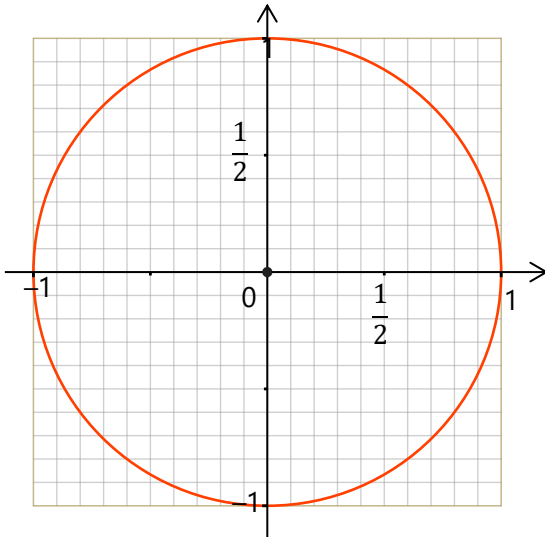


~Κ3.5 ΒΑΣΙΚΕΣ ΤΡΙΓΩΝΟΜΕΤΡΙΚΕΣ ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ

20 ΘΕΜΑΤΑ

14977²

1. α) Στον παρακάτω τριγωνομετρικό κύκλο να σημειώσετε τις τελικές πλευρές δύο γωνιών που ανήκουν στο διάστημα $[0, 2\pi)$, με αρχική πλευρά την ημιευθεία Ox , οι οποίες να έχουν ημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$ και άλλες δύο οι οποίες να έχουν συνημίτονο ίσο με $\frac{1}{2}$



(Μονάδες 12)

- β) Να λύσετε την εξίσωση $\eta\mu x = \frac{1}{2}$ για $x \in \mathbb{R}$.

(Μονάδες 13)

2. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 \sin 2x$, $x \in \mathbb{R}$

15036²

α)

- i. Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 10)

- ii. Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f .

(Μονάδες 5)

- β) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -3$ στο $\mathbb{R}$.

(Μονάδες 10)

3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \sin(13\pi + x) - 2 \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right)$.

15969²

- α) Να δείξετε ότι $\sin(13\pi + x) = -\sin x$.

(Μονάδες 5)

- β) Να δείξετε ότι $f(x) = -4 \sin x$.

(Μονάδες 8)

- γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = -2$.

(Μονάδες 12)

4. Δίνεται γωνία ω , με $0 \leq \omega < 2\pi$ που ικανοποιεί τις σχέσεις: $\sin \omega = -\frac{1}{2}$ και $\eta\mu \omega > 0$.

16298²

- α) Να σχεδιάσετε τη γωνία ω πάνω στον τριγωνομετρικό κύκλο και να βρείτε το μέτρο της.

(Μονάδες 15)

- β) Να βρείτε όλες τις γωνίες φ με $\varphi \in \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $\sin \varphi = -\frac{1}{2}$.

(Μονάδες 10)

5. Πόσες και ποιες λύσεις έχει η εξίσωση $\eta\mu x = \alpha$ στο διάστημα $[-2\pi, 2\pi]$ όταν:

21995²

- α) $\alpha = 1$.

(Μονάδες 13)

- β) $\alpha = -2$.

(Μονάδες 12)

Να αιτιολογήσετε γραφικά, ή όπως αλλιώς θέλετε, την απάντησή σας σε κάθε ένα από τα παραπάνω ερωτήματα.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu x + 1, x \in \mathbb{R}$.

32675²

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f . (Μονάδες 10)

β) Για ποια τιμή του $x \in [0, 2\pi]$ η συνάρτηση παρουσιάζει μέγιστη τιμή; (Μονάδες 15)

7. Ένα ελατήριο με φυσικό μήκος (Φ.Μ.) κρέμεται από το ταβάνι. Τοποθετείται στο ελατήριο ένα σώμα μάζας m και ισορροπεί στη θέση O (Θ.Ι. – Θέση Ισορροπίας), απέχοντας από το πάτωμα απόσταση ίση με 1 μέτρο.

Το σώμα ανεβοκατεβαίνει, ξεκινώντας από τη θέση O , εκτελώντας ταλάντωση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B , οι οποίες απέχουν μεταξύ τους σταθερή απόσταση ίση με $2y_0$.

