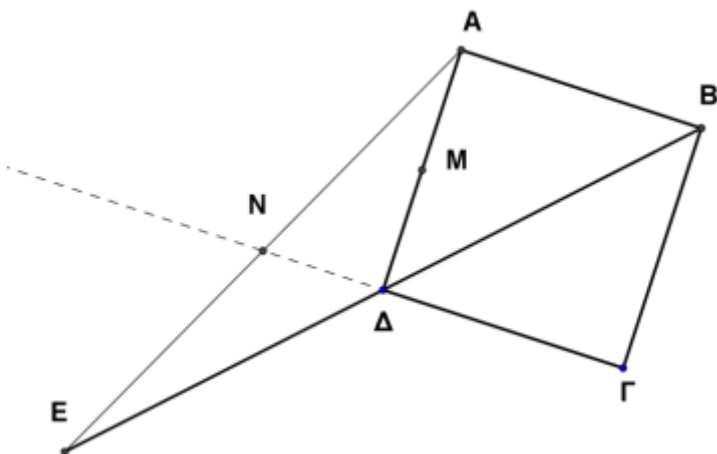
γ) Να αποδείξετε ότι:

i. $MN \perp A\Gamma$

(Μονάδες 7)

ii. $\Gamma M \perp AN$

(Μονάδες 7)



8. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και οι διάμεσοί του $A\Delta$, BE και ΓZ . Προεκτείνουμε το τμήμα ZE (προς το E) κατά τμήμα $EH = ZE$.

1820 4

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $EH\Delta B$ είναι παραλληλόγραμμο.

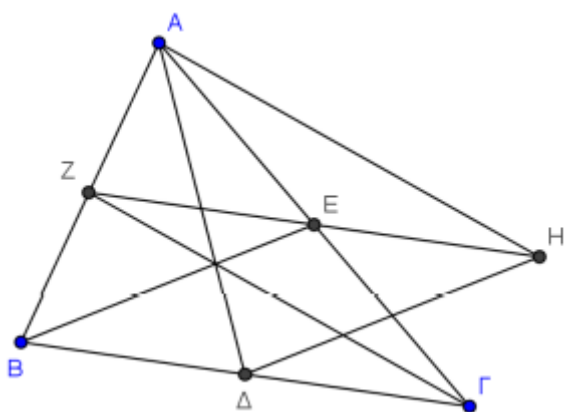
(Μονάδες 8)

β) Η περίμετρος του τριγώνου $A\Delta H$ είναι ίση με το άθροισμα των διαμέσων του τριγώνου $AB\Gamma$.

(Μονάδες 9)

γ) Οι ευθείες BE και ΔH τριχοτομούν το τμήμα $Z\Gamma$.

(Μονάδες 8)



9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και E το μέσο της διαμέσου BD . Στην προέκταση της AE θεωρούμε σημείο Z τέτοιο ώστε $EZ=AE$ και έστω Θ το σημείο τομής της AZ με την πλευρά $B\Gamma$.

1827 4

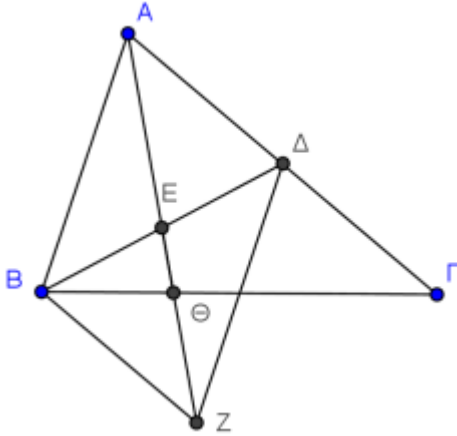
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $ABZ\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.
β) Το τετράπλευρο $B\Delta\Gamma Z$ είναι παραλληλόγραμμο.
γ) Το σημείο Θ είναι βαρύκεντρο του τριγώνου $B\Delta Z$.

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)



10. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$. Προεκτείνουμε το $B\Gamma$ (προς το Γ) κατά τμήμα $\Gamma\Delta = B\Gamma$. Φέρουμε τις διαμέσους AE και ΓZ του τριγώνου $AB\Gamma$ που τέμνονται στο Θ . Το $B\Theta$ προεκτεινόμενο, τέμνει το $A\Gamma$ στο K και το $A\Delta$ στο H .

1878 4

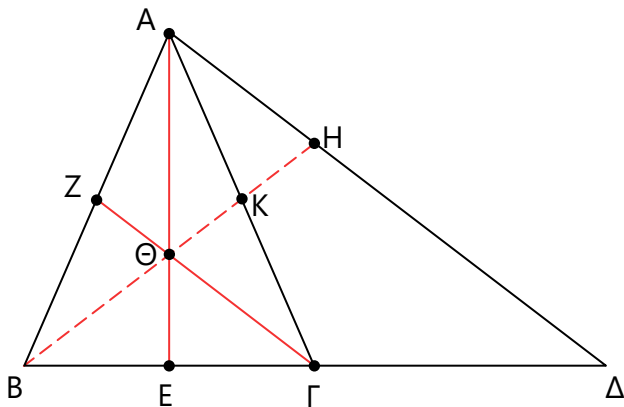
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το $ZK\Gamma E$ είναι παραλληλόγραμμο.
β) $AH = \Theta\Gamma$.
γ) $AH = 2Z\Theta$.

