



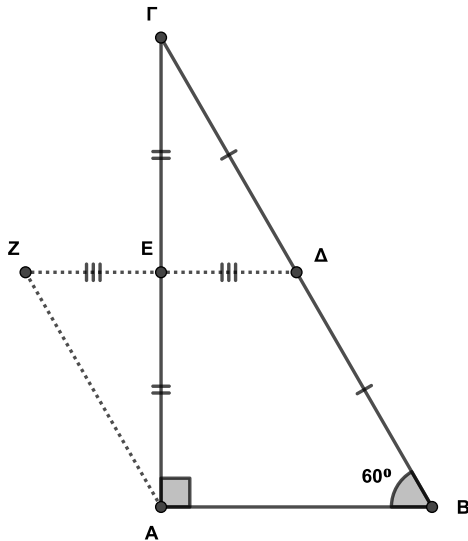
3. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$  και  $\hat{B}=60^\circ$ . Θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  που είναι τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Προεκτείνουμε την  $\Delta E$  κατά τμήμα  $EZ=DE$ .

α) Να αποδείξετε ότι  $\Gamma\Delta=AZ$ .

(Μονάδες 12)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $ZAB$  είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 13)



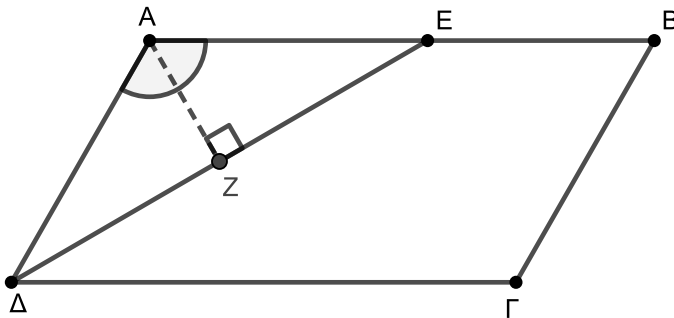
4. Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με γωνία  $\hat{A} = 120^\circ$  και  $AB=2AD$ . Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας  $\Delta$  του παραλληλογράμμου, η οποία τέμνει την  $AB$  στο  $E$ , και στη συνέχεια το κάθετο τμήμα  $AZ$  στη  $DE$ . Να αποδείξετε ότι:

α) γωνία  $\hat{A\Delta E} = 30^\circ$

(Μονάδες 10)

β)  $AZ = \frac{AB}{4}$

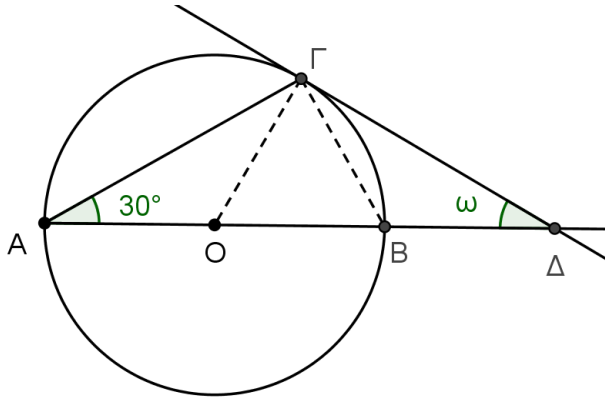
(Μονάδες 15)



5. Δίνεται κύκλος  $(O, R)$  διαμέτρου  $AB$ , και χορδή του  $A\Gamma$  τέτοια ώστε  $\widehat{B\Gamma A} = 30^\circ$ . Στο σημείο  $\Gamma$  του κύκλου φέρουμε εφαπτομένη, η οποία τέμνει την προέκταση της διαμέτρου  $AB$  (προς το  $B$ ) σε σημείο  $\Delta$ .

34313 2

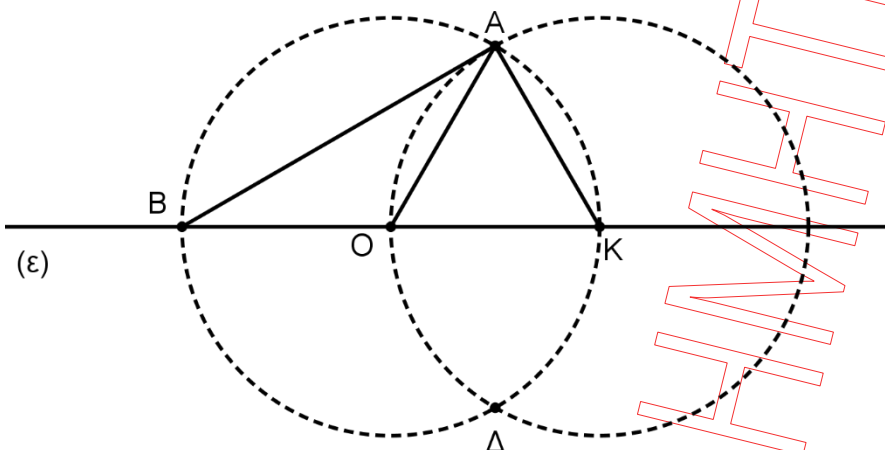
- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $\Gamma O \Delta$  είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας του  $\Gamma O \Delta$ . (Μονάδες 9)
- β) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\widehat{\omega}$ . (Μονάδες 8)
- γ) Να αποδείξετε ότι  $O\Delta = 2R$ . (Μονάδες 8)



6. Θεωρούμε δυο ίσους κύκλους  $(O, \rho)$  και  $(K, \rho)$  τεμνόμενους στα σημεία  $A$  και  $\Delta$ , με τα κέντρα τους  $O$  και  $K$  να βρίσκονται σε ευθεία  $(\varepsilon)$  που τέμνει τον κύκλο  $(O, \rho)$  σε σημείο  $B$ , και τη διάκεντρό τους  $OK$  να είναι ίση με  $\rho$ .

34314 2

- α) Να αποδείξετε ότι:
- το τρίγωνο  $OAK$  είναι ισόπλευρο, (Μονάδες 7)
  - το τρίγωνο  $ABK$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 9)
- β) Να υπολογίσετε τη γωνία  $ABK$ . (Μονάδες 9)



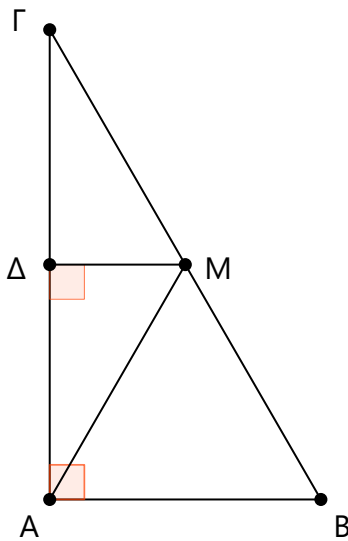
7. Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με  $B\Gamma = 8$  cm. Έστω  $AM$  είναι διάμεσος του τριγώνου και  $M\Delta \perp A\Gamma$ . Αν η γωνία  $\hat{A}M\Gamma$  είναι ίση με  $120^\circ$ , τότε:

α) Να δείξετε ότι  $AB = 4$  cm.

(Μονάδες 12)

β) Να βρείτε το μήκος της  $M\Delta$ .

(Μονάδες 13)



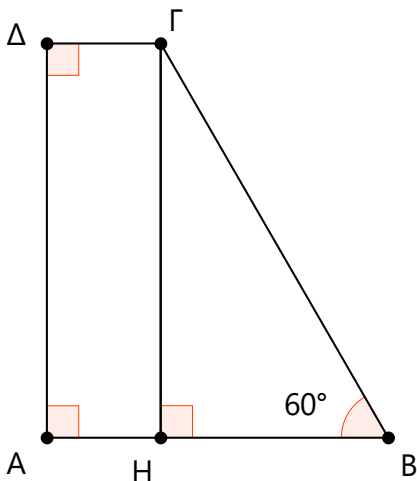
8. Δίνεται τετράπλευρο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{A} = \hat{\Delta} = 90^\circ$ ,  $AB > \Gamma\Delta$ ,  $B\Gamma = 4$  ΔΓ και  $\hat{B} = 60^\circ$  και  $\Gamma H \perp AB$ . 34408 2

Να αποδείξετε ότι:

α)  $HB = 2\Delta\Gamma$ ,

(Μονάδες 12)

β) το τετράπλευρο  $AH\Gamma\Delta$  είναι ορθογώνιο με  $AH = \frac{1}{2} HB$ .



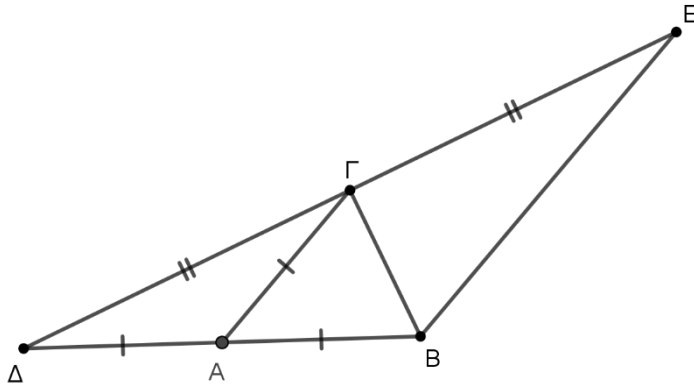
(Μονάδες 13)

9. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Στην προέκταση της  $BA$  (προς το μέρος της κορυφής  $A$ ) παίρνουμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AB = A\Delta$  και στην προέκταση της  $\Delta\Gamma$  (προς το μέρος της κορυφής  $\Gamma$ ) παίρνουμε σημείο  $E$  ώστε  $\Delta\Gamma = \Gamma E$ . 34411 2

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $\Delta\Gamma B$  είναι ορθογώνιο, (Μονάδες 12)

β)  $A\Gamma \parallel BE$  και  $A\Gamma = \frac{BE}{2}$ . (Μονάδες 13)

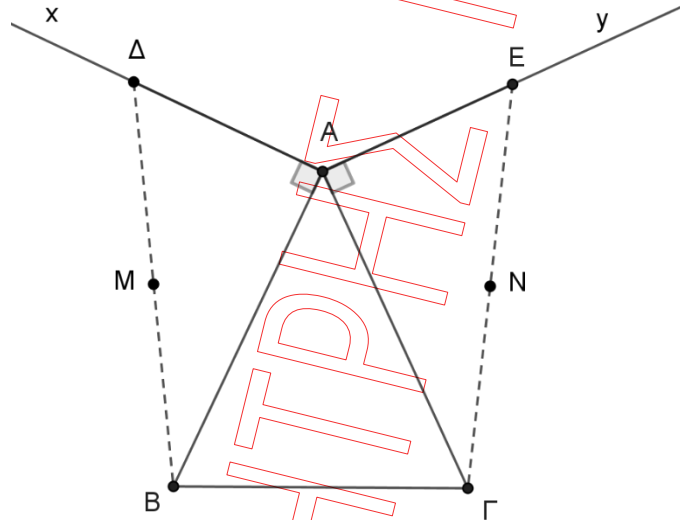


10. Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Φέρουμε, εκτός του τριγώνου, τις ημιευθείες  $Ax$  και  $Ay$  τέτοιες ώστε  $Ax \perp AB$  και  $Ay \perp A\Gamma$ , όπως στο σχήμα που ακολουθεί. Στις  $Ax$  και  $Ay$  θεωρούμε τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα, ώστε  $A\Delta = AE$ . 34420 2

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .

(Μονάδες 12)

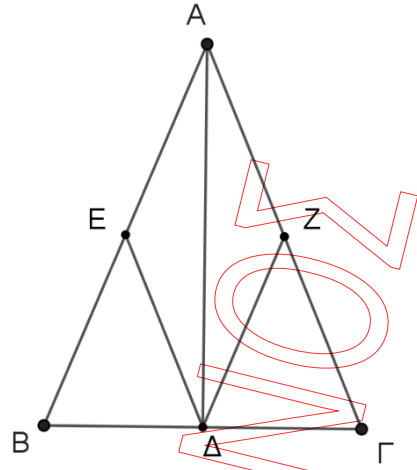
β) Αν  $M$  και  $N$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AMN$  είναι ισοσκελές (Μονάδες 13)



11. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB=AG$ ), το ύψος του  $AD$  και τα μέσα  $E$  και  $Z$  των πλευρών του  $AB$  και  $AG$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα  $BDE$  και  $ΓΔΖ$  είναι ίσα, (Μονάδες 15)  
β) το τετράπλευρο  $AZDE$  είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



34492 2

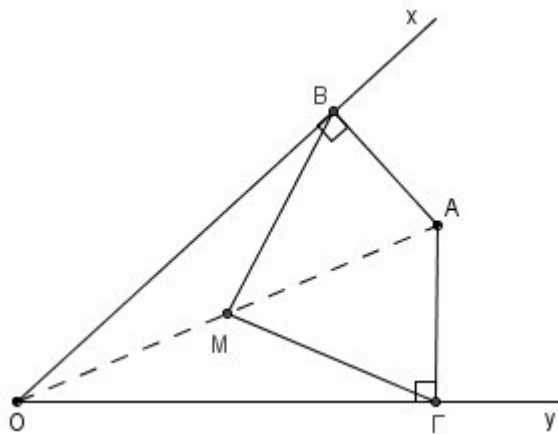
12. Δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < AG$  και γωνία  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ . Θεωρούμε το ύψος του  $AD$  και το μέσο  $Z$  της πλευράς  $AG$ .

- α) Να αποδείξετε ότι  $DZ = \frac{AG}{2}$ . (Μονάδες 12)  
β) Προεκτείνουμε το ύψος  $AD$  (προς το  $\Delta$ ) κατά ίσο τμήμα  $DE$ . Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AGE$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 13)

13. Δίνεται γωνία  $x\hat{O}y$  και σημείο  $A$  στο εσωτερικό της. Από το  $A$  φέρνουμε τις κάθετες  $AB, AG$  προς τις πλευρές  $Ox, Oy$  της γωνίας αντίστοιχα, και ονομάζουμε  $M$  το μέσο του  $OA$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο  $BMA$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 8)  
β) το τρίγωνο  $BM\Gamma$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 8)  
γ)  $B\hat{M}A = 2 \cdot x\hat{O}A$ . (Μονάδες 9)



34515 2

14. Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) με γωνία  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$  και το μέσο  $M$  της πλευράς του  $B\Gamma$ .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)  
β) Να δείξετε ότι το τρίγωνο  $AM\Gamma$  είναι ισοσκελές. (Μονάδες 8)  
γ) Να υπολογίσετε τη γωνία  $A\hat{M}\Gamma$ . (Μονάδες 9)

- 15.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Τα σημεία  $\Delta$  και  $E$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Επιπλέον ισχύουν  $AD=ED=\Delta B$  με  $AE=8$  και  $\Delta B=10$ .

36093 2

α) Να αποδείξετε ότι:

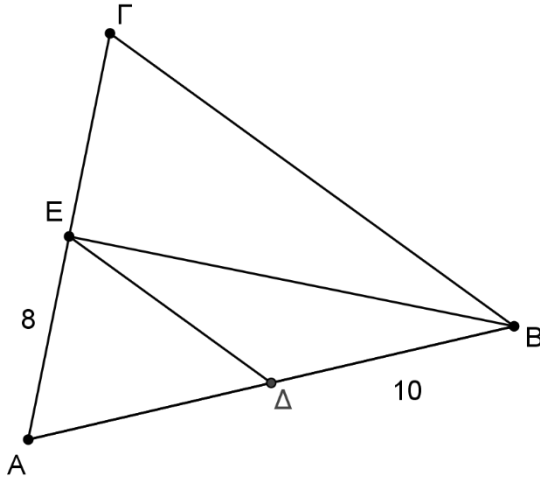
- το τρίγωνο  $AEB$  είναι ορθογώνιο,
- $B\Gamma=20$ .

β) Να υπολογίσετε την περίμετρο του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)

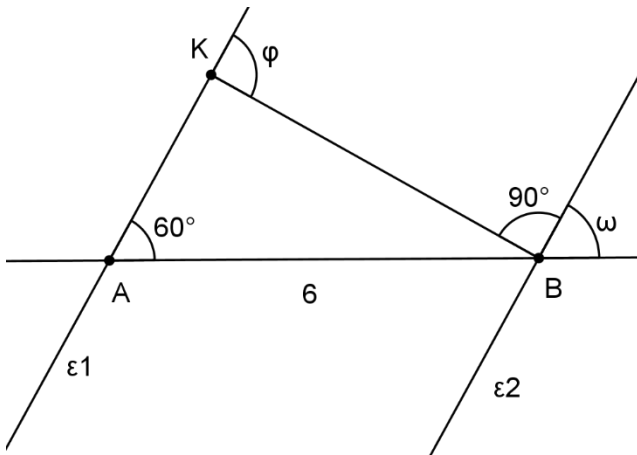
(Μονάδες 9)



- 16.** Στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες  $\varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_2$  είναι παράλληλες και  $AB=6$ .

36097 2

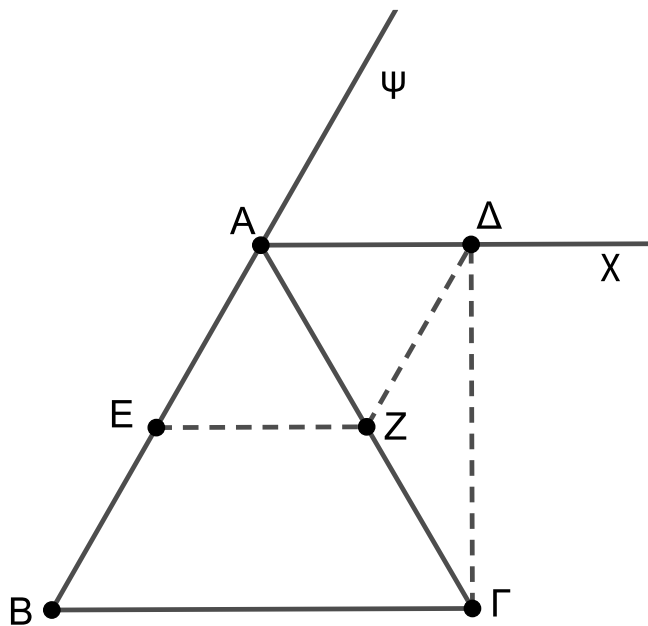
- Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\varphi$  και  $\omega$ . (Μονάδες 10)
- Να προσδιορίσετε το είδος του τριγώνου  $ABK$  ως προς τις γωνίες του. (Μονάδες 7)
- Να υπολογίσετε το μήκος της  $AK$ , αιτιολογώντας την απάντησή σας. (Μονάδες 8)



- 17.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Φέρουμε την εξωτερική διχοτόμο  $Ax$  της γωνίας  $\hat{A}$  και από το σημείο  $\Gamma$  την κάθετο  $\Gamma\Delta$  στην  $Ax$ . Τα σημεία  $E$  και  $Z$  είναι τα μέσα των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. 36103 2

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $EZ = AE = AZ$ ,  
β) η γωνία  $A\hat{\Gamma}\Delta$  είναι ίση με  $30^\circ$ ,  
γ) το τετράπλευρο  $A\Delta ZE$  είναι ρόμβος.



(Μονάδες 9)

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 6)

- 18.** Σε τρίγωνο  $AB\Gamma$  ισχύει  $\hat{A} + \hat{\Gamma} = 120^\circ$  και  $\hat{A} = 3\hat{\Gamma}$ . 36109 2

- α) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 15)  
β) Αν η πλευρά  $B\Gamma = 2\text{cm}$  να βρείτε το μήκος της  $AB$ . (Μονάδες 10)

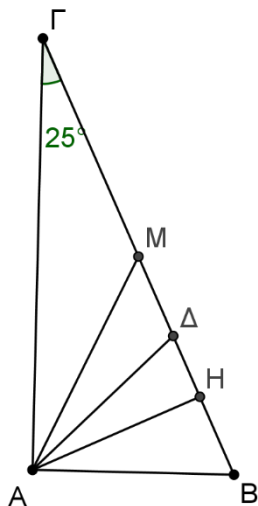
- 19.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{\Gamma} = 25^\circ$ . Δίνονται επίσης η διάμεσος  $AM$ , το ύψος  $AH$  από την κορυφή  $A$  και η διχοτόμος  $AD$  της γωνίας  $\hat{A}$ . 36111 2

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{A}MB$ ,  $\hat{H}AB$ ,  $\hat{A}DB$ .

(Μονάδες 15)

β) Να αποδείξετε ότι  $\hat{M}AD = \hat{D}AH = 20^\circ$ .

(Μονάδες 10)



- 20.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  (με  $\hat{A} = 90^\circ$ ) και η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{\Gamma}$  τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $\Delta$ , τέτοιο ώστε  $\Gamma\Delta = \Delta B = 2\text{cm}$ . 36116 2

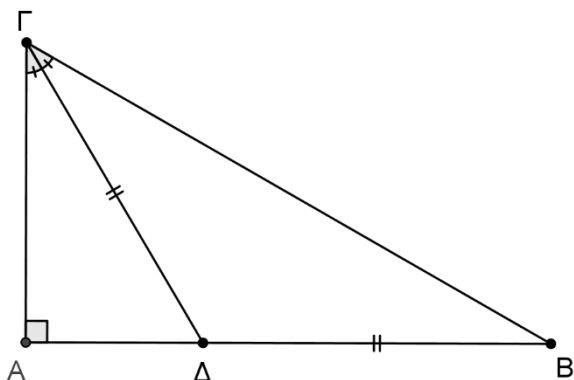
Να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{B} = 30^\circ$ .

(Μονάδες 12)

β)  $AB = 3\text{cm}$ .

(Μονάδες 13)

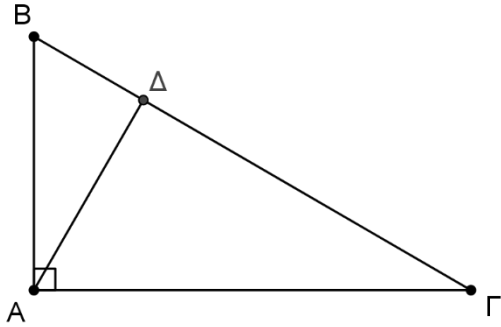


**21.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή,  $2\hat{\Gamma} = \hat{B}$  και το ύψος του  $A\Delta$ . **36171** 2

α) Να υπολογιστούν οι οξείες γωνίες του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 9)

β) Να υπολογιστεί η γωνία  $B\hat{A}\Delta$ . (Μονάδες 7)

γ) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \frac{AB}{2}$ . (Μονάδες 9)

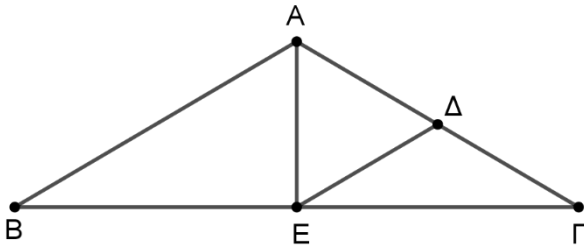


**22.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και γωνία  $\hat{B}$  ίση με  $30^\circ$ . Θεωρούμε  $\Delta$  και  $E$  τα μέσα των  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. **36224** 2

Να αποδείξετε ότι:

α) το τρίγωνο  $E\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές και να υπολογίσετε τις γωνίες του. (Μονάδες 16)

β) το τρίγωνο  $A\Delta E$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 9)



- 23.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $M$  το μέσο της  $B\Gamma$ . Φέρουμε ημιευθεία  $Ax$  παράλληλη στη  $B\Gamma$  (στο ημιεπίπεδο που ορίζει η  $AM$  με το σημείο  $\Gamma$ ).