Η απόσταση του σώματος (σε μέτρα) από το πάτωμα, ως συνάρτηση του χρόνου (σε δευτερόλεπτα), είναι:

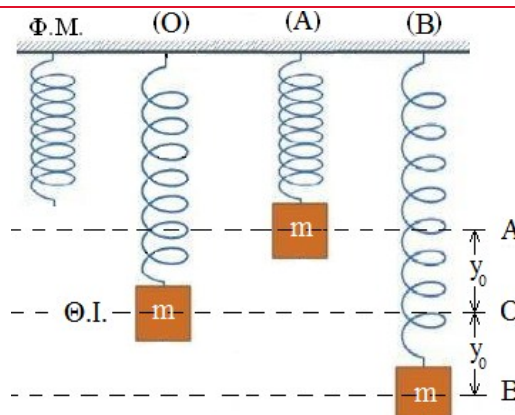
$$y(t) = 1 + 0,2 \cdot \eta\mu \frac{\pi}{2} t$$

α) Να βρείτε το y_0 και στη συνέχεια την απόσταση μεταξύ των δύο ακραίων θέσεων A και B της ταλάντωσης. (Μονάδες 06)

β) Να βρείτε την περίοδο της ταλάντωσης. (Μονάδες 06)

γ) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης για $t \in [0, 4]$. (Μονάδες 06)

δ) Να βρείτε ποιες χρονικές στιγμές, η απόσταση του σώματος από το πάτωμα θα είναι ίση με 1,1 μέτρα, για $t \in [0, 2]$. (Μονάδες 07)



14975⁴

8. Δίνεται η συνάρτηση:

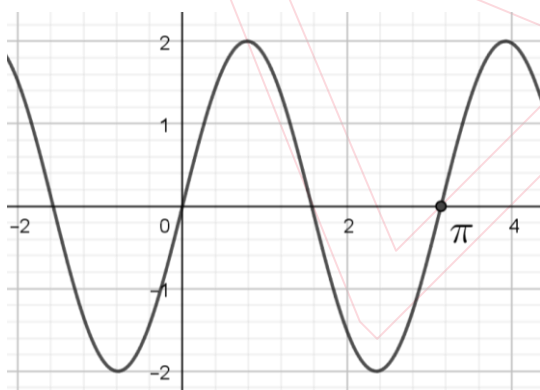
15003⁴

$$f(x) = \eta\mu ax \cdot \left[\sin\left(\frac{\pi}{2} - ax\right) + 2 \right] - \sin ax \cdot \sin(\pi - ax) - 1, \text{ με } a \in \mathbb{R}$$

α)

Να δείξετε ότι $f(x) = 2 \cdot \eta\mu ax$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 10)

Δίνεται επιπλέον ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης f είναι αυτή που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να δείξετε ότι $a = 2$.



(Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τις συντεταγμένες των σημείων τομής της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f με την ευθεία $\varepsilon: y = 1$ για $x \in [0, \pi]$. (Μονάδες 9)

9. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = a \cdot \eta\mu bx$, με a, b ακέραιους θετικούς αριθμούς.

15014⁴

α) Να βρείτε την τιμή του a , αν η μέγιστη τιμή της συνάρτησης είναι 2. (Μονάδες 6)

β) Αν $a = 2$, να δείξετε ότι η μικρότερη τιμή του b για την οποία είναι $f\left(\frac{\pi}{16}\right) = 2$ είναι $b = 8$. (Μονάδες 10)

γ) Αν $a = 2$ και $b = 8$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 1$ στο διάστημα $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. (Μονάδες 9)

10. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 1 + 2 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right), x \in \mathbb{R}$. **15026**⁴

α) Να βρείτε την περίοδο της συνάρτησης f . (Μονάδες 5)

β) Να βρείτε τα ακρότατα της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

γ) Να βρείτε τις τετμημένες των σημείων στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$. (Μονάδες 7)

δ) Να αποδείξετε ότι $(f(x) - 1)^2 + (f(1 - x) - 1)^2 = 4$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. (Μονάδες 7)

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) + \eta\mu(\pi + x), x \in \mathbb{R}$ **15049**⁴

