

ΚΕΦΑΛΑΙΟ-5-ΠΑΡΑΛΛΗΛΟΓΡΑΜΜΑ-ΤΡΑΠΕΖΙΑ

5.11-ΙΣΟΣΚΕΛΕΣ-ΤΡΑΠΕΖΙΟ

40 θέματα

1349 2
7

1. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AD \parallel B\Gamma$) με $B\Gamma > \Delta\Gamma$.

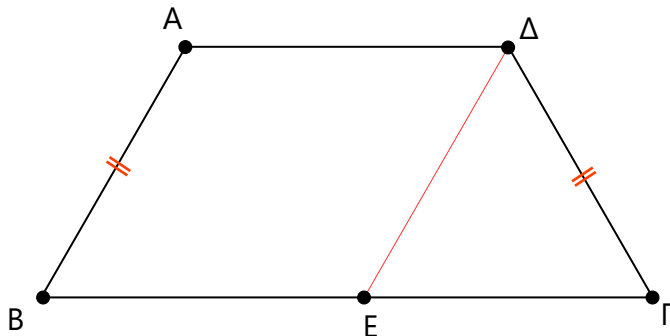
Στην πλευρά $B\Gamma$ θεωρούμε σημείο E , τέτοιο ώστε $GE = \Gamma\Delta$.

α) Να αποδείξετε ότι η ΔE είναι διχοτόμος της $A\Delta\Gamma$.

β) Αν $\hat{A} = 120^\circ$, να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $\Delta E\Gamma$ είναι ισόπλευρο.

(Μονάδες 12)

(Μονάδες 13)



2. Θεωρούμε ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB = A\Gamma$). Στο μέσο Δ της πλευράς AB φέρουμε κάθετη ευθεία που τέμνει την $A\Gamma$ στο E . Από το E φέρουμε ευθεία παράλληλη στη βάση $B\Gamma$ που τέμνει την AB στο Z .

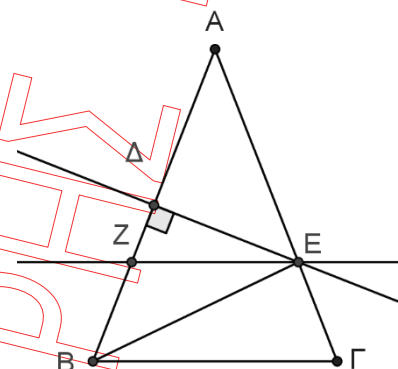
Να αποδείξετε ότι:

α) $AE = BE$,

(Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο $B\Gamma EZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)

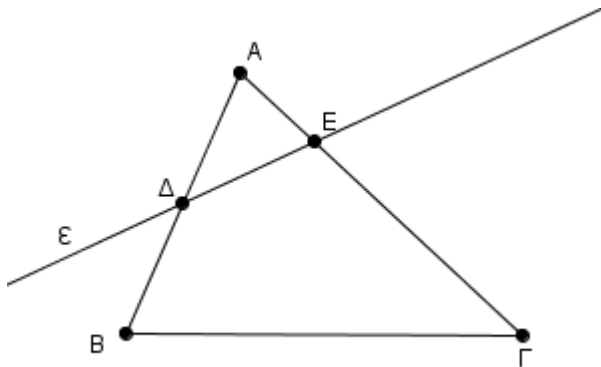
3438 2
5

3. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ το μέσο της πλευράς AB . Από το Δ διέρχεται μια τυχαία ευθεία (ϵ) που τέμνει την πλευρά $A\Gamma$ σε εσωτερικό της σημείο E . Η ευθεία (ϵ) χωρίζει το τρίγωνο $AB\Gamma$ σε ένα τρίγωνο $A\Delta E$ και σε ένα τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$.

3439 2
2

α) Ποια πρέπει να είναι η θέση του σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $B\Delta E\Gamma$ να είναι τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

β) Ποιο πρέπει να είναι το είδος του $AB\Gamma$ τριγώνου, ώστε το τραπέζιο του ερωτήματος (α) να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 13)

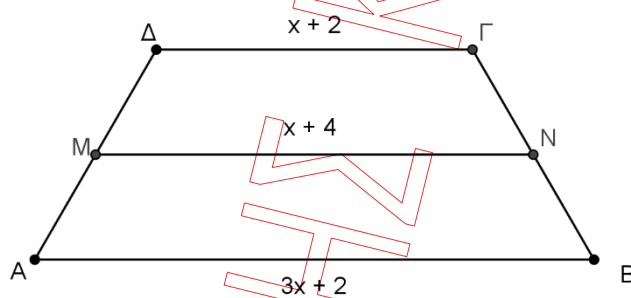


4. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AD = B\Gamma$), με $AB > \Gamma\Delta$ και MN η διάμεσός του.

3440 2
9

α) Αν τα μήκη των βάσεων είναι $AB = 3x + 2$, $\Gamma\Delta = x + 2$ και το μήκος της διαμέσου του τραπέζιου είναι $MN = x + 4$, τότε να δείξετε ότι $x = 2$. (Μονάδες 10)

β) Αν η γωνία $\hat{\Gamma}$ είναι διπλάσια της γωνίας $\hat{B}$, να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπέζιου. (Μονάδες 15)



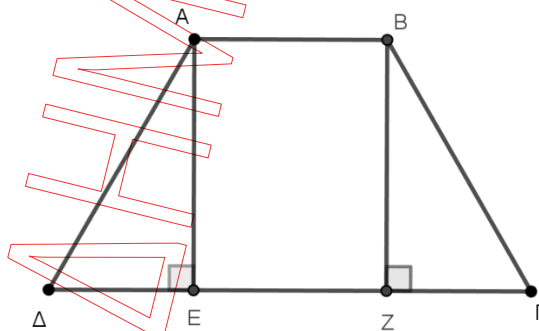
5. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\hat{\Gamma} = \hat{\Delta} = 60^\circ$ και τα κάθετα τμήματα AE , BZ στη $\Delta\Gamma$.

