

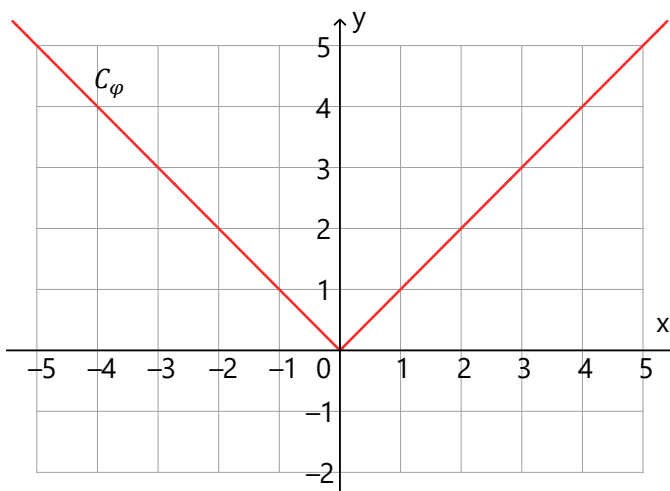
~ K2.2 ΚΑΤΑΚΟΡΥΦΗ-ΟΡΙΖΟΝΤΙΑ ΜΕΤΑΤΟΠΙΣΗ ΚΑΜΠΥΛΗΣ

11 θέματα

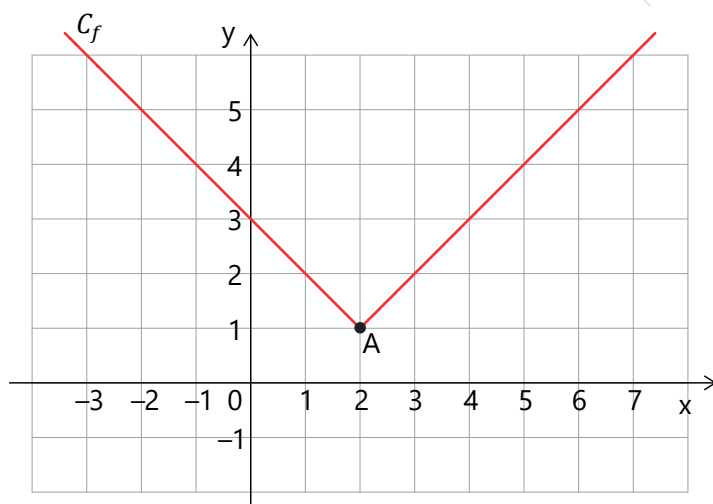
1. Δίνεται η συνάρτηση $\varphi(x) = |x|$, $x \in \mathbb{R}$ με γραφική παράσταση που φαίνεται στο σχήμα. Επιπλέον δίνονται οι συναρτήσεις

$$g(x) = |x - 2|, x \in \mathbb{R} \text{ και } f(x) = |x - 2| + 1, x \in \mathbb{R}$$

α) Να παραστήσετε γραφικά στο ίδιο σύστημα συντεταγμένων τις συναρτήσεις g, f και να εξηγήσετε πώς προκύπτουν μετατοπίζοντας κατάλληλα τη γραφική παράσταση της φ . (Μονάδες 13)

14972²

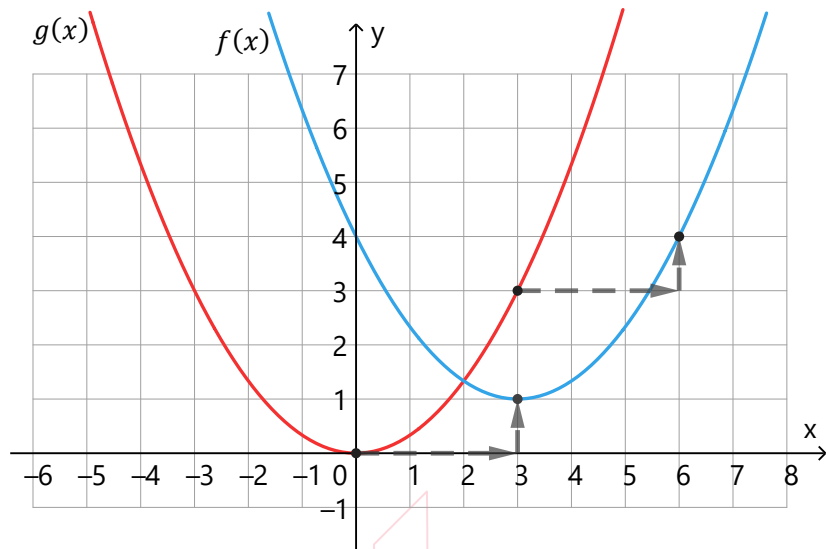
β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της f , η οποία δίνεται παρακάτω,



να βρείτε:

- Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια αύξουσα και γνήσια φθίνουσα. (Μονάδες 6)
- Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι; (Μονάδες 6)

2. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \frac{1}{3}x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x)$ η οποία προκύπτει από μία οριζόντια μετατόπιση της $g(x)$ κατά 3 μονάδες προς τα δεξιά και μετά κατά 1 μονάδα προς τα πάνω.



α) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση όσον αφορά τον τύπο της $f(x)$.

(I)

(II)

(III)

(IV)

$$f(x) = g(x + 3) + 1$$

$$f(x) = g(x + 3) - 1$$

$$f(x) = g(x - 3) + 1$$

$$f(x) = g(x - 3) - 1$$

(Μονάδες 9)

β) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης $f(x)$ και την θέση ελαχίστου.

(Μονάδες 8)

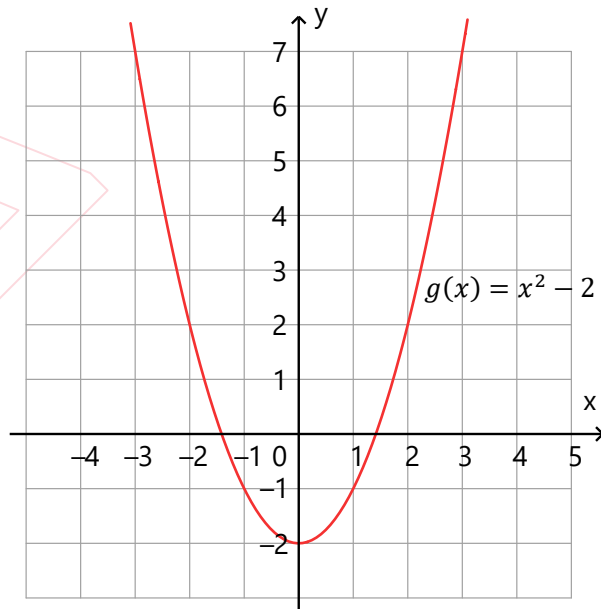
γ) Να γράψετε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση $f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα ή γνησίως φθίνουσα.

(Μονάδες 8)

3. Στο παρακάτω σύστημα συντεταγμένων δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = x^2 - 2$, $x \in \mathbb{R}$.

α) Με βάση τη γραφική της παράσταση,

- να αιτιολογήσετε γιατί η g είναι άρτια. (Μονάδες 9)
- να βρείτε το ελάχιστο της g και τη θέση αυτού. (Μονάδες 7)



β) Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της $f(x) = x^2$ μετατοπίζοντας κατάλληλα την γραφική παράσταση της g που φαίνεται στο παραπάνω σχήμα.

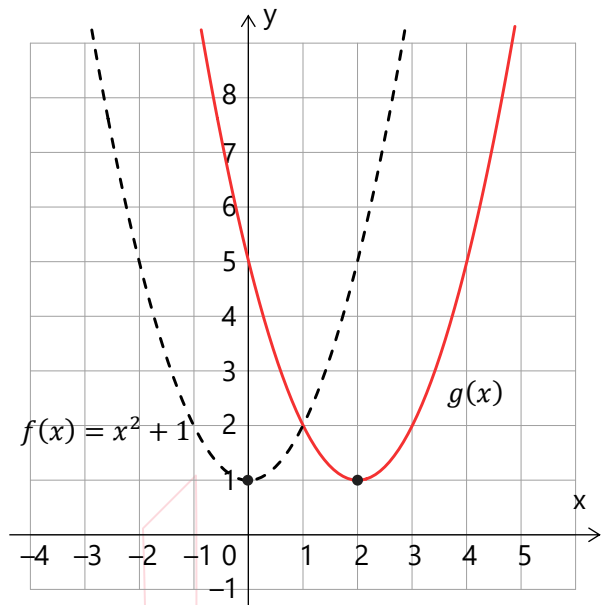
(Μονάδες 9)

4. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = x^2 + 1$ και η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης $g(x)$ με $x \in \mathbb{R}$.