α) Να αποδείξετε ότι $f(x) = \sigma\upsilon\nu x - \eta\mu x$. (Μονάδες 6)

β) Να αποδείξετε ότι $-2 \leq f(x) \leq 2$. Κατόπιν να εξετάσετε αν ο αριθμός 2 είναι η μέγιστη τιμή της συνάρτησης. (Μονάδες 10)

γ) Να βρείτε:

Το σημείο τομής της γραφικής παράστασης C_f της f με τον άξονα $y'y$. (Μονάδες 3)

Δυο σημεία τομής της C_f με τον $x'x$. (Μονάδες 6)

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2 \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$. **15050**⁴

α) Να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της. (Μονάδες 8)

β) Να βρείτε δυο κοινά σημεία της γραφικής παράστασης C_f της f με την ευθεία $y = 1$. (Μονάδες 5)

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $f\left(\frac{\pi}{3}\right)$ και $f\left(\frac{2\pi}{5}\right)$. (Μονάδες 6)

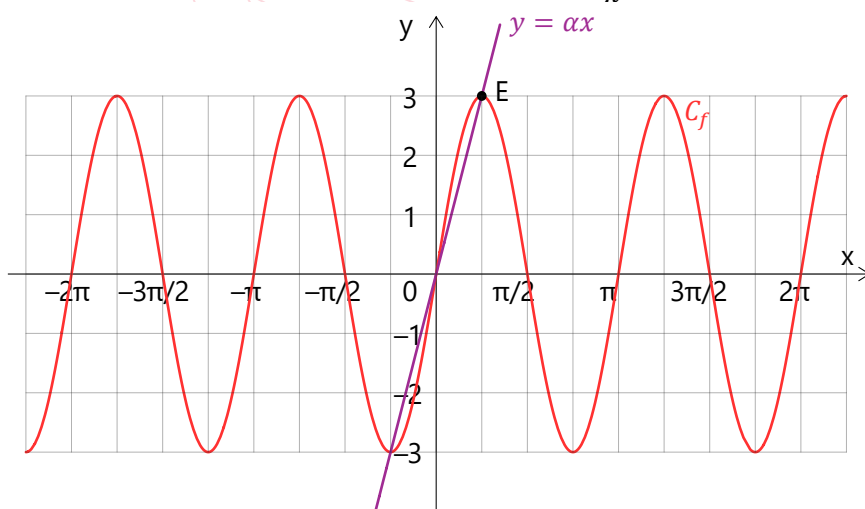
δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική της παράσταση, στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 6)

13. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η ευθεία $y = \alpha x, \alpha \in \mathbb{R}, x \in \mathbb{R}$ και η γραφική παράσταση της συνάρτησης $f(x) = \rho \eta\mu(\omega x)$, όπου $\omega > 0, \rho > 0$ και $x \in \mathbb{R}$. Με βάση το σχήμα, **15287**⁴

α) Να δείξετε ότι $\rho = 3$ και $\omega = 2$. (Μονάδες 6)

β) Να βρείτε τον πραγματικό αριθμό α . (Μονάδες 9)

γ) Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $3 \eta\mu(2x) - \frac{12}{\pi} x = 0$. (Μονάδες 10)