36328 2

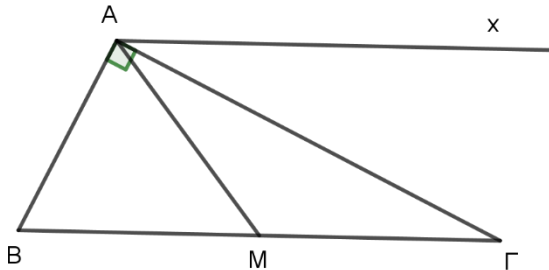
Να αποδείξετε ότι:

α)  $\hat{M}\hat{A}\hat{\Gamma} = \hat{M}\hat{\Gamma}\hat{A}$ ,

(Μονάδες 12)

β) η  $A\Gamma$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $MAx$ .

(Μονάδες 13)



- 24.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $AB = A\Gamma$ ). Στις προεκτάσεις των πλευρών  $AB$  και  $A\Gamma$  προς το  $A$  φέρνουμε τμήματα  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  κάθετα στις  $A\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα.

36350 2

α) Να αποδείξετε ότι  $B\Delta = \Gamma E$ .

(Μονάδες 10)

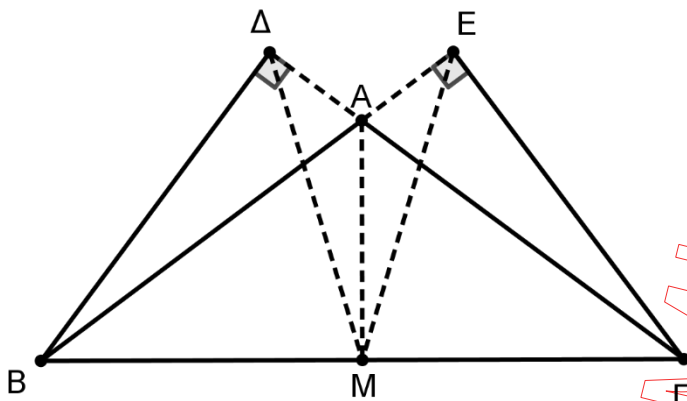
β) Αν το σημείο  $M$  είναι το μέσο της  $B\Gamma$ , τότε να αποδείξετε ότι:

i.  $M\Delta = ME$ ,

(Μονάδες 8)

ii. η  $MA$  διχοτομεί τη γωνία  $\Delta ME$ .

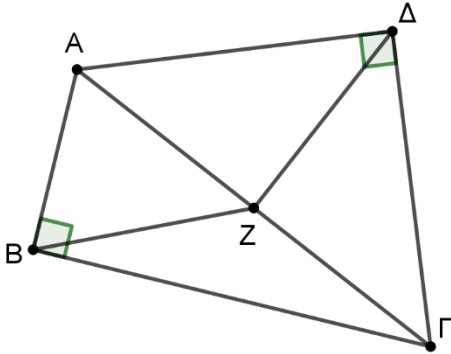
(Μονάδες 7)



- 25.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{B} = 90^\circ$  και  $Z$  το μέσο του  $AG$ . Με υποτείνουσα το  $AG$  κατασκευάζουμε ορθογώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AD\Gamma$  με  $\hat{D} = 90^\circ$  και  $DA = D\Gamma$ . 36355 2

α) Να αποδείξετε ότι  $BZ = DZ$ . (Μονάδες 13)

β) Αν είναι  $\hat{A\Gamma B} = 30^\circ$ , τότε να υπολογίσετε τις γωνίες  $\hat{B\hat{A}D}$  και  $\hat{B\hat{\Gamma}D}$ . (Μονάδες 12)



- 26.** Σε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{B} > \hat{\Gamma}$  φέρουμε το ύψος του  $AD$  και την διάμεσο  $AM$  στην πλευρά  $B\Gamma$ . 37006 2

Να αποδείξετε ότι:

α) οι γωνίες  $\hat{B}$  και  $\hat{\Gamma\hat{A}D}$  είναι ίσες, (Μονάδες 12)

β)  $\hat{A\hat{M}D} = 2 \cdot \hat{\Gamma}$ . (Μονάδες 13)

- 27.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με  $\hat{B} = 60^\circ$ . Φέρουμε τα ύψη  $AE$  και  $BZ$  του παραλληλογράμμου  $AB\Gamma\Delta$  που αντιστοιχούν στην ευθεία  $D\Gamma$ . 37007 2

Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Gamma Z = \frac{AD}{2}$ , (Μονάδες 8)

β) το τρίγωνο  $ADE$  είναι ίσο με το τρίγωνο  $B\Gamma Z$ , (Μονάδες 9)

γ) το τετράπλευρο  $ABZE$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)

- 28.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  τέτοιο, ώστε  $AG < AB$ . Στην πλευρά  $AB$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $A\Delta = A\Gamma$  και στην προέκταση της  $BA$  (προς το  $A$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $AE = A\Gamma$ . 37016 2

Να αποδείξετε ότι:

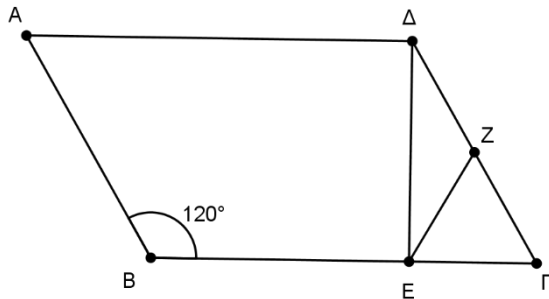
α) τα τμήματα  $D\Gamma$  και  $E\Gamma$  είναι κάθετα μεταξύ τους, (Μονάδες 12)

β) η γωνία  $\hat{E\hat{A}\Gamma}$  είναι διπλάσια της γωνίας  $\hat{A\hat{D}\Gamma}$ . (Μονάδες 13)

**29.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  είναι  $\widehat{B} = 120^\circ$  και  $\Delta E \perp B\Gamma$ . Έστω  $EZ$  η διάμεσος του τριγώνου  $\Delta E\Gamma$ .

37017 2

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{A}$  και  $\widehat{\Gamma}$  του παραλληλογράμμου. (Μονάδες 8)
- β) Αν  $K$  είναι το μέσο της πλευράς  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $EZ = AK$ . (Μονάδες 9)
- γ) Να υπολογίσετε τη γωνία  $\widehat{EZ\Gamma}$ . (Μονάδες 8)

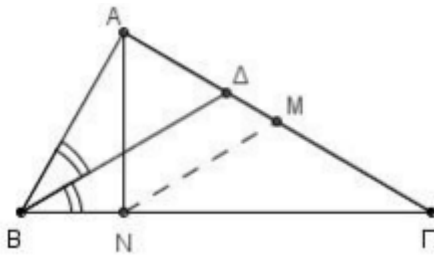


**30.** Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{A} = 90^\circ$ ) και το ύψος του  $AH$ . Ονομάζουμε  $\Delta$  και  $E$  τα συμμετρικά σημεία του  $H$  ως προς τις ευθείες  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Αν  $M$  είναι το σημείο τομής του τμήματος  $H\Delta$  με την πλευρά  $AB$  και  $N$  είναι το σημείο τομής του  $HE$  με την πλευρά  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι: 1737 4

- α)  $AH = AD = AE$ . (Μονάδες 10)
- β) Η γωνία  $\widehat{EH\Delta}$  είναι ορθή. (Μονάδες 8)
- γ) Τα σημεία  $A$ ,  $E$  και  $\Delta$  είναι συνευθειακά και  $MN = \frac{\Delta E}{2}$ . (Μονάδες 7)

**31.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\widehat{B} = 2\widehat{\Gamma}$ , και η διχοτόμος  $B\Delta$  της γωνίας  $\widehat{B}$ . Από το μέσο  $M$  της  $A\Gamma$  φέρνουμε παράλληλη στη διχοτόμο  $B\Delta$  που τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  στο  $N$ . Να αποδείξετε ότι: 1738 4

- α) Το τρίγωνο  $B\Delta\Gamma$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 5)
- β) Το τρίγωνο  $MN\Gamma$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 10)
- γ)  $AN \perp B\Gamma$  (Μονάδες 10)



- 32.** Σε παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  με γωνία  $A$  αμβλεία, ισχύει ότι  $AB=2AD$ . Τα σημεία  $E$  και  $Z$ , είναι μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $\Gamma\Delta$  αντίστοιχα. Από το  $\Delta$  φέρουμε τη  $DH$  κάθετη στην προέκταση της  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο  $AEZ\Delta$  είναι ρόμβος.  
β) Το τρίγωνο  $EZH$  είναι ισοσκελές.  
γ) Το τμήμα  $HE$ , είναι διχοτόμος της γωνίας  $Z\hat{H}\Gamma$ .

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 8)

- 33.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με γωνία  $A$  ίση με  $120^\circ$  και γωνία  $B$  είναι ίση με  $45^\circ$ . Στην προέκταση της  $BA$  προς το  $A$ , παίρνουμε τμήμα  $AD = 2AB$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε την κάθετη στην  $A\Gamma$  που την τέμνει στο σημείο  $K$ .

Να αποδείξετε ότι:

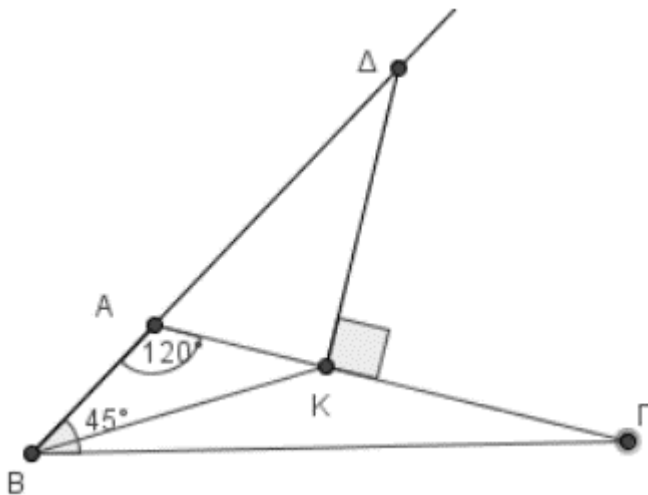
- α) Η γωνία  $A\hat{D}K$  είναι ίση με  $30^\circ$ .  
β) Το τρίγωνο  $KAB$  είναι ισοσκελές.  
γ) Αν  $Z$  το μέσο της  $DA$ , τότε  $Z\hat{K}B=90^\circ$ .  
δ) Το σημείο  $K$  ανήκει στη μεσοκάθετο του τμήματος  $B\Delta$ .

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)



- 34.** Δύο κύκλοι  $(O, \rho_1)$ ,  $(K, \rho_2)$  εφάπτονται εξωτερικά στο Ν. Μια ευθεία  $(\epsilon)$  εφάπτεται στους δύο κύκλους στα σημεία Α, Β αντίστοιχα. Η κοινή εφαπτομένη των κύκλων στο Ν τέμνει την  $(\epsilon)$  στο Μ.