20671²

α)

- Είναι η f άρτια ή περιττή συνάρτηση; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)
- Έχει η f μέγιστη τιμή ή ελάχιστη; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 7)



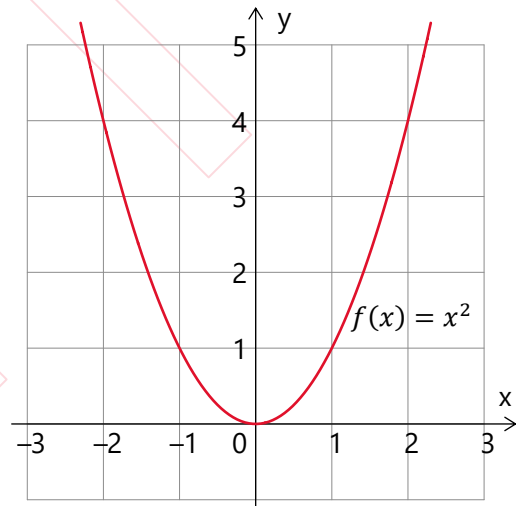
β)

- Με ποια μετατόπιση της γραφικής παράστασης της f προέκυψε η γραφική παράσταση της g ; (Μονάδες 7)
- Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης g . (Μονάδες 4)

5. Στο διπλανό σχήμα φαίνεται η γραφική παράσταση C_f της συνάρτησης $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.

21673²

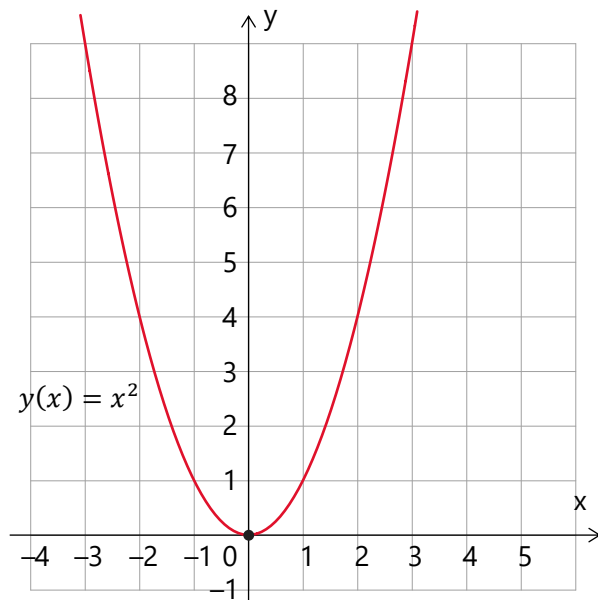
- Να βρείτε τον τύπο της συνάρτησης $\varphi(x)$ της οποίας η γραφική παράσταση προκύπτει από την C_f αν την μετατοπίσουμε μια μονάδα, προς τα πάνω. (Μονάδες 8)
- Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της $\varphi(x)$. (Μονάδες 8)
- Με τη βοήθεια του σχήματος, να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της $\varphi(x)$. (Μονάδες 9)



6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 4x + 5$, $x \in \mathbb{R}$.

32674²

- Να δείξετε ότι η f γράφεται στη μορφή $f(x) = (x - 2)^2 + 1$. (Μονάδες 10)
- Να αναφέρετε με ποιες μετατοπίσεις της $y(x) = x^2$ προκύπτει η γραφική παράσταση της συνάρτησης f , την οποία και να χαράξετε στο σύστημα συντεταγμένων που ακολουθεί. (Μονάδες 15)

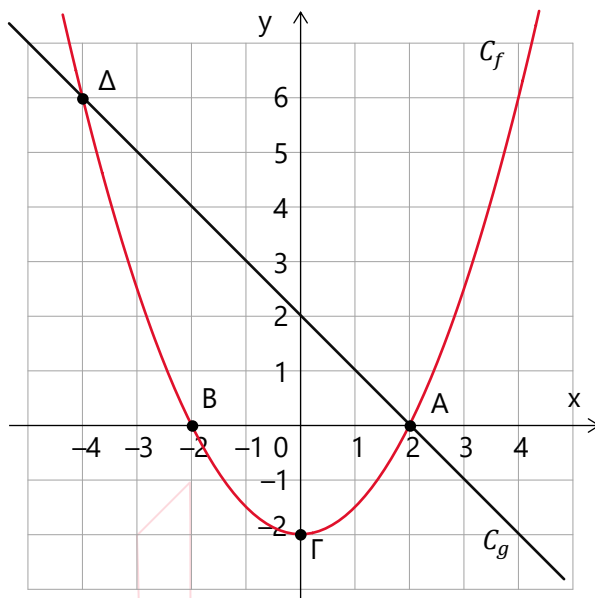


7. Στο σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις μιας παραβολής $f(x) = ax^2 + \beta x + \gamma$ και της ευθείας $g(x) = -x + 2$.