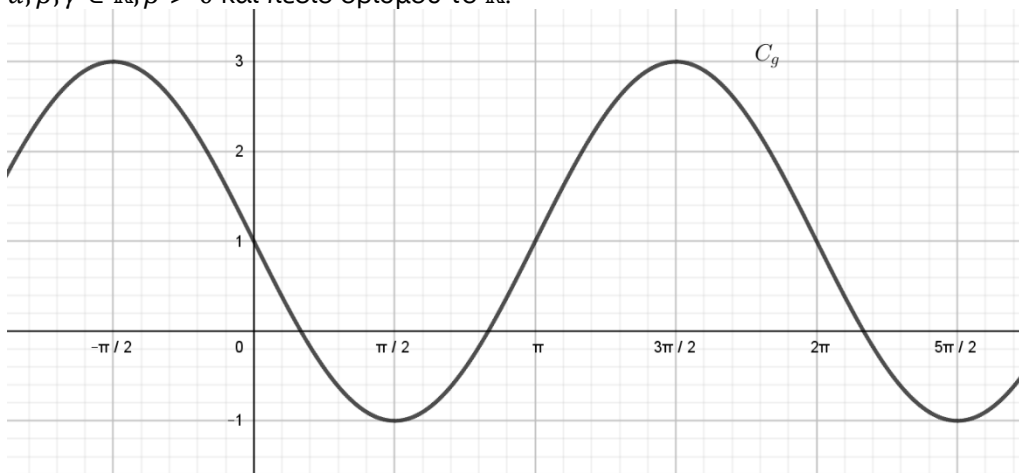


14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\eta\mu 3x + 1, x \in \mathbb{R}$.

15288⁴

α) Να βρείτε την περίοδο T , τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της f . (Μονάδες 3)

β) Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g(x) = \alpha \eta\mu(\beta x) + \gamma$, με $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}, \beta > 0$ και πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$.



Με βάση το σχήμα, να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β και γ . Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. (Μονάδες 12)

Για $\alpha = -2, \beta = 1$ και $\gamma = 1$, να λύσετε την εξίσωση $f(x) = g(x)$ στο διάστημα $[0, \pi)$ (Μονάδες 10)

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2(\pi - x) - 3\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} + x\right) + \alpha$, με $\alpha \in \mathbb{R}$.

15347⁴

α) Να δείξετε ότι $f(x) = 2\sigma\upsilon\nu^2 x - 3\sigma\upsilon\nu x + \alpha$. (Μονάδες 8)

β) Να εξετάσετε αν η συνάρτηση f είναι άρτια ή περιττή. (Μονάδες 5) γ) Να βρείτε το α αν είναι γνωστό ότι η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M\left(\frac{\pi}{3}, 1\right)$. (Μονάδες 5) δ) Για $\alpha = 2$

και $g(x) = 2\eta\mu^2 x + 9\sigma\upsilon\nu x - 9$, να εξετάσετε (αν υπάρχουν) κοινά σημεία των γραφικών παραστάσεων των συναρτήσεων f και g . (Μονάδες 7)

16. α) Να εξετάσετε αν υπάρχει γωνία x τέτοια ώστε $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x = 0$. (Μονάδες 5)

15821⁴

β) Να αποδείξετε ότι εξίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ είναι ισοδύναμη με την εξίσωση $\epsilon\phi x = \sqrt{3}$ και κατόπιν να τη λύσετε στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 7)

γ) Να σχεδιάσετε τις γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x) = \sqrt{3} \cdot \eta\mu x$ και $g(x) = 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο ίδιο σύστημα αξόνων στο διάστημα $[0, 2\pi]$ και να ερμηνεύσετε γραφικά το συμπέρασμα του ερωτήματος β). (Μονάδες 7)

δ) Αξιοποιώντας το ερώτημα γ) να λύσετε γραφικά την ανίσωση $\sqrt{3} \cdot \eta\mu x < 3 \cdot \sigma\upsilon\nu x$ στο διάστημα $[0, 2\pi]$. (Μονάδες 6)

17. Δίνονται οι συναρτήσεις $f(x) = \sigma\upsilon\nu\left(x - \frac{\pi}{4}\right), g(x) = \sigma\upsilon\nu x, x \in \mathbb{R}$.

20645⁴

α) Να περιγράψετε με ποιο τρόπο από τη γραφική παράσταση της g προκύπτει η γραφική παράσταση της f . (Μονάδες 6)

β) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)

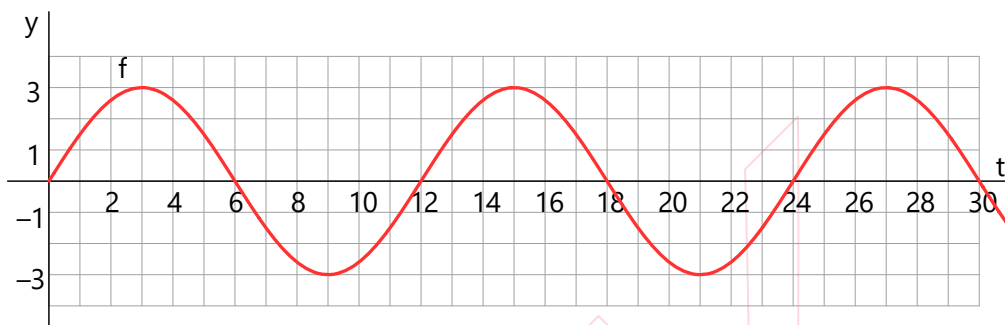
γ) Να βρείτε τις τιμές $f\left(\frac{\pi}{2}\right), f(\pi)$. (Μονάδες 6)