1771

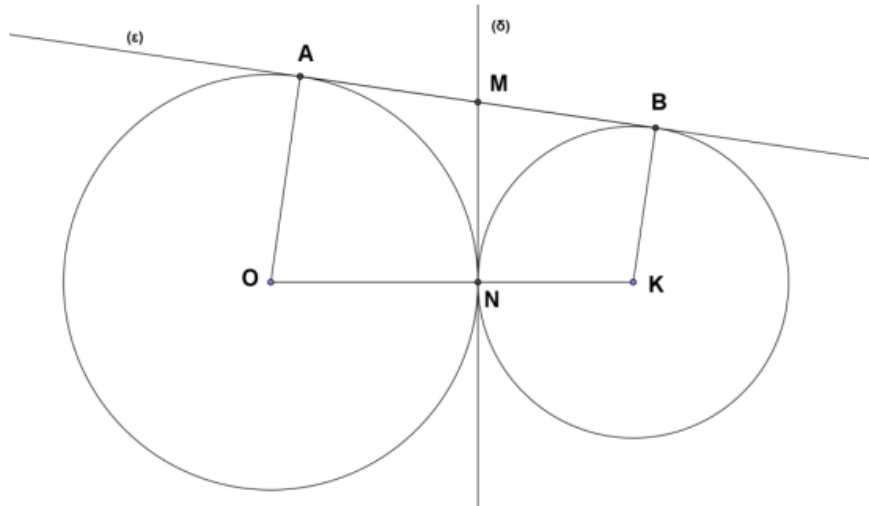
4

Να αποδείξετε ότι:

α) Το Μ είναι μέσον του ΑΒ.

β)  $\widehat{ΟΜΚ} = 90^\circ$

γ)  $\widehat{ΑΝΒ} = 90^\circ$



(Μονάδες 7)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 9)

- 35.** Δυο ίσοι κύκλοι  $(O, \rho)$  και  $(K, \rho)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο Ε. Αν ΟΑ και ΟΒ είναι τα εφαπτόμενα τμήματα από το σημείο Ο στον κύκλο  $(K, \rho)$  να αποδείξετε ότι:

1796

4

α)  $ΑΕ = ΒΕ$ .

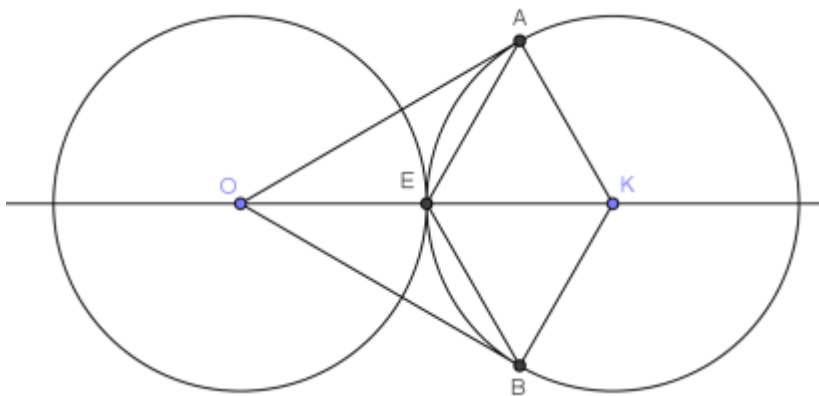
(Μονάδες 9)

β)  $\widehat{ΑΟΚ} = 30^\circ$ .

(Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο ΑΚΒΕ είναι ρόμβος.

(Μονάδες 8)



- 36.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή. Φέρουμε τη διάμεσό του  $AM$  και σε τυχαίο σημείο  $K$  αυτής φέρουμε κάθετη στην  $AM$  η οποία τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. Αν  $H$  είναι το μέσο του  $DE$  να αποδείξετε ότι:

α)  $B = BAM$ .

(Μονάδες 8)

β)  $\widehat{A\Delta H} = \widehat{\Delta\hat{A}H}$ .

(Μονάδες 9)

γ) Η ευθεία  $AH$  τέμνει κάθετα τη  $B\Gamma$ .

(Μονάδες 8)

- 37.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$  και  $\Delta, E$  τα μέσα των πλευρών του  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. Στην προέκταση της  $DE$  (προς το  $E$ ) θεωρούμε σημείο  $\Lambda$  ώστε  $E\Lambda = AE$  και στην προέκταση της  $ED$  (προς το  $\Delta$ ) θεωρούμε σημείο  $K$  τέτοιο ώστε  $\Delta K = A\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι:

α)  $K\Delta = \Lambda E$ .

(Μονάδες 6)

β) Τα τρίγωνα  $AKB$  και  $A\Lambda\Gamma$  είναι ορθογώνια,

(Μονάδες 9)

γ) Τα τρίγωνα  $AKB$  και  $A\Lambda\Gamma$  είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

- 38.** Δίνονται δυο παράλληλες ευθείες ( $\epsilon$ ) και ( $\zeta$ ), και μια τρίτη που τις τέμνει στα σημεία  $A$  και  $B$  αντίστοιχα. Θεωρούμε τις διχοτόμους των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών που σχηματίζονται, οι οποίες τέμνονται σε σημείο  $\Delta$ . Αν  $M$  είναι το μέσον του  $AB$ , να αποδείξετε ότι:

α) Η γωνία  $B\Delta A$  είναι ορθή.

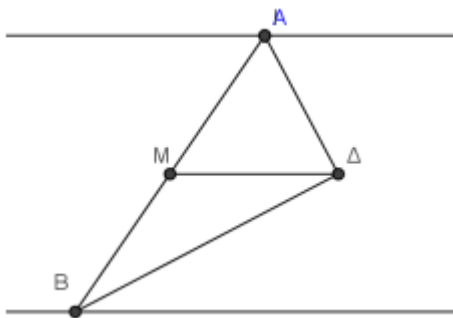
(Μονάδες 9)

β)  $\widehat{B\hat{M}\Delta} = 2 \cdot \widehat{M\hat{\Delta}A}$

(Μονάδες 8)

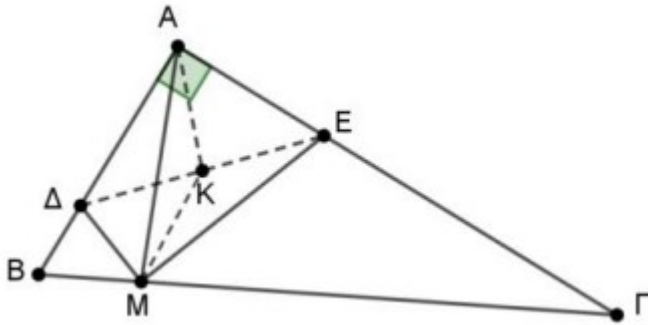
γ)  $M\Delta // \epsilon$

(Μονάδες 8)



- 39.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $M$  τυχαίο σημείο της πλευράς  $B\Gamma$ . Φέρουμε τις διχοτόμους γωνιών  $BMA$  και  $AM\Gamma$  οι οποίες τέμνουν τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $\Delta$  και  $E$  αντίστοιχα. 1812 4

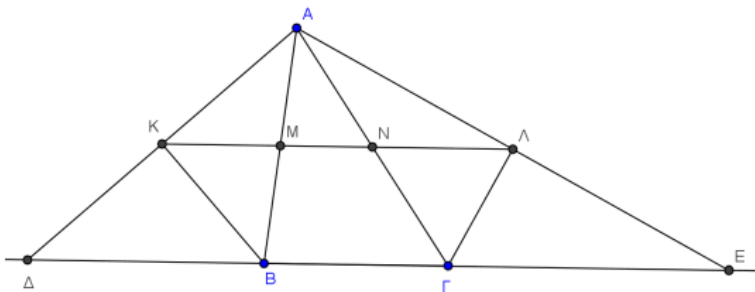
- α) Να αποδείξετε ότι, η γωνία  $\widehat{\Delta M E}$  είναι ορθή, (Μονάδες 12)  
 β) Αν  $K$  το μέσο του  $\Delta E$ , να αποδείξετε ότι  $MK = KA$  (Μονάδες 13)



- 40.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  και στην προέκταση της  $\Gamma B$  (προς το  $B$ ) θεωρούμε σημείο  $\Delta$  τέτοιο ώστε  $B\Delta = AB$  ενώ στην προέκταση της  $B\Gamma$  (προς το  $\Gamma$ ) θεωρούμε σημείο  $E$  τέτοιο ώστε  $\Gamma E = \Gamma A$ . 1824 4

Αν οι εξωτερικοί διχοτόμοι των γωνιών  $B$  και  $\Gamma$  τέμνουν τις  $A\Delta$  και  $AE$  στα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  αντίστοιχα, και η  $K\Lambda$  τέμνει τις  $AB$  και  $A\Gamma$  στα σημεία  $M$  και  $N$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι μέσα των  $A\Delta$  και  $AE$  αντίστοιχα. (Μονάδες 8)  
 β) Τα τρίγωνα  $KMA$  και  $AN\Lambda$  είναι ισοσκελή. (Μονάδες 9)  
 γ)  $K\Lambda = \frac{AB + A\Gamma + B\Gamma}{2}$  (Μονάδες 8)



- 41.** Έστω ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $\hat{B} = 60^\circ$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο  $Z$ . Τα σημεία  $M$  και  $K$  είναι τα μέσα των  $BZ$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Αν το τμήμα  $ΓΛ$  είναι κάθετο στη διχοτόμο  $B\delta$  να αποδείξετε:

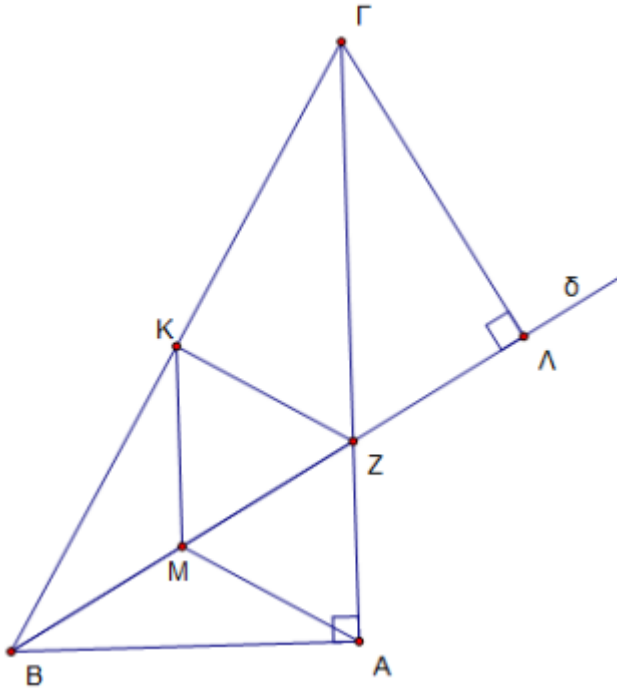
- α) Το τρίγωνο  $BZ\Gamma$  είναι ισοσκελές,  
 β) Το τετράπλευρο  $AMKZ$  είναι ρόμβος,  
 γ)  $\Gamma Z = 2 ZA$   
 δ)  $BL = A\Gamma$

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 6)



- 42.** Έστω κύκλος με κέντρο  $O$  και διάμετρο  $KL$ . Έστω  $A$  σημείο του κύκλου ώστε η ακτίνα  $OA$  να είναι κάθετη στην  $KL$ . Φέρουμε τις χορδές  $AB = A\Gamma = \rho$ . Έστω  $\Delta$  και  $E$  τα σημεία τομής των προεκτάσεων των  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα με την ευθεία της διαμέτρου  $KL$ .