3448 2
8

Να αποδείξετε ότι:

α) $\Delta E = \Gamma Z$, (Μονάδες 12)

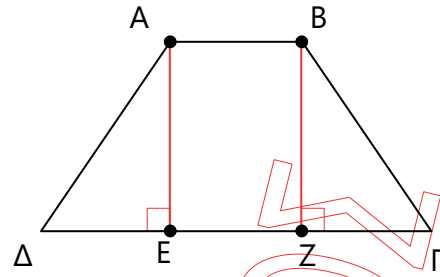
β) το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ορθογώνιο. (Μονάδες 13)



6. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$). Από τα σημεία A και B φέρνουμε τα κάθετα τμήματα AE και BZ αντίστοιχα στη $\Delta\Gamma$.

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta E = \Gamma Z$, (Μονάδες 12)
 β) $AZ = BE$. (Μονάδες 13)



3449 2
1

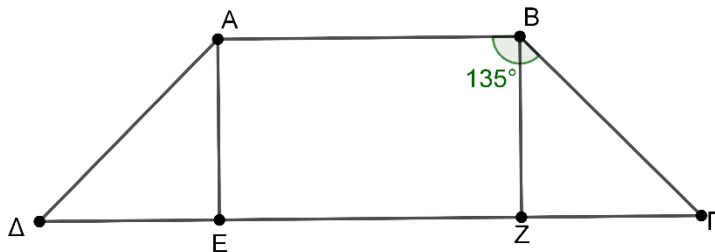
7. Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $AB < \Gamma\Delta$. Θεωρούμε τα σημεία E και Z πάνω στην AB έτσι ώστε $AE = EZ = ZB$ και έστω K το σημείο τομής των ΔZ και ΓE .

Να αποδείξετε ότι:

- α) $\Delta Z = \Gamma E$, (Μονάδες 13)
 β) τα τρίγωνα EKZ και $\Delta K\Gamma$ είναι ισοσκελή. (Μονάδες 12)

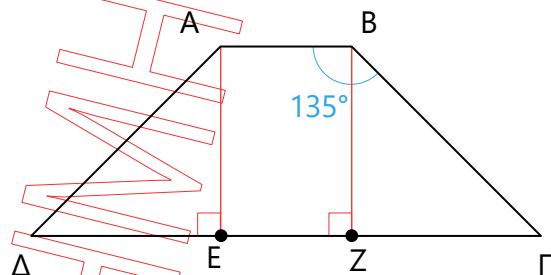
8. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\widehat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι $AE = ED = BZ = \Gamma Z$. (Μονάδες 15)



9. Θεωρούμε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) με $\Gamma\Delta > AB$ και $\widehat{B} = 135^\circ$. Από τις κορυφές A και B φέρουμε τα ύψη του AE και BZ .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραpezίου. (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι $AE = ED = BZ = \Gamma Z$. (Μονάδες 15)



36106 2

- 10.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$), με $AB=6$, $B\Gamma=4$ και $\hat{\Gamma} = 60^\circ$. Δίνονται επίσης τα [36112](#) 2 ύψη AE και BZ από τις κορυφές A και B αντίστοιχα.

α) Να υπολογίσετε τις υπόλοιπες γωνίες του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$.

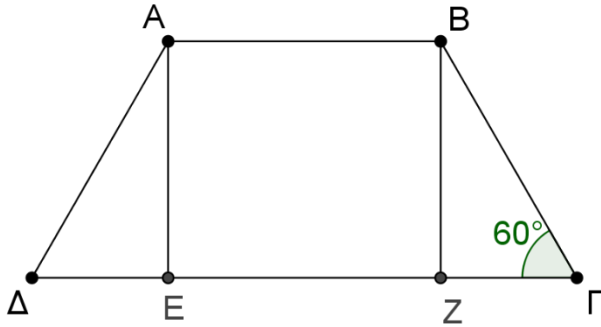
(Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε τα τρίγωνα $AE\Delta$, $BZ\Gamma$ είναι ίσα.

(Μονάδες 10)

γ) Να υπολογίσετε την περίμετρο του $AB\Gamma\Delta$.

(Μονάδες 9)



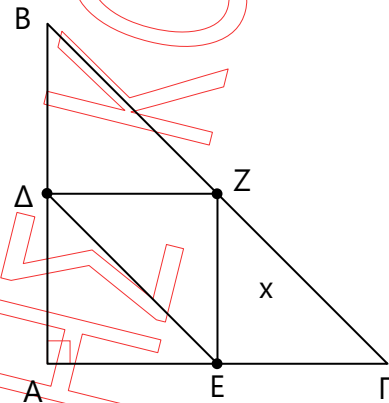
- 11.** Σε ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) θεωρούμε τα μέσα Δ , E και Z των πλευρών του AB , $A\Gamma$ και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

α) το τετράπλευρο $AEZ\Delta$ είναι τετράγωνο, (Μονάδες 15)

β) το τετράπλευρο $E\Delta B\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 10)



[3633](#) 2
7

- 12.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$ και $AD = B\Gamma$), το μέσο M της πλευράς $\Delta\Gamma$ και τα [3634](#) 2 μέσα K και Λ των μη παράλληλων πλευρών του AD και $B\Gamma$ αντίστοιχα.

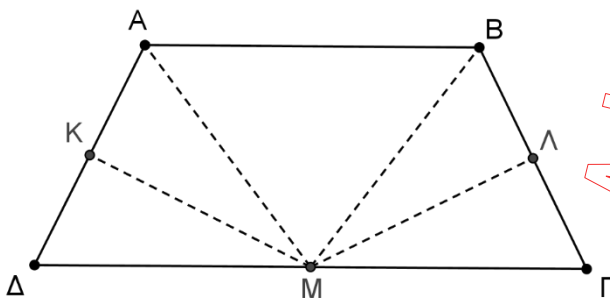
Να αποδείξετε ότι:

α) τα τμήματα KM και ΛM είναι ίσα,

(Μονάδες 12)

β) Τα τμήματα AM και BM είναι ίσα.