δ) Να λύσετε την εξίσωση $\sqrt{2}f(x) + 1 = 0$. (Μονάδες 7)

- 18.** Σε μια θαλάσσια περιοχή, λόγω της παλίρροιας, η στάθμη των υδάτων αυξομειώνεται. Στο παρακάτω σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της ημιτονοειδούς συνάρτησης f , που δίνει σε μέτρα το ύψος της στάθμης των υδάτων συναρτήσει του χρόνου t σε ώρες. Να βρείτε :

20712 ⁴

- α) την υψομετρική διαφορά ανάμεσα στην υψηλότερη στάθμη (πλημμυρίδα) και τη χαμηλότερη στάθμη (άμπωτη). (Μονάδες 6)
 β) την περίοδο του φαινομένου της παλίρροιας. (Μονάδες 6)
 γ) τον τύπο της συνάρτησης f . (Μονάδες 6)
 δ) ποιες ώρες, στη διάρκεια μιας ημέρας, η στάθμη των υδάτων είναι $\frac{3}{2}$ μέτρα. (Μονάδες 7)



- 19.** Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 3 + \sqrt{3}\varepsilon\varphi\omega \cdot \eta\mu\chi$, $x \in \mathbb{R}$. Αν για τη γωνία ω ισχύει η σχέση

20747 ⁴

$$-2\sigma\upsilon\nu^2\omega + \eta\mu\omega = -1, \quad \omega \in [0, \frac{\pi}{2}], \text{ τότε:}$$

α)

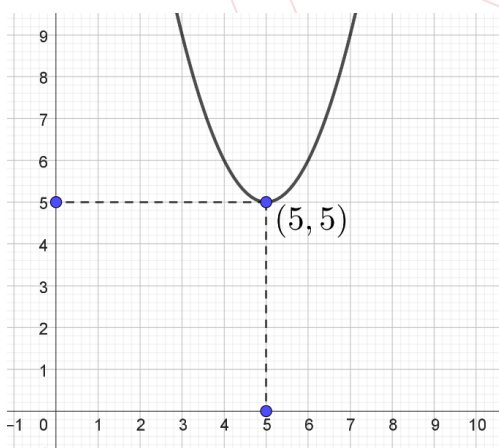
$$\text{Να αποδείξετε ότι } \varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}.$$

(Μονάδες 10)

Για $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\sqrt{3}}{3}$, να βρείτε τη μέγιστη και την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης f .

(Μονάδες 04)

β) Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = x^2 - 10x + 30$, $x \in \mathbb{R}$ και η γραφική της παράσταση στο παρακάτω σχήμα.



Να βρείτε, με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης ή με οποιονδήποτε άλλο τρόπο, την ελάχιστη τιμή της συνάρτησης g .

(Μονάδες 04)

Να εξετάσετε αν οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f , g έχουν κοινά σημεία. Να

αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

(Μονάδες 07)

20. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\alpha+1}{2} \sin(\beta x)$, με $\alpha, \beta > 0$, η οποία έχει ελάχιστο -2 και περίοδο $\frac{\pi}{2}$. 21244⁴

α) Να δείξετε ότι $\alpha = 3$ και $\beta = 4$.

(Μονάδες 5)

β) Δίνεται η παράσταση

$$A = \frac{\eta\mu\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \cdot \varepsilon\varphi(\pi - x) \cdot \eta\mu(2\pi + x)}{\sigma\upsilon\nu(3\pi - x) \cdot \sigma\varphi\left(\frac{7\pi}{2} - x\right) \cdot \sigma\upsilon\nu\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$$

Να δείξετε ότι $A = -1$.

(Μονάδες 10)

γ) Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2 \cdot A$, στο διάστημα $\left[\pi, \frac{3\pi}{2}\right]$.

(Μονάδες 10)