α) Δεδομένου ότι η παραβολή διέρχεται από τα σημεία A, B, Γ , να βρείτε τις τιμές των α, β, γ .
(Μονάδες 8)

β) Αν $\alpha = \frac{1}{2}$, $\beta = 0$ και $\gamma = -2$, να βρείτε αλγεβρικά τις συντεταγμένες των κοινών σημείων της ευθείας και της παραβολής.
(Μονάδες 8)

γ) Αν μετατοπίσουμε την παραβολή κατά 4,5 μονάδες προς τα πάνω, να δείξετε ότι η ευθεία και η παραβολή θα έχουν ένα μόνο κοινό σημείο.
(Μονάδες 9)



14294⁴

8. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = 3x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = 3x^2 - 6x + 8$, $x \in \mathbb{R}$.

14973⁴

α) Να ελέγξετε αν η συνάρτηση φ είναι άρτια ή περιττή και να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση.
(Μονάδες 4)

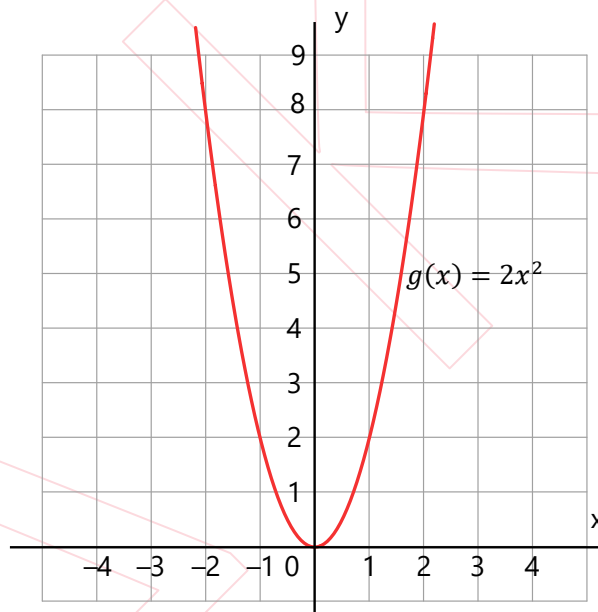
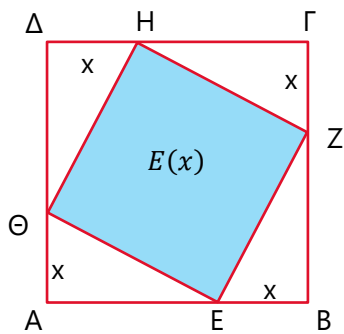
β) Να αποδείξετε ότι $f(x) = 3(x - 1)^2 + 5$, $x \in \mathbb{R}$. Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f , αιτιολογώντας την απάντησή σας.
(Μονάδες 4)

γ) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f , να βρείτε:

- Τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνήσια μονότονη και τον άξονα συμμετρίας της συνάρτησης f .
(Μονάδες 6)
- Το ολικό ακρότατο της f και τη θέση του. Τι είδους ακρότατο είναι;
(Μονάδες 4)
- Το πλήθος των κοινών σημείων της γραφικής παράστασης της f και της ευθείας με εξίσωση $y = \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για τις διάφορες τιμές του πραγματικού αριθμού λ .
(Μονάδες 7)

9. Στο τετράγωνο ΑΒΓΔ του παρακάτω σχήματος με πλευρά 2 cm, παίρνουμε τα εσωτερικά σημεία [20713](#)⁴ Ε,Ζ,Η,Θ των πλευρών ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΑ, αντίστοιχα, ώστε $EB = ZΓ = ΗΔ = ΘΑ = x$ και σχηματίζεται το τετράγωνο ΕΖΗΘ.

- α) Να εκφράσετε την πλευρά ΕΖ ως συνάρτηση του x και να βρείτε τις δυνατές τιμές του x .
(Μονάδες 6)
- β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν του τετραγώνου ΕΖΗΘ συναρτήσει της πλευράς x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = 2(x - 1)^2 + 2$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος.
(Μονάδες 6)
- γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = 2x^2$. Μετατοπίζοντας την κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ΕΖΗΘ να γίνεται ελάχιστο.
(Μονάδες 8)
- δ) Τι συμπέρασμα προκύπτει για τα σημεία Ε,Ζ,Η,Θ στην περίπτωση που το εμβαδόν του ΕΖΗΘ γίνεται ελάχιστο.
(Μονάδες 5)



