

ΛΥΣΗ

α) Η συνάρτηση f ορίζεται μόνο για $x + 3 \geq 0$, δηλαδή για $x \geq -3$.

Άρα, το πεδίο ορισμού της f είναι: $A_f = [-3, +\infty)$.

Σύμφωνα με το σχήμα η f είναι γνησίως αύξουσα στο $[-3, +\infty)$.

Η συνάρτηση g παριστάνει ευθεία για κάθε πραγματική τιμή του x και είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$, εφόσον είναι της μορφής $y = \alpha x + \beta$ με $\alpha > 0$.

β) Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} = 3x - 1$ είναι οι τετμημένες των κοινών σημείων των C_f και C_g που ανήκουν στο σύνολο $A = A_f \cap A_g = [-3, +\infty)$.

Από το σχήμα παρατηρούμε πως οι γραφικές παραστάσεις τέμνονται στο σημείο $(1,2)$, δηλαδή στο σημείο με τετμημένη $x=1$ και $1 \in A$.

Άρα, η εξίσωση έχει μοναδική λύση $x=1$.

β) Εναλλακτική λύση :

Οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ προκύπτουν από τις λύσεις της παρακάτω εξίσωσης

$$\sqrt{x+3} = 3x - 1.$$

Η εξίσωση ορίζεται για $x \geq -3$ και $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$.

$\sqrt{x+3} = 3x - 1$ υψώνουμε και τα δυο μέλη στο τετράγωνο

$$\sqrt{x+3}^2 = (3x-1)^2 \Leftrightarrow x+3 = 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow 9x^2 - 7x - 2 = 0.$$

Οι ρίζες του τριωνύμου είναι 1 και $-\frac{2}{9}$. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η $x=1$ είναι δεκτή.

Άρα, μοναδική λύση της εξίσωσης $f(x) = g(x)$ είναι η $x=1$.

γ) i. Η ανίσωση $f(x) < g(x)$ λύνεται γραφικά με το να βρούμε τις τετμημένες, δηλαδή τα x , όπου η C_f είναι κάτω από C_g .

Από το σχήμα προκύπτει πως αυτό συμβαίνει για $x \in (1, +\infty)$.

ii. Αλγεβρικά η ανίσωση λύνεται:

Για $3x - 1 \geq 0 \Leftrightarrow x \geq \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε

$$f(x) < g(x) \Leftrightarrow \sqrt{x+3} < 3x-1 \Leftrightarrow \sqrt{x+3}^2 < (3x-1)^2 \Leftrightarrow$$

$$x+3 < 9x^2 - 6x + 1 \Leftrightarrow$$

$$9x^2 - 7x - 2 > 0 \text{ τότε}$$

$$x \in (-\infty, -\frac{2}{9}) \cup (1, +\infty).$$

Σύμφωνα με τους περιορισμούς η ανίσωση αληθεύει για $x \in (1, +\infty)$.

Για $3x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < \frac{1}{3}$ και $x \geq -3$, έχουμε $\sqrt{x+3} < 3x-1$ αδύνατη.