(Μονάδες 13)



- 13.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με $AB=8$ και $\Delta\Gamma=12$. Αν AH και $B\Theta$ είναι τα ύψη **37010** 2 του τραπέζιου $AB\Gamma\Delta$,

α) να αποδείξετε ότι $\Delta H = \Theta\Gamma$.

(Μονάδες 12)

β) να υπολογίσετε τη διάμεσο του τραπέζιου.

(Μονάδες 13)

- 14.** Δίνεται τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) με τη γωνία Γ ίση με 30° και έστω K, Λ τα μέσα των **1736** 4 διαγώνιων του. Οι μη παράλληλες πλευρές του ΔA και ΓB προεκτείνόμενες τέμνονται κάθετα στο σημείο E .

Να αποδείξετε ότι:

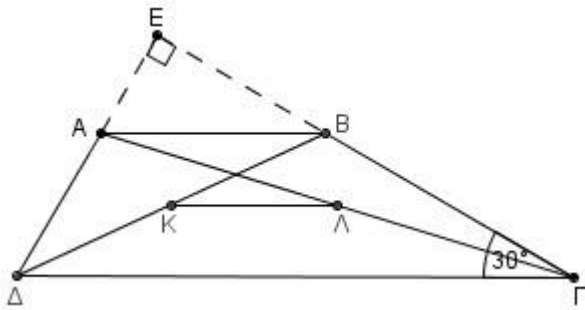
α) $AB=2AE$

(Μονάδες 10)

β) $K\Lambda=AD$

(Μονάδες 10)

γ) Σε ποια περίπτωση το $AB\Lambda K$ είναι παραλληλόγραμμο; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 5)



- 15.** Το τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ του παρακάτω σχήματος είναι ρόμβος. Θεωρούμε $AZ \perp \Gamma\Delta$ και **1742** 4 $AE \perp \Gamma B$.

Να αποδείξετε ότι:

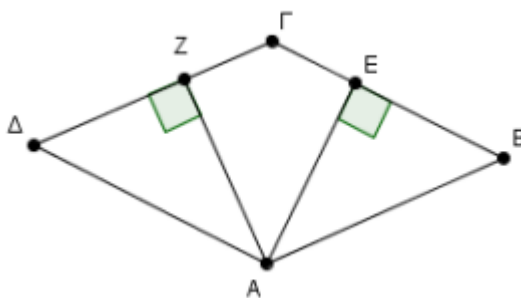
α) Το τρίγωνο ZAE είναι ισοσκελές.

(Μονάδες 6)

β) Η ευθεία $A\Gamma$ είναι μεσοκάθετος του τμήματος ZE .

(Μονάδες 9)

γ) Αν M και N τα μέσα των πλευρών $A\Delta$ και AB αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι $MN//ZE$ και $ZM=EN$. (Μονάδες 10)



16. Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB//\Gamma\Delta$) είναι $AB=AD$.

1755 4

α) Να αποδείξετε ότι η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ . (Μονάδες 7)

β) Να προσδιορίσετε τη θέση ενός σημείου E , ώστε το τετράπλευρο $ABE\Delta$ να είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)

γ) Αν επιπλέον είναι γωνία $BA\Delta=120^\circ$ και οι διαγώνιοι του ρόμβου τέμνονται στο σημείο O , να υπολογίσετε τις γωνίες του τετραπλεύρου $EOB\Gamma$. (Μονάδες 8)

17. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με O το κέντρο του. Από την κορυφή Δ φέρουμε το τμήμα ΔK κάθετο στην $A\Gamma$ και στην προέκτασή του προς το K θεωρούμε σημείο E , ώστε $KE = \Delta K$.

1770 4

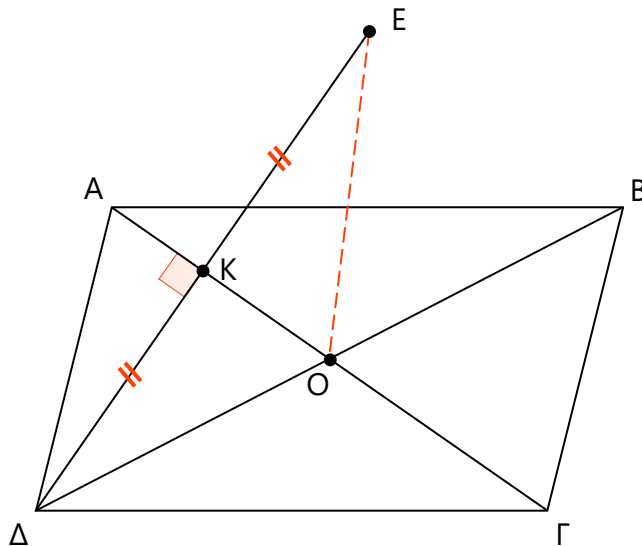
Να αποδείξετε ότι:

α) $EO = \frac{B\Delta}{2}$.

(Μονάδες 8)

β) Η γωνία $\Delta\hat{E}B$ είναι ορθή. (Μονάδες 8)

γ) Το τετράπλευρο $AEB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)



18. Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB=2B\Gamma$ και τη γωνία B αμβλεία. Από την κορυφή A φέρουμε την AE κάθετη στην ευθεία $B\Gamma$ και έστω M, N τα μέσα των $AB, \Delta\Gamma$ αντίστοιχα.

1786 4

Να αποδείξετε ότι:

α) Το τετράπλευρο $MB\Gamma N$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 8)

β) Το τετράπλευρο $ME\Gamma N$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 9)

γ) Η EN είναι διχοτόμος της γωνίας $M\hat{E}\Gamma$. (Μονάδες 8)

- 19.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με τη γωνία A ορθή, και τυχαίο σημείο Δ της πλευράς AB . Έστω K, M, N τα μέσα των $\Gamma\Delta, B\Gamma, B\Delta$ αντίστοιχα.