(Μονάδες 9)

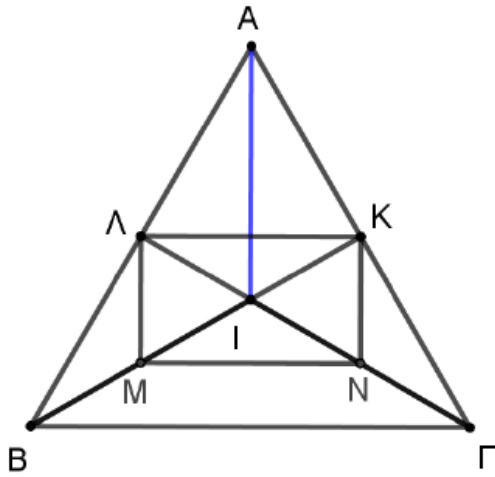
(Μονάδες 9)

(Μονάδες 7)



- 11.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$ και τα ύψη του BK και $\Gamma\Lambda$, τα οποία τέμνονται στο I . Αν M και N είναι τα μέσα των IB και $I\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι: **37087** 4

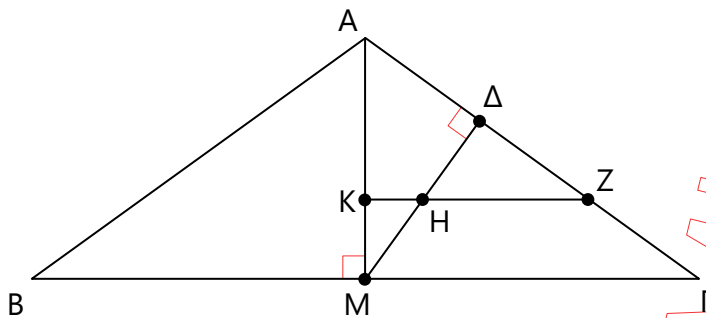
- α) Το AI προεκτεινόμενο διέρχεται από το , μέσο της πλευράς $B\Gamma$. (Μονάδες 10)
 β) Το τετράπλευρο $MLKN$ είναι ορθογώνιο παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 15)



- 12.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB = A\Gamma$ και το ύψος του AM . Φέρουμε $M\Delta$ κάθετη στην $A\Gamma$ και θεωρούμε H το μέσο του τμήματος $M\Delta$. Από το H φέρουμε παράλληλη στη $B\Gamma$ η οποία τέμνει τις AM και $A\Gamma$ στα σημεία K και Z αντίστοιχα. **37116** 4

Να αποδείξετε ότι:

- α) $HZ = \frac{B\Gamma}{4}$ (Μονάδες 9)
 β) $MZ \parallel B\Delta$ (Μονάδες 8)
 γ) Η ευθεία AH είναι κάθετη στη $B\Delta$. (Μονάδες 8)



13. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) με $B\Delta$ διχοτόμο και AK ύψος, που τέμνονται στο E . Η κάθετη από το E στην AB τέμνει τις AB και $B\Gamma$ στα H και Z αντίστοιχα. 37137 4

α) Να αποδείξετε ότι:

i. τα τρίγωνα EHA και EKG είναι ίσα.

(Μονάδες 6)

ii. το τρίγωνο BKH είναι ισοσκελές.

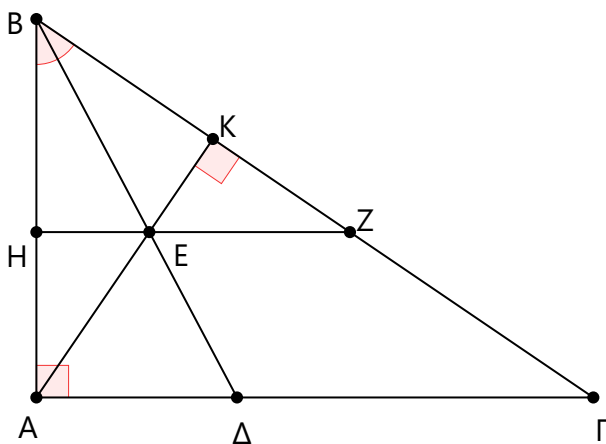
(Μονάδες 6)

iii. η $B\Delta$ είναι κάθετη στην AZ

(Μονάδες 7)

β) Αν επιπλέον το ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι και ισοσκελές, να αποδείξετε ότι η GE είναι διχοτόμος της γωνίας Γ

(Μονάδες 6)



- 14.** Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < A\Gamma$ και η διχοτόμος του $A\Delta$. Στην πλευρά $A\Gamma$ θεωρούμε σημείο E τέτοιο ώστε $AE = AB$.

37163 4

Να αποδείξετε ότι :

α) τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Delta E$ είναι ίσα.

(Μονάδες 7)

β) η ευθεία $A\Delta$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος BE .

(Μονάδες 9)

γ) αν το ύψος από την κορυφή B του τριγώνου $AB\Gamma$ τέμνει την $A\Delta$ στο H τότε η ευθεία EH είναι κάθετη στην AB .

(Μονάδες 9)