**1874** 4

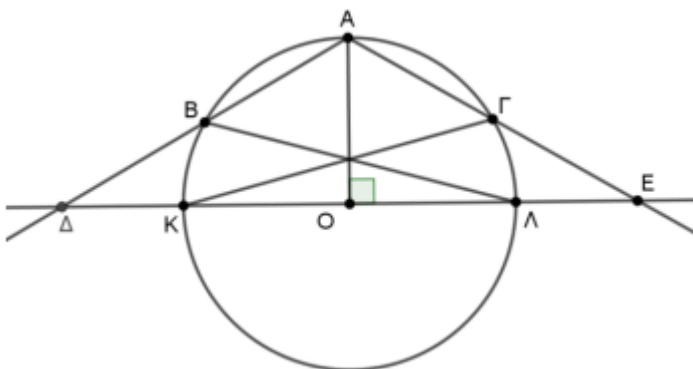
Να αποδείξετε ότι:

- α) Η γωνία  $BA\Gamma$  είναι  $120^\circ$ .  
 β) Τα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  είναι μέσα των  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα,  
 γ)  $K\Gamma = LB$ .

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 9)

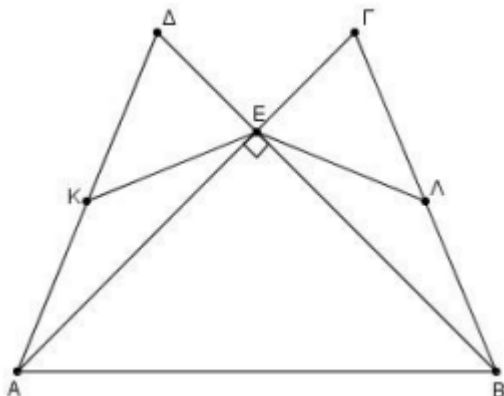
(Μονάδες 9)



- 43.** Δίνονται δυο ίσα ισοσκελή τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $AB=A\Gamma$ ) και  $AB\Delta$  ( $BA=B\Delta$ ), τέτοια ώστε οι πλευρές τους  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  να τέμνονται κάθετα στο σημείο  $E$ , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Τα σημεία  $K$  και  $\Lambda$  είναι τα μέσα των τμημάτων  $A\Delta$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- $ED=EG$ .
- $\Delta\Gamma \parallel AB$ .
- Το τρίγωνο  $EKL$  είναι ισοσκελές και  $K\Lambda \parallel AB$ .



(Μονάδες 7)

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 10)

- 44.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο  $A\Gamma B$  ( $A\Gamma=B\Gamma$ ). Φέρουμε τα ύψη του  $AK$  και  $\Gamma\Lambda$ . Αν  $E$  είναι το μέσο της πλευράς  $A\Gamma$ , να αποδείξετε ότι:

- Το τρίγωνο  $KEA$  είναι ισοσκελές,
- Η  $K\Lambda$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $BKE$ .

(Μονάδες 10)

(Μονάδες 15)

- 45.** Δίνεται κύκλος  $(O, \rho)$  και σημείο  $P$  εκτός του κύκλου. Από το  $P$  φέρνουμε τα εφαπτόμενα **13520** 4  
τμήματα  $PA$  και  $PB$ . Η  $PO$  τέμνει το μικρότερο του ημικυκλίου τόξο  $AB$  στο  $\Gamma$  και  
 $\angle APB = 60^\circ$ . Να αποδείξετε ότι:

α)  $OP = 2\rho$ .

(Μονάδες 10)

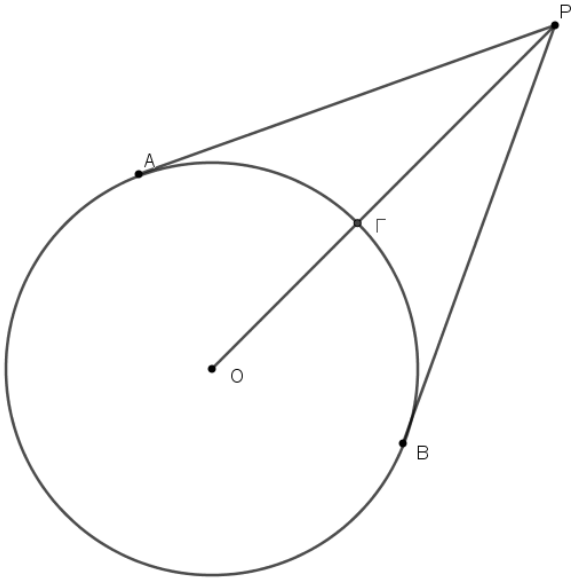
β)  $\angle A\Gamma B = 120^\circ$ .

(Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής ισχυρίζεται ότι το τετράπλευρο  $OAGB$  είναι ρόμβος.

Συμφωνείτε μαζί του; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 05)

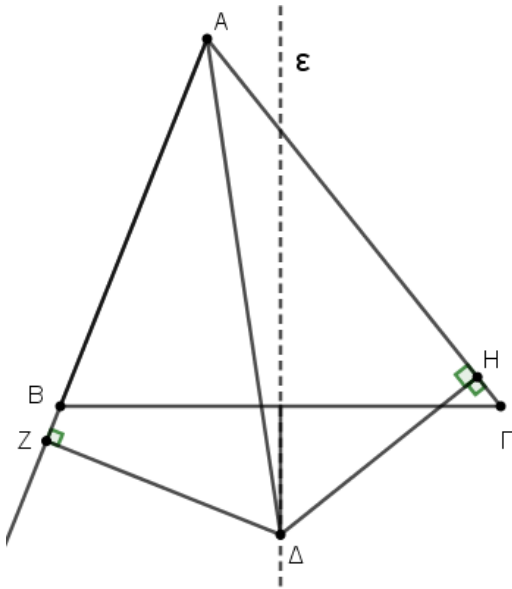


ΚΟΚΚΙΝΟ

ΔΗΜΗΤΡΙΟΣ

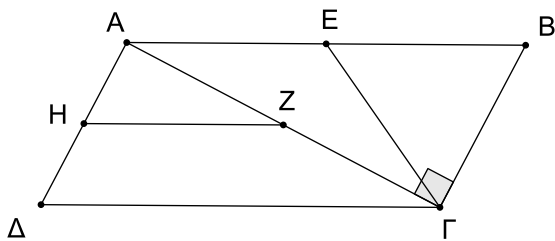
**46.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB < A\Gamma$ . Η διχοτόμος της γωνίας  $A$  τέμνει την μεσοκάθετο ( $\epsilon$ ) της  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ . Από το  $\Delta$  φέρνουμε τα κάθετα τμήματα  $\Delta Z$  και  $\Delta H$  προς τις  $AB$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα. **13522** 4

- α) Να συγκρίνετε τα τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $AH\Delta$ . (Μονάδες 08)  
 β) Να αποδείξετε ότι  $BZ = H\Gamma$ . (Μονάδες 09)  
 γ) Αν η γωνία  $A = 60^\circ$  και  $M$  το μέσο της  $A\Delta$ , να αποδείξετε ότι  $HM = Z\Delta$ . (Μονάδες 08)



**47.** Δίνεται παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$  τέτοιο, ώστε η διαγώνίός του  $A\Gamma$  να είναι κάθετη στη  $B\Gamma$ . Θεωρούμε τα μέσα  $E, Z$  και  $H$  των  $AB, A\Gamma$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα. **13540** 4

- α) Να αποδείξετε ότι:  
 i.  $\Gamma E = ZH$ . (Μονάδες 9)  
 ii. Η  $\Gamma A$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\Delta\Gamma E$ . (Μονάδες 9)  
 β) Αν  $\Delta H = \frac{AB}{4}$ , να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $B\Gamma E$  είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 7)

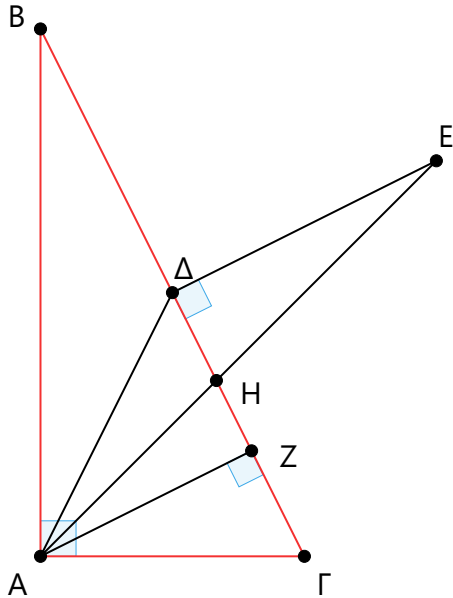


- 48.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A} = 90^\circ$  και  $AB > A\Gamma$ . Από το μέσο  $\Delta$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε κάθετη στη  $B\Gamma$  όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, η οποία τέμνει τη διχοτόμο  $AH$  της γωνίας  $\hat{A}$  στο σημείο  $E$ . Έστω  $AZ$  το ύψος στην υποτείνουσα. Να αποδείξετε ότι:

α)  $\Gamma\hat{A}Z = \Delta\hat{A}B$ .

β)  $A\Delta = \Delta E$ .

γ)  $Z\hat{A}\Delta = \hat{\Gamma} - \hat{B}$ .



(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 8)

**49.** Δίνεται ορθογώνιο ΑΒΓΔ. Προεκτείνουμε την πλευρά ΔΓ προς το μέρος του Γ κατά τμήμα ΓΕ=ΔΓ.

13851 4

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΑΓΕΒ είναι παραλληλόγραμμο.

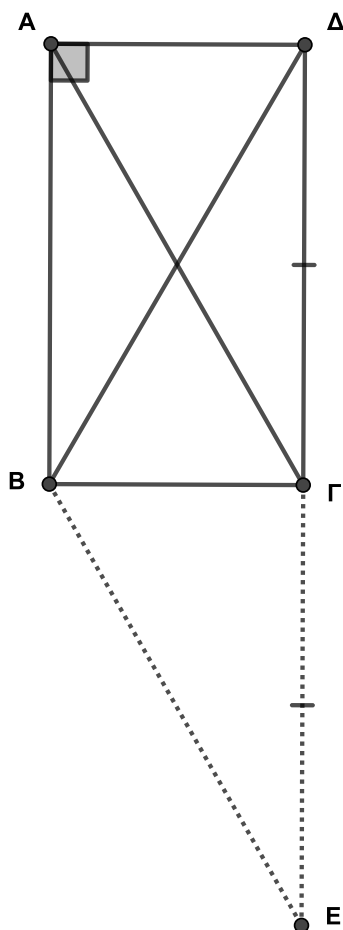
(Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ΒΔΕ είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 9)

γ) Αν  $\widehat{BDE} = 120^\circ$  να αποδείξετε ότι  $BD = 2AD$ .

(Μονάδες 9)



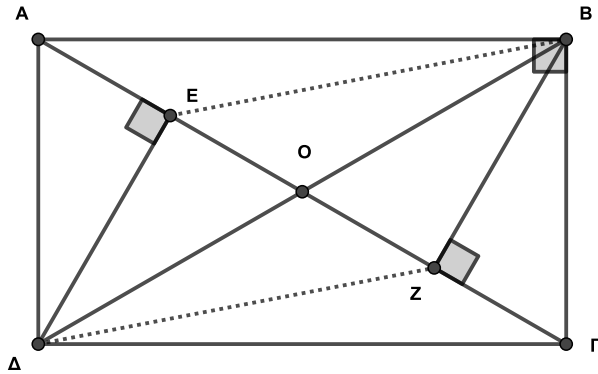
**50.** Δίνεται ορθογώνιο  $AB\Gamma\Delta$  με  $AB > AD$  και με κέντρο  $O$ . Αν  $BZ$  και  $\Delta E$  είναι οι αποστάσεις των κορυφών  $B$  και  $\Delta$  από τη διαγώνιο  $AG$ , τότε:

**13852** 4

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα  $\Delta EO$  και  $BZO$  είναι ίσα. (Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο  $EBZ\Delta$  είναι παραλληλόγραμμο. (Μονάδες 8)

γ) Αν  $\widehat{\Delta AE} = 60^\circ$  και  $OE = 5$ , να βρείτε το μήκος της πλευράς  $AD$ . (Μονάδες 12)



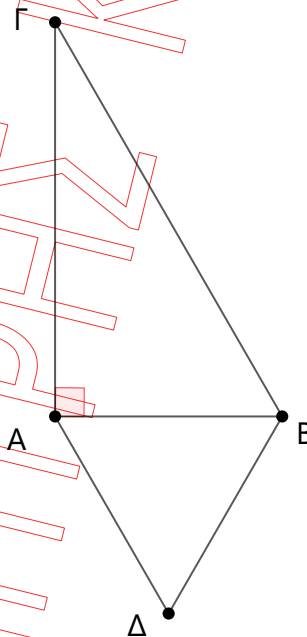
**51.** Στο παραπάνω σχήμα το τρίγωνο  $AB\Gamma$  είναι ορθογώνιο με  $\widehat{A} = 90^\circ$ . Επίσης οι  $AD$  και  $B\Gamma$  είναι παράλληλες και το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισόπλευρο.