1789 4

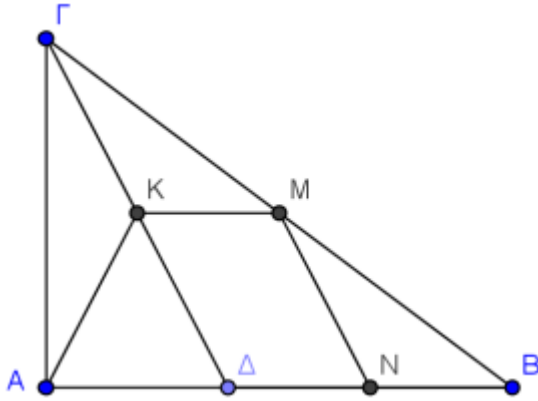
Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $KMND$ είναι παραλληλόγραμμο.
- β) Το τετράπλευρο $AKMN$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.
- γ) Η διάμεσος του τραπεζίου $AKMN$ είναι ίση με $\frac{AB}{2}$.

(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

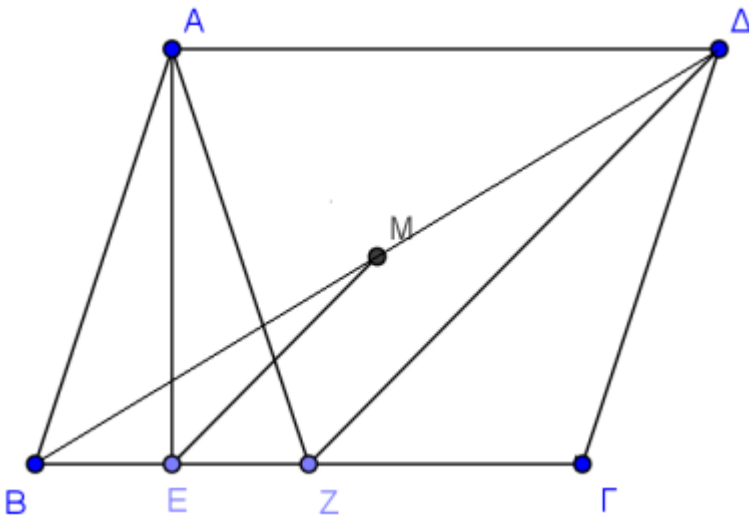
(Μονάδες 8)



- 20.** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με τη γωνία του B να είναι ίση με 70° και το ύψος του AE . Έστω Z σημείο της $B\Gamma$ ώστε $BE = EZ$.

1790 4

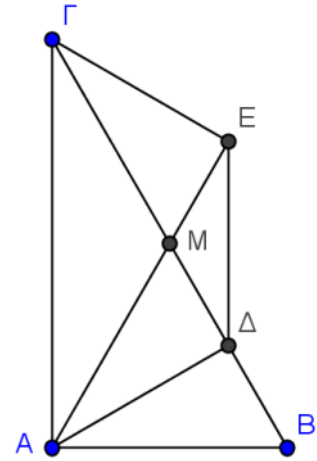
- α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $AZ\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο, (Μονάδες 8)
- β) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τραπεζίου $AZ\Gamma\Delta$ (Μονάδες 9)
- γ) Αν M το μέσο του $B\Delta$, να αποδείξετε ότι $EM = \frac{A\Gamma}{2}$ (Μονάδες 8)



- 21.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ με $\hat{A} = 90^\circ$ και $\hat{\Gamma} = 30^\circ$. Φέρουμε το ύψος του AD και τη διάμεσό του AM . Από το Γ φέρουμε κάθετη στην ευθεία AM , η οποία την τέμνει στο E .

Να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο AMB είναι ισόπλευρο. (Μονάδες 8)
 β) $ME = MD = \frac{BG}{4}$ (Μονάδες 9)
 γ) Το $ADE\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)



1791 4

- 22.** α) Σε ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ θεωρούμε K, Λ, M, N τα μέσα των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα. Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $K\Lambda M N$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 13) 1797 4
 β) Σε ένα τετράπλευρο $AB\Gamma\Delta$ τα μέσα K, Λ, M, N των πλευρών του $AB, B\Gamma, \Gamma\Delta, \Delta A$ αντίστοιχα είναι κορυφές ρόμβου. Για να σχηματίζεται ρόμβος το $AB\Gamma\Delta$ πρέπει να είναι ισοσκελές τραπέζιο; Να αιτιολογήσετε πλήρως τη θετική ή αρνητική απάντησή σας. (Μονάδες 12)

- 23.** Έστω $AB\Gamma\Delta$ ορθογώνιο με $AB > B\Gamma$ τέτοιο ώστε οι διαγώνιοι του να σχηματίζουν γωνία 60° . Από το Δ φέρουμε DM κάθετη στην $A\Gamma$. 1893 4

α) Να αποδείξετε ότι:

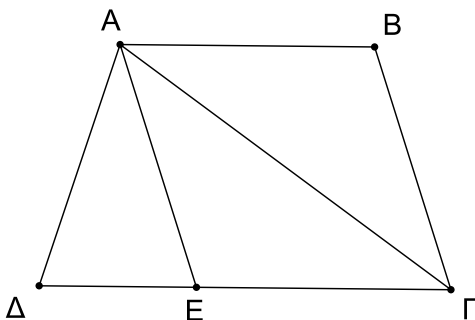
- i. το σημείο M είναι μέσο του AO όπου O το κέντρο του ορθογωνίου. (Μονάδες 8)
 ii. $AM = \frac{1}{4} A\Gamma$ (Μονάδες 7)

β) Αν από το Γ φέρουμε GN κάθετη στη $B\Delta$, να αποδείξετε ότι το $MN\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

- 24.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $\hat{A} = 108^\circ$. Στη βάση $\Gamma\Delta$ θεωρούμε σημείο E , ώστε οι $A\Gamma, AE$ να τριχοτομούν τη γωνία $\hat{A}$. 13539 4

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ADE . (Μονάδες 10)
 β) Να αποδείξετε ότι:

