

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση του πολυωνύμου $P(x)$ με το πολυώνυμο $\delta(x)$:

$$\begin{array}{r|l}
 x^4 + x^3 & + \alpha x - 4 \\
 -x^4 + 3x^3 - 2x^2 & \\
 \hline
 4x^3 - 2x^2 & + \alpha x - 4 \\
 -4x^3 + 12x^2 & - 8x \\
 \hline
 10x^2 & + (\alpha - 8)x - 4 \\
 -10x^2 & + 30x - 20 \\
 \hline
 & (\alpha + 22)x - 24
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x^2 - 3x + 2 \\
 \hline
 x^2 + 4x + 10
 \end{array}$$

Η ταυτότητα της διαίρεσης είναι:

$$P(x) = \delta(x) \cdot (x^2 + 4x + 10) + (\alpha + 22)x - 24$$

Επομένως πρέπει να ισχύει $(\alpha + 22)x - 24 = 24x - 24$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Είναι:

$$(\alpha + 22)x - 24 = 24x - 24 \Leftrightarrow \alpha + 22 = 24 \Leftrightarrow \alpha = 2.$$

β) Για $\alpha = 2$, είναι $P(x) = x^4 + x^3 + 2x - 4$.

i. Το υπόλοιπο της διαίρεσης του $P(x)$ με το $x - 1$ είναι το $P(1) = 0$.

ii. Ζητείται η επίλυση της εξίσωσης $P(x) = 0$.

Είναι: $P(1) = 0 \Leftrightarrow 1$ ρίζα του $P(x) \Leftrightarrow x - 1$ παράγοντας του $P(x)$.

Εφαρμογή του σχήματος Horner:

1	1	0	2	-4	$\rho=1$
	1	2	2	4	
1	2	2	4	0	

Επομένως ισχύει: $P(x) = (x - 1) \cdot (x^3 + 2x^2 + 2x + 4)$

$$\text{Αλλά } x^3 + 2x^2 + 2x + 4 = x^2(x + 2) + 2(x + 2) = (x + 2)(x^2 + 2).$$

Τελικά ισχύει $P(x) = (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 2)$.

Είναι λοιπόν

$$P(x) = 0 \Leftrightarrow (x - 1) \cdot (x + 2) \cdot (x^2 + 2) = 0 \xLeftrightarrow{x^2+2 \neq 0} x = 1 \text{ ή } x = -2.$$

Επομένως, τα σημεία τομής του άξονα $x'x$ με την γραφική παράσταση της πολυωνυμικής συνάρτησης $P(x)$, είναι τα $A(-2,0)$ και $B(1,0)$.

iii. Ζητείται η επίλυση της ανίσωσης $P(x) < 0$.

Το πρόσημο των τιμών του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα προσήμων:

x	$-\infty$	- 2	1	$+\infty$
$x - 1$	-		- 0 +	
$x + 2$	-	0	+	+
$x^2 + 2$	+		+	+
$P(x)$	+	0	- 0	+

Ως εκ τούτου, $P(x) < 0 \Leftrightarrow -2 < x < 1$.