**13853** 4

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες  $\widehat{B}$  και  $\widehat{\Gamma}$  του τριγώνου  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 8)

β) Αν η περίμετρος του  $AB\Delta$  είναι 12 να βρείτε το μήκος της υποτείνουσας του  $AB\Gamma$ . (Μονάδες 7)

γ) Αν το σημείο  $K$  είναι σημείο της υποτείνουσας τέτοιο ώστε το  $A\Delta BK$  να είναι παραλληλόγραμμο, τότε να βρείτε τη θέση του σημείου  $K$ . Τι είδους παραλληλόγραμμο είναι το  $A\Delta BK$ ; Να αιτιολογήσετε τις απαντήσεις σας. (Μονάδες 10)



**52.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $\hat{A}=90^\circ$ . Από το μέσο  $\Delta$  της πλευράς  $B\Gamma$  φέρουμε παράλληλη προς την πλευρά  $AG$  που τέμνει την πλευρά  $AB$  στο σημείο  $E$ . Αν επιπλέον γνωρίζουμε ότι  $\angle E\Delta\Gamma=120^\circ$ , τότε:

13855 4

α) Να υπολογίσετε το μέτρο της γωνίας  $\Delta\Gamma A$ .

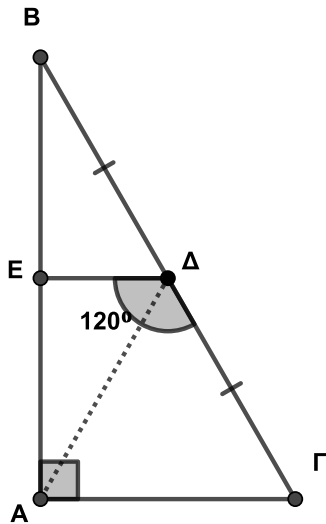
(Μονάδες 5)

β) Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο  $A\Delta\Gamma$  είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 8)

γ) Προεκτείνουμε την πλευρά  $AG$  προς το  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma Z=AG$  και την πλευρά  $B\Gamma$  προς το  $\Gamma$  κατά τμήμα  $\Gamma H=\frac{B\Gamma}{2}$ . Να αποδείξετε ότι  $\angle H\Gamma Z=90^\circ$ .

(Μονάδες 12)



**53.** Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο  $AB\Gamma\Delta$ . Από την κορυφή  $A$  φέρουμε  $AE$  κάθετη στη  $B\Delta$ . Έστω  $K, \Lambda$  τα μέσα των  $AB$  και  $A\Delta$  αντίστοιχα.

14879 4

α) Να αποδείξετε ότι :

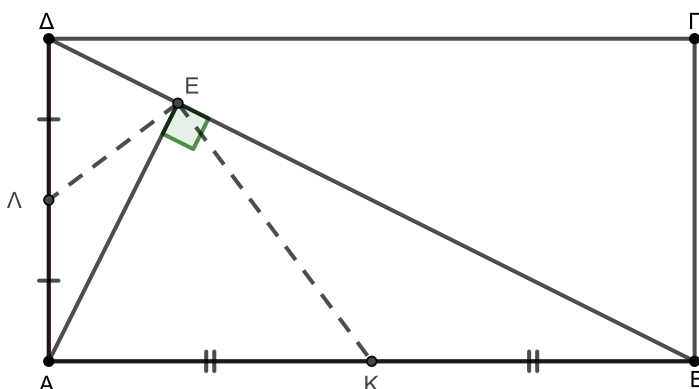
$$\angle K\hat{E}\Lambda = 90^\circ.$$

$$K\Lambda = \frac{A\Gamma}{2}.$$

(Μονάδες 16)

β) Αν  $\angle B\hat{A}\Gamma = 30^\circ$ , να αποδείξετε ότι  $K\Lambda = B\Gamma$ .

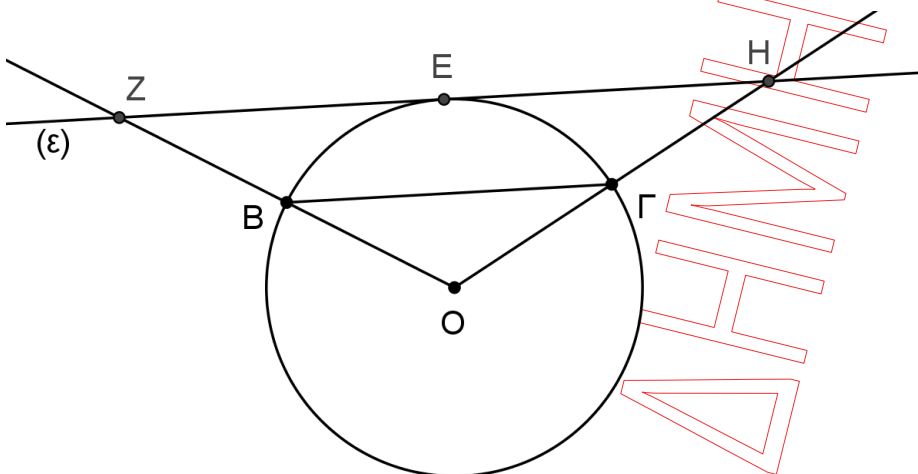
(Μονάδες 9)



- 54.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $A$  ορθή και  $AM$  η διάμεσός του. Από το  $M$  φέρουμε  $MK$  κάθετη στην  $AB$  και  $ML$  κάθετη στην  $A\Gamma$ . Αν  $N, P$  είναι τα μέσα των  $BM$  και  $\Gamma M$  αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:
- α)  $N\hat{K}M = N\hat{M}K$  (Μονάδες 7)
- β) Η  $MK$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $NMA$ . (Μονάδες 9)
- γ)  $AM = KN + LP$ . (Μονάδες 9)

- 55.** Θεωρούμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ), τα μέσα  $\Delta, E, Z$  των πλευρών του και το ύψος του  $AK$ . Αν  $\Theta$  είναι το σημείο τομής των  $AZ$  και  $\Delta E$ , τότε:
- α) Να αποδείξετε ότι:
- i. Το τετράπλευρο  $A\Delta ZE$  είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 8)
- ii.  $A\Theta = \Theta E = \frac{B\Gamma}{4}$  (Μονάδες 7)
- β) Αν επιπλέον είναι  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$ , τότε:
- i. να βρείτε τη γωνία  $A\hat{Z}B$ . (Μονάδες 5)
- ii. να αποδείξετε ότι  $BK = \frac{B\Gamma}{4}$ . (Μονάδες 5)

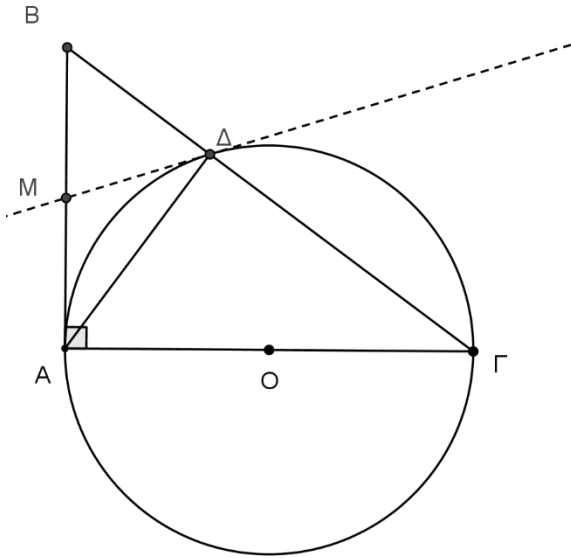
- 56.** Θεωρούμε κύκλο  $(O, \rho)$  και  $E$  το μέσο του τόξου του  $B\Gamma$ . Μια ευθεία  $(\epsilon)$  εφάπτεται στον κύκλο στο  $E$ . Οι προεκτάσεις των  $OB, O\Gamma$  (προς το  $B$  και το  $\Gamma$  αντίστοιχα) τέμνουν την ευθεία  $(\epsilon)$  στα σημεία  $Z$  και  $H$  αντίστοιχα.
- α) Να αποδείξετε ότι:
- i.  $B\Gamma \parallel (\epsilon)$  (Μονάδες 9)
- ii.  $OZ = OH$  (Μονάδες 9)
- β) Αν το σημείο  $B$  είναι το μέσο του  $OZ$ , να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $ZOH$ . (Μονάδες 7)



- 57.** Θεωρούμε ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ). Με διάμετρο την κάθετη πλευρά του  $A\Gamma$  φέρουμε κύκλο κέντρου  $O$ , ο οποίος τέμνει την πλευρά  $B\Gamma$  του τριγώνου σε σημείο  $\Delta$ . Έστω ότι η εφαπτόμενη του κύκλου στο σημείο  $\Delta$  τέμνει την πλευρά  $AB$  σε σημείο  $M$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $\hat{A}\Delta\Gamma = \hat{B}$ ,  
 β)  $\hat{M}\Delta B = 90^\circ - \hat{\Gamma}$  και το τρίγωνο  $\Delta MB$  είναι ισοσκελές,  
 γ) το  $M$  είναι το μέσο του  $AB$ .



(Μονάδες 9)

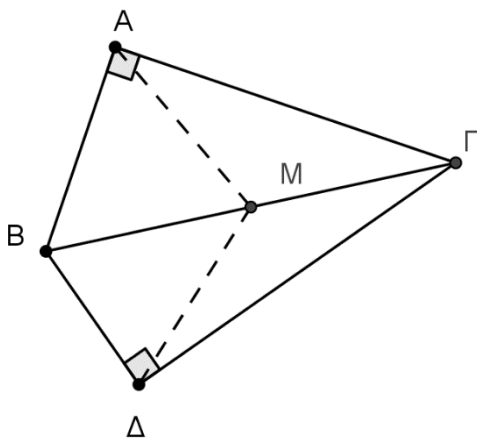
(Μονάδες 9)

(Μονάδες 7)

- 58.** Δίνονται τα ορθογώνια τρίγωνα  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\Delta B\Gamma$  ( $\hat{\Delta} = 90^\circ$ ) με τις κορυφές τους  $A$  και  $\Delta$  εκατέρωθεν της  $B\Gamma$  και το μέσο  $M$  της  $B\Gamma$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο  $AM\Delta$  είναι ισοσκελές, (Μονάδες 9)  
 β)  $\hat{A}\hat{M}\Delta = 2\hat{A}\hat{\Gamma}\Delta$ , (Μονάδες 9)  
 γ) τα  $A, B, \Delta$  και  $\Gamma$  είναι σημεία ενός κύκλου, τον οποίο και να κατασκευάσετε. (Μονάδες 7)



59. Σε οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\widehat{B} < \widehat{\Gamma}$ ) θεωρούμε τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$ ,  $Z$  των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$ ,  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Έστω  $H$  η προβολή της κορυφής  $\Gamma$  πάνω στην πλευρά  $AB$ .