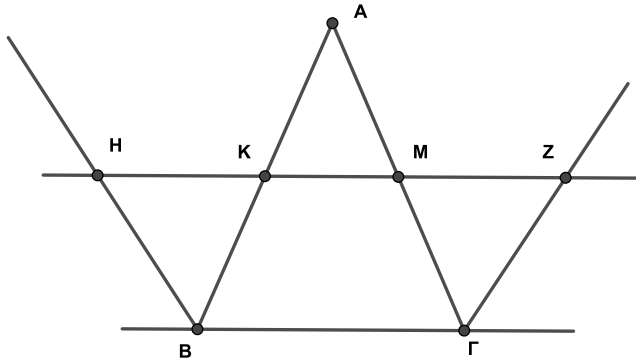
- i. Το
 τρίγωνο ADE είναι ισοσκελές. (Μονάδες 5)
 ii. Το
 τετράπλευρο $AB\Gamma E$ είναι ρόμβος. (Μονάδες 10)



- 25.** Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ), με Κ, Μ τα μέσα των πλευρών ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα. Η ευθεία που διέρχεται από τα σημεία Κ και Μ τέμνει τις εξωτερικές διχοτόμους των γωνιών Β και Γ στα σημεία Η και Ζ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα.

α) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΚΜΓΒ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 11)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο ΒΓΖΗ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 14)



- 26.** Δίνεται ισόπλευρο τρίγωνο ΑΒΓ. Στην προέκταση της ΒΓ (προς το Γ) θεωρούμε τμήμα ΓΔ = ΒΓ. Αν Μ, Κ και Λ είναι τα μέσα των πλευρών ΒΓ, ΑΒ και ΑΔ αντίστοιχα τότε:

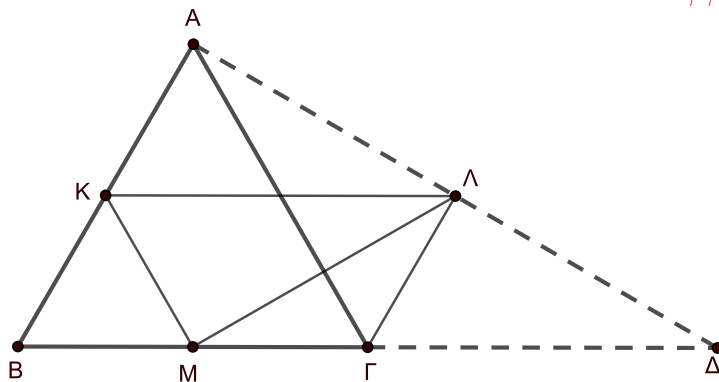
1488 4
2

α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του τριγώνου ΒΑΔ.

β) Να αποδείξετε ότι:

i. Το τετράπλευρο ΚΛΓΜ είναι ισοσκελές τραπέζιο με τη μεγάλη βάση διπλάσια από τη μικρή. (Μονάδες 8)

ii. $\triangle KML$ είναι ορθογώνιο. Το (Μονάδες 10)



27. Δίνεται το οξυγώνιο και σκαληνό τρίγωνο $AB\Gamma$. Προεκτείνουμε το ύψος του AH κατά τμήμα $H\Delta=AH$ και τη διάμεσό του AM κατά τμήμα $ME=AM$. Να αποδείξετε ότι:

1488 4
5

α)
i.
 $= \Gamma E$

ii.
 $= B\Delta$

(Μονάδες 8)

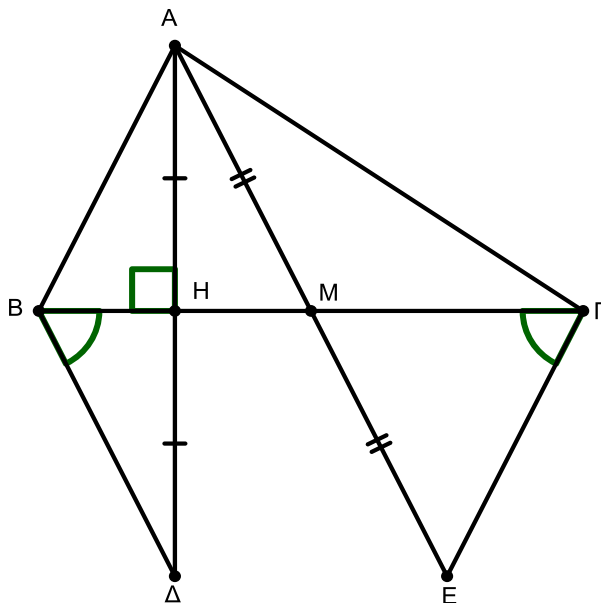
β) $\widehat{B\Delta} = \widehat{B\Gamma E}$

γ)

i.
άστε αν το τμήμα $B\Delta$ μπορεί να είναι παράλληλο στο τμήμα ΓE .

(Μονάδες 5)

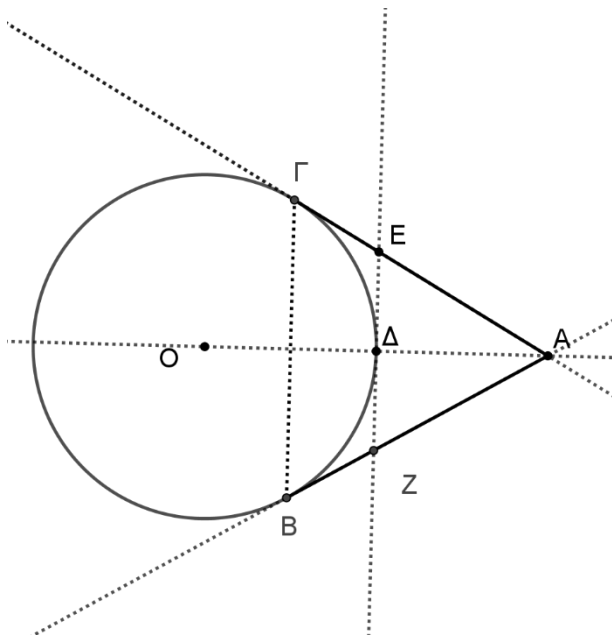
ii.
ο είναι το είδος του τετραπλεύρου $B\Gamma E\Delta$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. (Μονάδες 4)