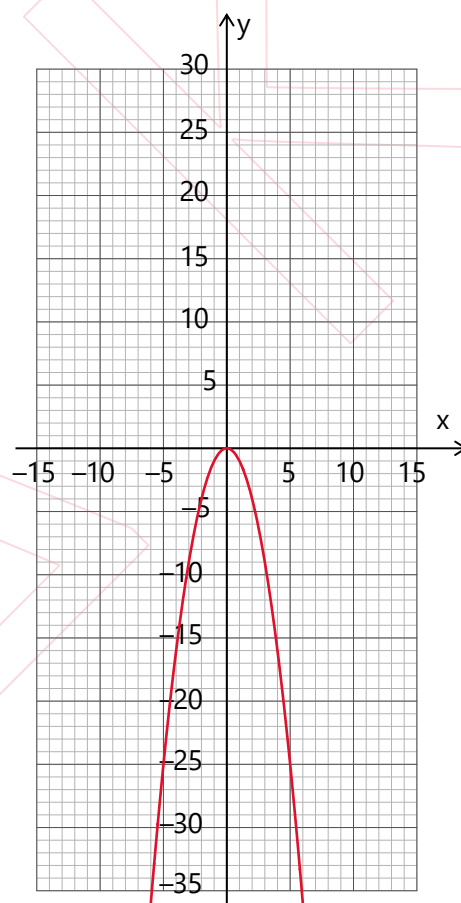
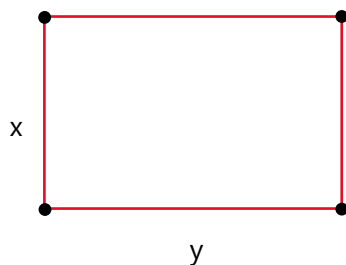
10. Με συρματοπλέγμα μήκους 20 m θέλουμε να περιφράξουμε οικόπεδο σχήματος ορθογωνίου με διαστάσεις x και y , όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. 20715⁴

α) Να εκφράσετε την πλευρά y ως συνάρτηση της πλευράς x και να βρείτε τις δυνατές τιμές της πλευράς x . (Μονάδες 7)

β) Να αποδείξετε ότι το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου ως συνάρτηση του x δίνεται από τη συνάρτηση $E(x) = -(x - 5)^2 + 25$ και να βρείτε το πεδίο ορισμού της στο πλαίσιο του προβλήματος. (Μονάδες 7)

γ) Παρακάτω δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = -x^2$. Μετατοπίζοντάς τη κατάλληλα, να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $E(x)$ και με βάση αυτή, να βρείτε το x έτσι ώστε το εμβαδόν $E(x)$ του ορθογωνίου να γίνεται μέγιστο. (Μονάδες 7)

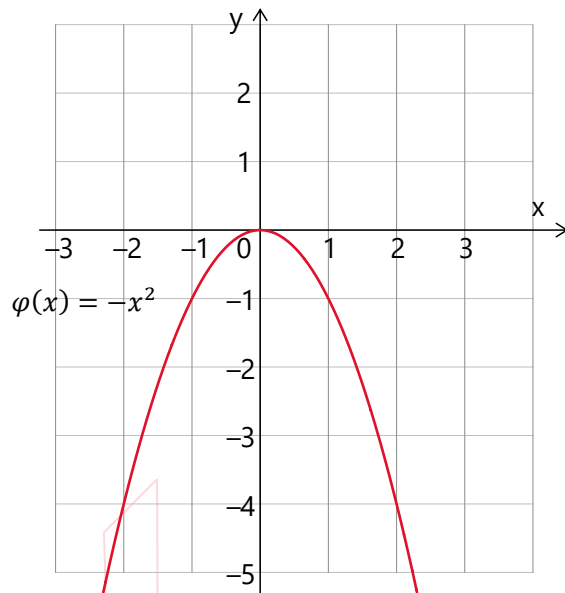
δ) Για την τιμή του x που βρήκατε στο ερώτημα γ), να βρείτε την πλευρά y και να προσδιορίσετε το είδος του ορθογωνίου. (Μονάδες 4)



11. Δίνονται οι συναρτήσεις $\varphi(x) = -x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x^2 + 2x + 1$, $x \in \mathbb{R}$

32677⁴

- α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = -(x - 1)^2 + 2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και στη συνέχεια, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης φ , που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα, να παραστήσετε γραφικά τη συνάρτηση f .



(Μονάδες 10)

- β) Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f να βρείτε:

- i) Τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη.

(Μονάδες 5)

- ii) Το ολικό ακρότατο της f καθώς και τη θέση του.

(Μονάδες 5)

- iii) Το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $f(x) = \kappa$, $\kappa < 2$. Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 5)