Να αποδείξετε ότι:

- α)  $HE = E\Gamma$  και  $HZ = Z\Gamma$ ,  
β) το τετράπλευρο  $\Delta E\Gamma Z$  είναι παραλληλόγραμμο,  
γ)  $Z\widehat{\Delta}E = Z\widehat{H}E$ .

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

60. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα  $AB$  και στο εσωτερικό του θεωρούμε τα σημεία  $\Gamma$ ,  $\Delta$  ώστε να ισχύει  $A\Gamma = \Gamma\Delta = \Delta B$ . Επίσης θεωρούμε σημείο  $O$  εκτός του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$  έτσι ώστε να ισχύουν  $O\Gamma = A\Gamma$  και  $O\Delta = \Delta B$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. η γωνία  $\Gamma\widehat{O}\Delta$  είναι  $60^\circ$ ,

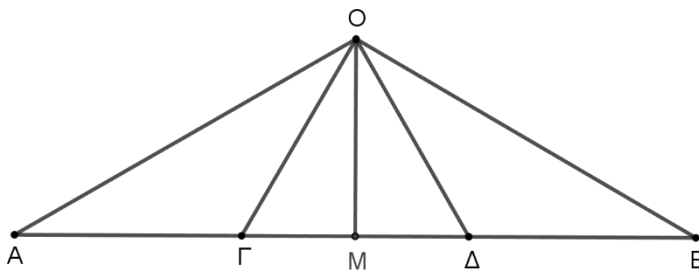
ii. οι γωνίες  $O\widehat{A}\Gamma$ ,  $O\widehat{B}\Delta$  είναι ίσες και κάθε μία ίση με  $30^\circ$ .

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 9)

β) Αν  $M$  το μέσον του ευθυγράμμου τμήματος  $AB$ , να αποδείξετε ότι  $2OM = OA$ .

(Μονάδες 7)



- 61.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται οξυγώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$ , τα ύψη του  $B\Delta$  και  $\Gamma E$  που τέμνονται στο σημείο  $H$  και το μέσο  $M$  της πλευράς  $B\Gamma$ .

37085 4

α) Να αποδείξετε ότι:

i.  $MD = ME$ ,

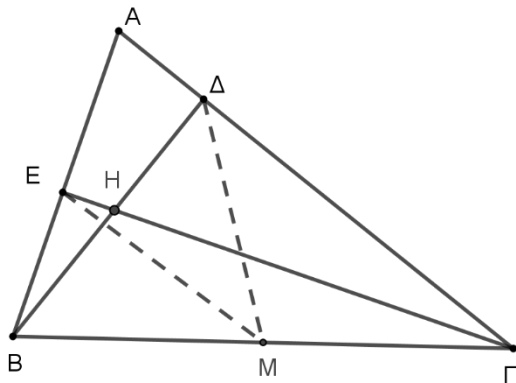
(Μονάδες 10)

ii. η ευθεία  $AH$  τέμνει κάθετα τη  $B\Gamma$  και ότι  $\widehat{A\hat{H}\Delta} = \hat{\Gamma}$ , όπου  $\hat{\Gamma}$  η γωνία του τριγώνου  $AB\Gamma$ .

(Μονάδες 5)

β) Να βρείτε το ορθόκεντρο του τριγώνου  $ABH$ .

(Μονάδες 10)



- 62.** Οι κύκλοι  $(K, \rho)$  και  $(\Lambda, 3\rho)$  εφάπτονται εξωτερικά στο σημείο  $A$ . Μία ευθεία  $(\epsilon)$  εφάπτεται εξωτερικά και στους δύο κύκλους στα σημεία  $B$  και  $\Gamma$  αντίστοιχα και τέμνει την προέκταση της διακέντρου  $K\Lambda$  (προς το  $K$ ) στο σημείο  $E$ . Φέρουμε από το σημείο  $K$  παράλληλο τμήμα στην  $(\epsilon)$  που τέμνει το τμήμα  $\Lambda\Gamma$  στο  $\Delta$ .

37088 4

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο  $B\Gamma\Delta K$  είναι ορθογώνιο,

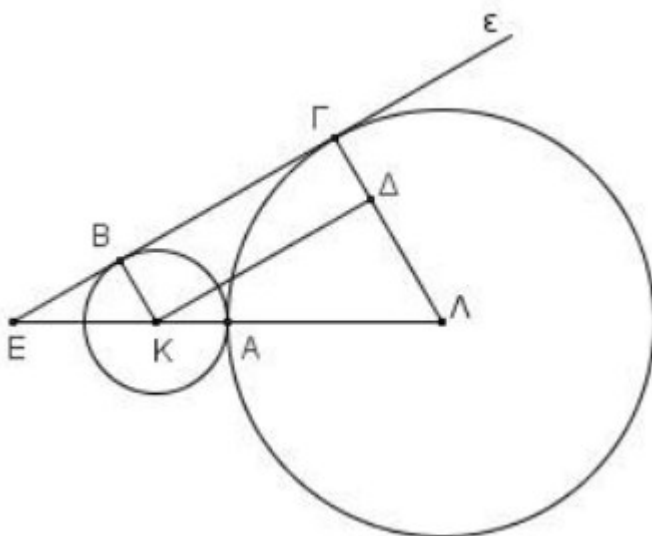
(Μονάδες 9)

β) η γωνία  $\Delta K\Lambda$  είναι  $30^\circ$ ,

(Μονάδες 8)

γ) το τμήμα  $E\Lambda = 6\rho$ , όπου  $\rho$  η ακτίνα του κύκλου  $(K, \rho)$ .

(Μονάδες 8)



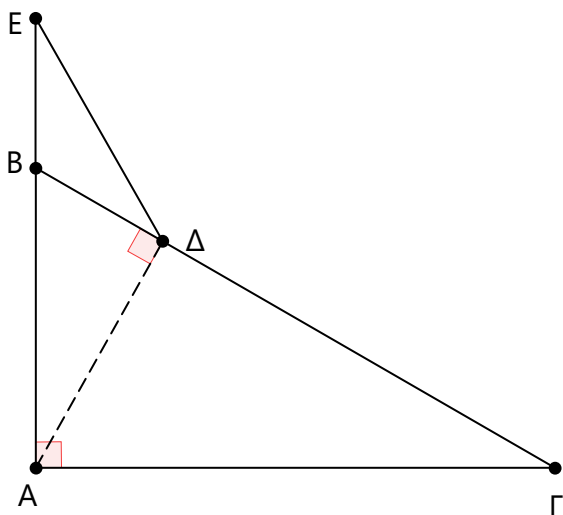
**63.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  με τη γωνία  $\hat{A}$  ορθή και  $\hat{B} = 2\hat{\Gamma}$ . Φέρουμε το ύψος του  $AD$  και σημείο  $E$  στην προέκταση της  $AB$  τέτοιο ώστε  $BE = BD$ .

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου  $BDE$ .

β) Να αποδείξετε ότι:

i.  $BE = \frac{AB}{2}$ .

ii.  $AE = \Gamma\Delta$ .



(Μονάδες 9)

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)

**64.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο  $AB\Gamma$  ( $\hat{A} = 90^\circ$ ) και  $\hat{\Gamma} = 30^\circ$  με  $M$  και  $N$  τα μέσα των πλευρών  $B\Gamma$  και  $AB$  αντίστοιχα. Έστω ότι η μεσοκάθετος της πλευράς  $B\Gamma$  τέμνει την  $A\Gamma$  στο σημείο  $E$ .

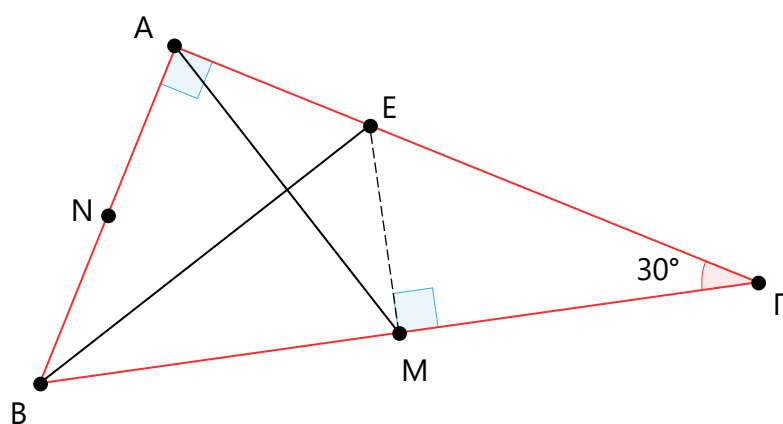
α) Να αποδείξετε ότι:

i) η  $BE$  είναι διχοτόμος της γωνίας  $\hat{B}$ .

ii)  $AE = \frac{BE}{2}$ .

iii) η  $BE$  είναι μεσοκάθετος της διαμέσου  $AM$ .

β) Αν  $AD$  είναι το ύψος του τριγώνου  $AB\Gamma$  που τέμνει την  $BE$  στο  $H$ , να αποδείξετε ότι τα σημεία  $M$ ,  $H$  και  $N$  είναι συνευθειακά.



(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 6)

**65.** Στο παρακάτω σχήμα το ορθογώνιο ΕΖΗΘ παριστάνει ένα τραπέζι του μπιλιάρδου. Ένας παίκτης τοποθετεί μια μπάλα στο σημείο Α το οποίο ανήκει στη μεσοκάθετη της ΘΗ και απέχει από αυτή απόσταση ίση με ΘΗ. Όταν ο παίκτης χτυπήσει τη μπάλα αυτή ακολουθεί τη διαδρομή  $A \rightarrow B \rightarrow \Gamma \rightarrow \Delta \rightarrow A$  χτυπώντας στους τοίχους του μπιλιάρδου ΕΘ, ΘΗ, ΖΗ διαδοχικά. Για τη διαδρομή αυτή ισχύει ότι κάθε γωνία πρόσπτωσης σε τοίχο (π.χ η γωνία  $\widehat{ABE}$ ) είναι ίση με κάθε γωνία ανάκλασης σε τοίχο (π.χ η γωνία  $\widehat{B\Gamma\Gamma}$ ) και η κάθε μια απ' αυτές είναι  $45^\circ$ .

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Η διαδρομή ΑΒΓΔ της μπάλας είναι τετράγωνο.

(Μονάδες 9)

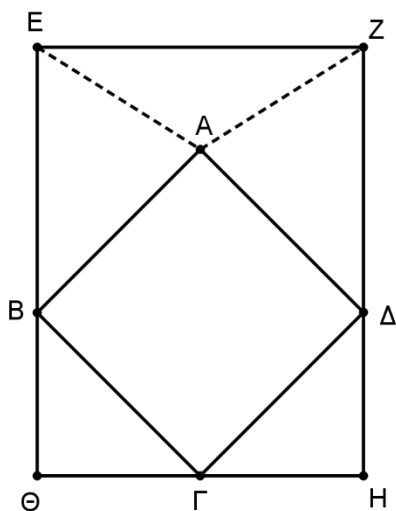
ii. Το σημείο Α ισαπέχει από τα τις κορυφές Ε και Ζ του μπιλιάρδου.

(Μονάδες 8)

β) Αν η ΑΖ είναι διπλάσια από την απόσταση του Α από τον τοίχο ΕΖ, να υπολογίσετε

τις γωνίες του τριγώνου ΑΕΖ.

(Μονάδες 8)



- 66.** Δίνεται τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Στην προέκταση του ύψους του  $AK$  θεωρούμε σημείο  $\Delta$  ώστε  $AK = K\Delta$ . Έστω  $\Lambda$ ,  $M$ ,  $N$  τα μέσα των πλευρών  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Delta$  αντίστοιχα.