- 28.** Δίνεται κύκλος κέντρου O και ακτίνας ρ . Από σημείο A εξωτερικό του κύκλου θεωρούμε τις εφαπτόμενες του κύκλου που εφάπτονται σε αυτόν στα σημεία B, Γ και τέτοιες ώστε, η γωνία $\widehat{B\hat{A}\Gamma}$ που σχηματίζουν τα εφαπτόμενα τμήματα AB και $A\Gamma$ να είναι 60° . Έστω ότι η ευθεία AO τέμνει τον κύκλο στο σημείο Δ και η εφαπτόμενη του κύκλου στο Δ τέμνει τα τμήματα AB και $A\Gamma$ στα σημεία Z και E αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- $OA = 2\rho$,
- το τρίγωνο AZE είναι ισόπλευρο,
- $AZ = 2ZB$,
- το τετράπλευρο $EZB\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



- 29.** Σε οξυγώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB < A\Gamma$) φέρουμε το ύψος AD . Έστω K, Λ, M τα μέσα των $AB, A\Gamma, B\Gamma$ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- $K\Lambda \parallel B\Gamma$ (Μονάδες 5)
- $M\Lambda = KD$ (Μονάδες 6)
 - Το τετράπλευρο $K\Lambda M\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)
 - Οι γωνίες $\widehat{K\hat{\Delta}\Lambda}$ και $\widehat{K\hat{M}\Lambda}$ είναι ίσες. (Μονάδες 6)

- 30.** Θεωρούμε τρίγωνο $AB\Gamma$ με $B\Gamma = 2AB$. Έστω Δ το μέσο της πλευράς $B\Gamma$ και E το μέσο του τμήματος BA . Από το σημείο Δ φέρουμε ευθεία παράλληλη προς την AG , η οποία τέμνει την πλευρά AB στο σημείο Z .

Να αποδείξετε ότι:

- α) τα τρίγωνα ABE και $BZ\Delta$ είναι ίσα,
- β) η AD είναι διχοτόμος της γωνίας $E\hat{A}\Gamma$,
- γ) το τετράπλευρο $ADEZ$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 9)

- 31.** Δίνεται ορθογώνιο τρίγωνο $AB\Gamma$ ($\hat{A} = 90^\circ$) και η διχοτόμος του $B\Delta$. Από το Δ φέρουμε $\Delta E \perp B\Gamma$ και ονομάζουμε Z το σημείο στο οποίο η ευθεία $E\Delta$ τέμνει την προέκταση της BA .

Να αποδείξετε ότι:

- α) το τρίγωνο ABE είναι ισοσκελές,
- β) τα τρίγωνα $AB\Gamma$ και BEZ είναι ίσα,
- γ) η ευθεία $B\Delta$ είναι μεσοκάθετη των τμημάτων AE και $Z\Gamma$,
- δ) το τετράπλευρο $AE\Gamma Z$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 6)

(Μονάδες 7)

- 32.** Στο παρακάτω σχήμα δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$, η διχοτόμος Bx της γωνίας $\hat{B}$ του τριγώνου $AB\Gamma$ και η διχοτόμος By της εξωτερικής γωνίας $\hat{B}$. Αν Δ και E είναι οι προβολές της κορυφής A του τριγώνου $AB\Gamma$ στην Bx και By αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι:

- α) Το τετράπλευρο $A\Delta BE$ είναι ορθογώνιο.

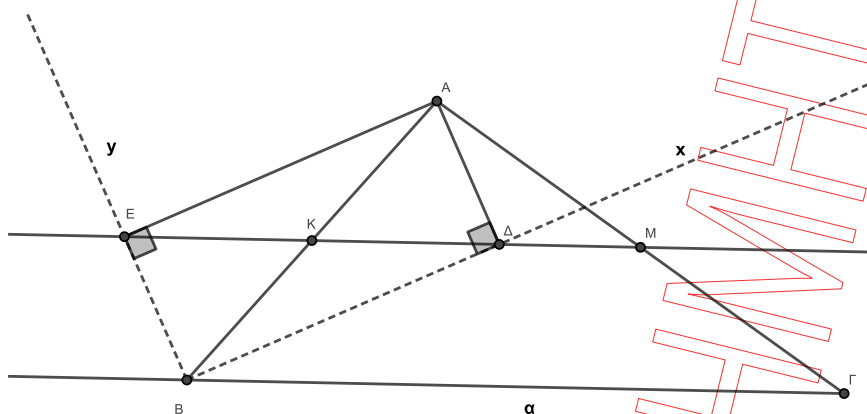
(Μονάδες 7)

- β) Η ευθεία $E\Delta$ είναι παράλληλη προς τη $B\Gamma$ και διέρχεται από το μέσο M της $A\Gamma$.

(Μονάδες 10)

- γ) Το τετράπλευρο $KM\Gamma B$ είναι τραπέζιο και η διάμεσός του είναι ίση με $\frac{3\alpha}{4}$, όπου $\alpha = B\Gamma$.

(Μονάδες 8)



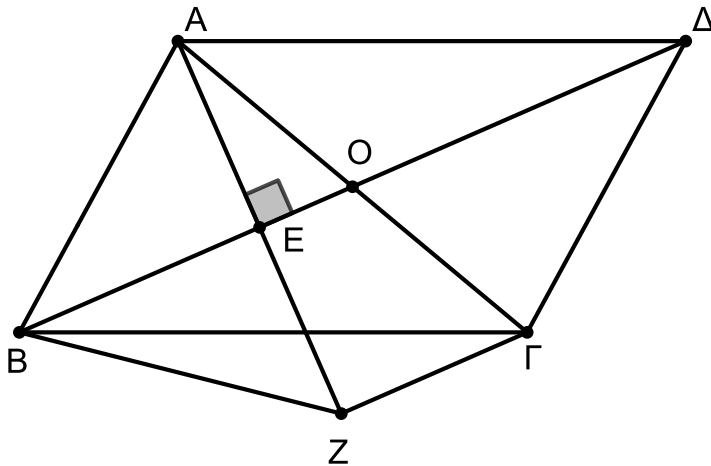
- 33.** Δίνεται παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB < AD$ και έστω O το σημείο τομής των διαγωνίων του $A\Gamma$ και $B\Delta$. Φέρνουμε την AE κάθετη στην διαγώνιο $B\Delta$. Αν το Z είναι το συμμετρικό του A ως προς την διαγώνιο $B\Delta$ και δεν συμπίπτει με το σημείο Γ , τότε να αποδείξετε ότι:

- α) Το τρίγωνο $A\Delta Z$ είναι ισοσκελές.
 β) $Z\Gamma = 2OE$.
 γ) Το $B\Delta Z\Gamma$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.

(Μονάδες 7)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 9)



- 34.** Έστω ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Delta\Gamma$) με $\widehat{B} = 2 \cdot \widehat{\Gamma}$ και $AB = B\Gamma = A\Delta = \frac{\Gamma\Delta}{2}$. Φέρουμε τη διχοτόμο της γωνίας $\widehat{B}$, η οποία τέμνει το $\Delta\Gamma$ στο K και η κάθετη από το K προς το $B\Gamma$ το τέμνει στο M .

- α) Να υπολογίσετε τις γωνίες του $AB\Gamma\Delta$.

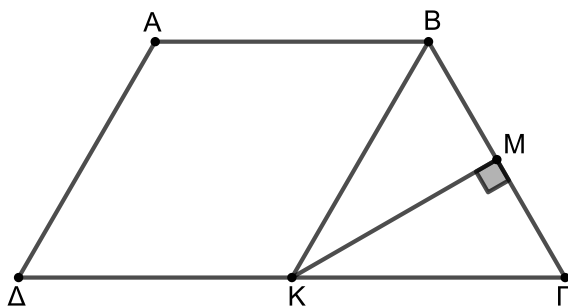
(Μονάδες 10)

- β) Να αποδείξετε ότι:

- i. Το τετράπλευρο $ABK\Delta$ είναι ρόμβος.
 ii. Το σημείο M είναι το μέσο του $B\Gamma$.

(Μονάδες 8)

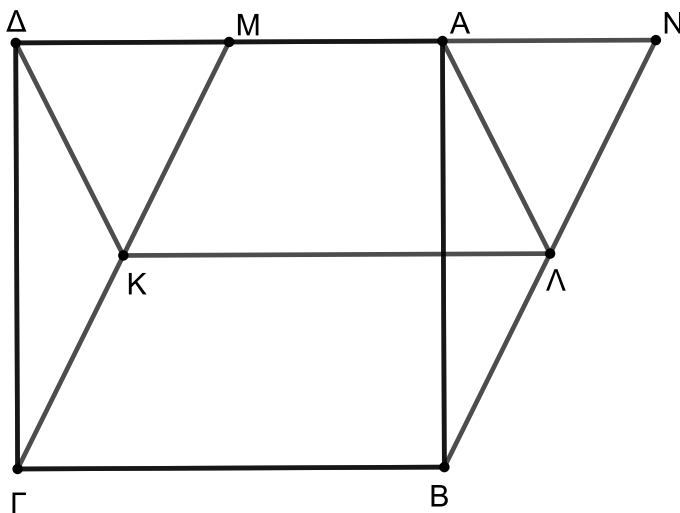
(Μονάδες 7)



- 35.** Έστω τετράγωνο $AB\Gamma\Delta$ και M το μέσο της πλευράς ΔA . Προεκτείνουμε το τμήμα ΔA (προς την πλευρά του A) κατά τμήμα $AN = \frac{A\Delta}{2}$. Φέρουμε τα τμήματα ΓM και BN και θεωρούμε τα μέσα τους K και Λ αντίστοιχα.

Να αποδείξετε ότι:

- Το τετράπλευρο $MNB\Gamma$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $A\Delta K\Lambda$ είναι παραλληλόγραμμο.
- Το τετράπλευρο $AMK\Lambda$ είναι ισοσκελές τραπέζιο.



(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

(Μονάδες 8)

- 36.** Σε παραλληλόγραμμο $AB\Gamma\Delta$ με $AB > B\Gamma$ και $\widehat{B} < 90^\circ$ θεωρούμε σημείο Z στην προέκταση της $B\Gamma$ (προς το Γ) τέτοιο ώστε $\Gamma Z = B\Gamma$. Αν E είναι σημείο της AB , τέτοιο ώστε $E\Gamma = \Gamma B$, να αποδείξετε ότι:

- η γωνία BEZ είναι ορθή,
- το τετράπλευρο $AE\Gamma\Delta$ είναι ισοσκελές τραπέζιο,
- το τετράπλευρο $A\Gamma Z\Delta$ είναι παραλληλόγραμμο.

(Μονάδες 8)

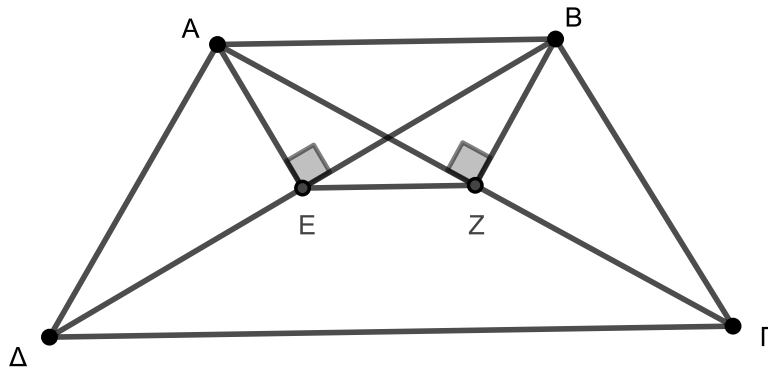
(Μονάδες 8)