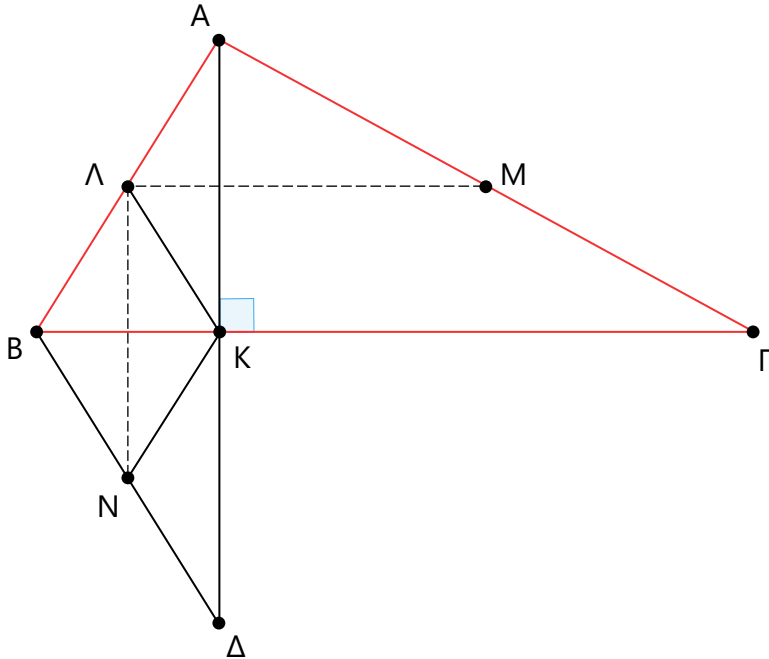
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο  $AB\Delta$  είναι ισοσκελές.
- β) Το τετράπλευρο  $B\Lambda K N$  είναι ρόμβος.
- γ)  $\Lambda M \perp \Lambda N$

(Μονάδες 7)

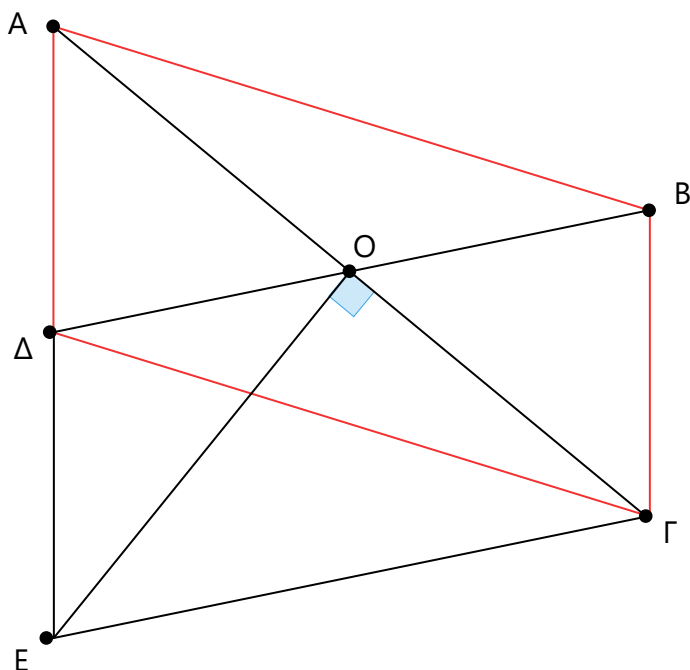
(Μονάδες 9)

(Μονάδες 9)



Να αποδείξετε ότι:

- (Μονάδες 9)



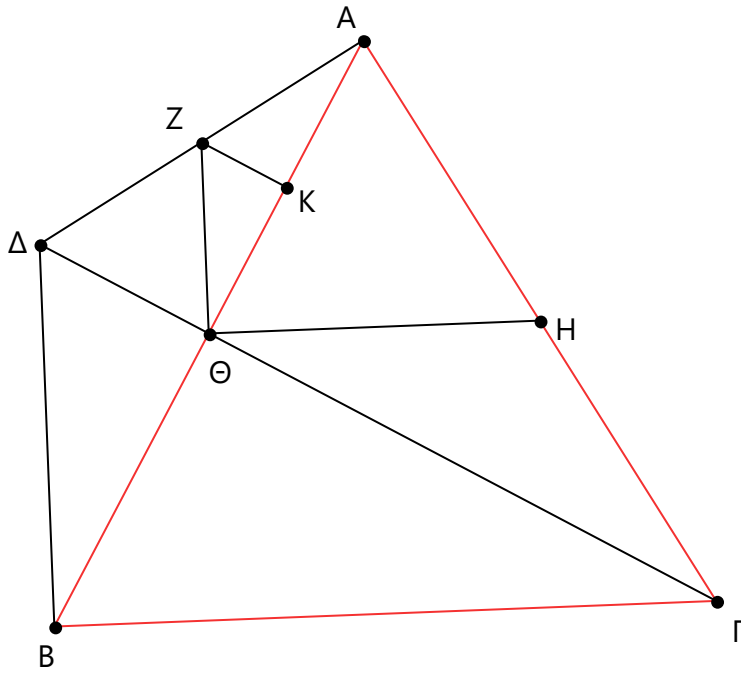
**68.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$ . Με βάση την  $AB$  κατασκευάζουμε ισοσκελές τρίγωνο  $A\Delta B$ , εκτός του τριγώνου  $AB\Gamma$ , με γωνία  $\widehat{\Delta} = 120^\circ$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$  και  $H$  των πλευρών  $A\Delta$  και  $A\Gamma$  αντίστοιχα.

37138 4

α) Να αποδείξετε ότι η  $\Delta\Gamma$  είναι μεσοκάθετος του  $AB$ . (Μονάδες 8)

β) Αν η  $\Delta\Gamma$  τέμνει την  $AB$  στο  $\Theta$ , να αποδείξετε ότι η γωνία  $Z\Theta H$  είναι ορθή. (Μονάδες 9)

γ) Αν η  $ZK$  είναι η κάθετη στην  $AB$  από το σημείο  $Z$ , να αποδείξετε ότι  $ZK = \frac{A\Delta}{4}$ . (Μονάδες 8)



- 69.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο  $AB\Gamma$  και τα μέσα  $\Delta$ ,  $E$  και  $M$  των  $AB$ ,  $A\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα. Στην προέκταση του  $M\Delta$  (προς το  $\Delta$ ) θεωρούμε τμήμα  $\Delta Z = \Delta M$ .

37140 4

Να αποδείξετε ότι:

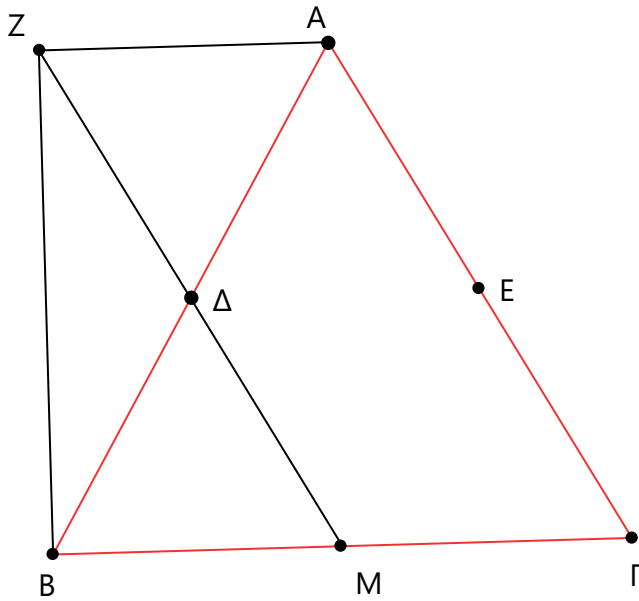
- α) Τα τρίγωνα  $AZ\Delta$  και  $BM\Delta$  είναι ίσα.
- β) Το τετράπλευρο  $ZA\Gamma M$  είναι παραλληλόγραμμο.
- γ) Τα τμήματα  $ZE$  και  $AM$  τέμνονται κάθετα και διχοτομούνται.
- δ) Η  $BZ$  είναι κάθετη στη  $ZA$ .

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 6)



**70.** Δίνεται οξυγώνιο ισοσκελές τρίγωνο  $AB\Gamma$  με  $AB = A\Gamma$ . Φέρνουμε τμήμα  $AD$  κάθετο στην  $AB$  και τμήμα  $AE$  κάθετο στην  $A\Gamma$  με  $AD = AE$ . Θεωρούμε τα μέσα  $Z$ ,  $H$  και  $M$  των  $\Delta B$ ,  $E\Gamma$  και  $B\Gamma$  αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι:

i. Τα τρίγωνα  $\Delta DB$  και  $AE\Gamma$  είναι ίσα.

ii. Το τρίγωνο  $ZAH$  είναι ισοσκελές.

iii. Η  $AM$  είναι μεσοκάθετος του  $ZH$ .

β) Ένας μαθητής συγκρίνοντας τα τρίγωνα  $\Delta DB$  και  $AE\Gamma$  έγραψε τα εξής:

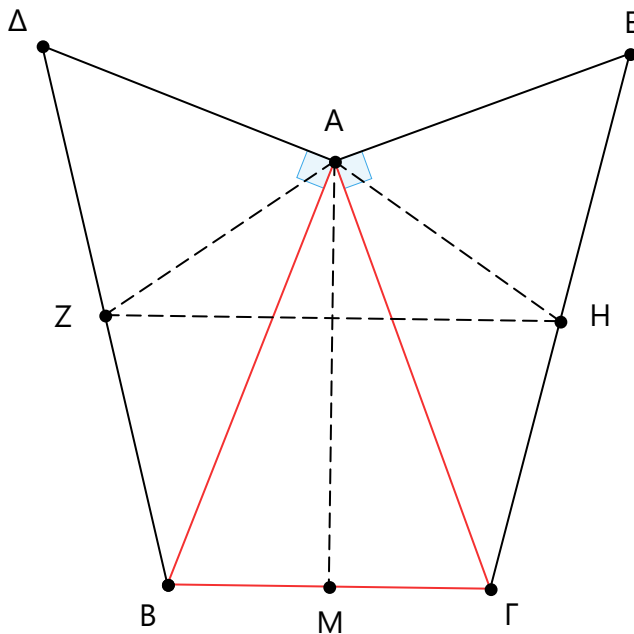
« 1.  $AD = AE$  από υπόθεση

2.  $AB = A\Gamma$  πλευρές ισοσκελούς τριγώνου

3.  $\widehat{\Delta AB} = \widehat{EAG}$  ως κατακορυφήν

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα έχοντας δύο πλευρές ίσες μια προς μια και την περιεχόμενη γωνία ίση».

Ο καθηγητής είπε ότι αυτή η λύση περιέχει λάθος. Μπορείς να το εντοπίσεις; (Μονάδες 5)



**71.** Έστω ισοσκελές τρίγωνο  $BA\Gamma$  με  $\hat{A} = 120^\circ$ . Φέρουμε ημιευθεία  $Ax$  κάθετη στην  $A\Gamma$  στο  $A$ , η οποία τέμνει τη  $B\Gamma$  στο  $\Delta$ . Έστω  $\Lambda$  το μέσο του  $AB$  και  $K$  το μέσο του  $\Delta\Gamma$ . **3715**  
**6**

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο  $A\Delta B$  είναι ισοσκελές

β)  $\Delta\Gamma = 2 \cdot B\Delta$

γ)  $\Lambda\Delta \parallel AK$

δ)  $AK = 2 \cdot \Lambda\Delta$

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 5)

(Μονάδες 4)