(Μονάδες 9)

- 37.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ με $AB \parallel \Gamma\Delta$ και $A\Delta = B\Gamma = AB$. Φέρουμε τμήματα AE και BZ κάθετα στις διαγωνίους $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. **37135** 4

Να αποδείξετε ότι:

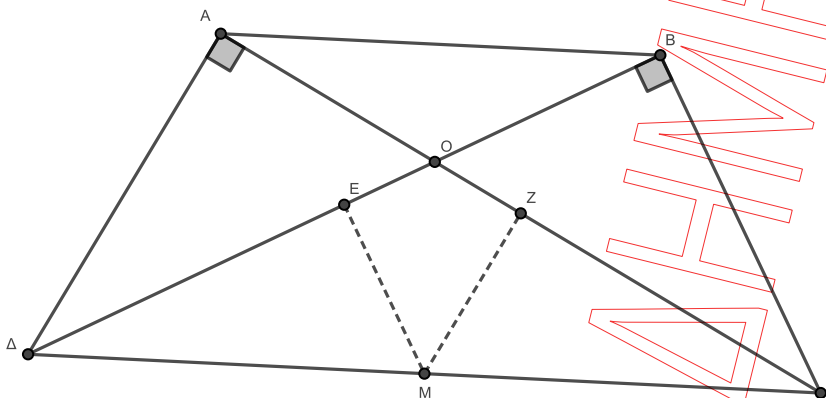
- α) Τα σημεία Z και E είναι μέσα των διαγωνίων $A\Gamma$ και $B\Delta$ αντίστοιχα. (Μονάδες 5)
- β) $AE = BZ$. (Μονάδες 8)
- γ) Το τετράπλευρο $AEZB$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 7)
- δ) Η $B\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας Δ . (Μονάδες 5)



- 38.** Δίνεται ισοσκελές τραπέζιο $AB\Gamma\Delta$ ($AB \parallel \Gamma\Delta$) και O το σημείο τομής των διαγωνίων του. Η $A\Gamma$ είναι κάθετη στην $A\Delta$ και η $B\Delta$ είναι κάθετη στην $B\Gamma$. Θεωρούμε τα μέσα M , E και Z των $\Gamma\Delta$, $B\Delta$ και $A\Gamma$ αντίστοιχα. **37139** 4

Να αποδείξετε ότι:

- α) $ME = MZ$. (Μονάδες 6)
- β) Η MZ είναι κάθετη στην $A\Gamma$. (Μονάδες 6)
- γ) Τα τρίγωνα $M\Delta E$ και $M\Gamma Z$ είναι ίσα. (Μονάδες 7)
- δ) Η OM είναι μεσοκάθετος του EZ . (Μονάδες 6)



39. Έστω ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και AD διάμεσος. Στο τμήμα AD θεωρούμε τυχαίο σημείο K από το οποίο φέρνουμε τα τμήματα KZ και KE κάθετα στις AB και AG αντίστοιχα.

α) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $KB\Gamma$ και KZE είναι ισοσκελή. (Μονάδες 8)

β) Να αποδείξετε ότι το τετράπλευρο $ZE\Gamma B$ είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 10)

γ) Ένας μαθητής στην πορεία της λύσης του έδωσε το εξής επιχείρημα:

«Το τμήμα AD είναι διάμεσος στη βάση ισοσκελούς άρα ύψος και διχοτόμος του τριγώνου $AB\Gamma$ και μεσοκάθετος του $B\Gamma$. Οπότε και το τρίγωνο $BK\Gamma$ είναι ισοσκελές.

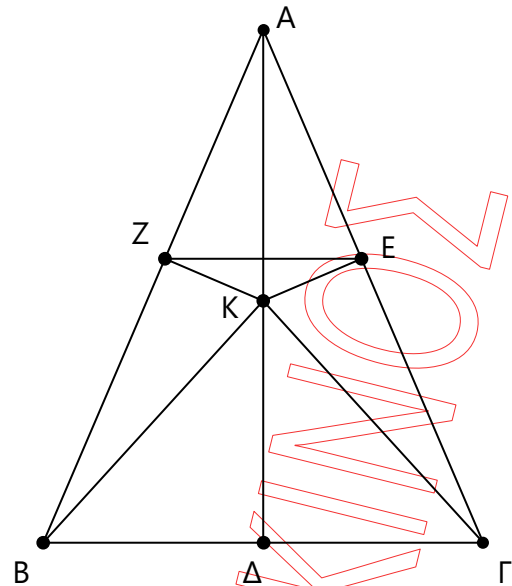
Τα τρίγωνα ABK , AGK έχουν:

1. $BK = K\Gamma$

2. $B\hat{A}K = \Gamma\hat{A}K$ επειδή AK διχοτόμος της $\hat{A}$.

3. $A\hat{B}K = A\hat{\Gamma}K$ ως διαφορές ίσων γωνιών ισοσκελών τριγώνων.

Άρα τα τρίγωνα είναι ίσα βάση του κριτηρίου Γωνία Πλευρά Γωνία.»



Ο καθηγητής είπε ότι η απάντησή του είναι ελλιπής. Να συμπληρώσετε την απάντηση του μαθητή ώστε να ικανοποιεί το κριτήριο Γωνία –Πλευρά- Γωνία διατηρώντας τις πλευρές BK και $K\Gamma$. (Μονάδες 7)

40. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ με $AB < AG$ και το ύψος του AH . Αν Δ , E και Z είναι τα μέσα των AB , AG και $B\Gamma$ αντίστοιχα, να αποδείξετε ότι :

α) το τετράπλευρο ΔEZH είναι ισοσκελές τραπέζιο. (Μονάδες 8)

β) οι γωνίες $H\hat{\Delta}Z$ και $H\hat{E}Z$ είναι ίσες . (Μονάδες 8)

γ) οι γωνίες $E\hat{\Delta}Z$ και $E\hat{H}Z$ είναι ίσες. (Μονάδες 9)