

ΛΥΣΗ

α) Η διαίρεση $P(x) : (x^2 - 4)$ φαίνεται παρακάτω

$$\begin{array}{r|l}
 x^5 - 4x^3 - x^2 + \alpha x + \beta & x^2 - 4 \\
 \underline{-x^5 + 4x^3} & x^3 - 1 \\
 & \underline{-x^2 + \alpha x + \beta} \\
 & x^2 \quad -4 \\
 & \underline{ } \\
 & \alpha x + \beta - 4
 \end{array}$$

β) Από το α) ερώτημα έχουμε ότι το υπόλοιπο της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι το πολυώνυμο $\alpha x + \beta - 4$. Όμως από την εκφώνηση δίνεται ότι είναι το πολυώνυμο $4x + 1$. Συνεπώς τα πολυώνυμα $\alpha x + \beta - 4$ και $4x + 1$ πρέπει να είναι ίσα, δηλαδή $\alpha = 4$ και $\beta = 5$.

γ) Για $\alpha = 4$ και $\beta = 5$ έχουμε $P(x) = x^5 - 4x^3 - x^2 + 4x + 5$.

i. Η ταυτότητα της διαίρεσης $P(x) : (x^2 - 4)$ είναι $P(x) = (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1$.

ii. Αξιοποιώντας την ταυτότητα της διαίρεσης που βρήκαμε παραπάνω έχουμε

$$P(x) < 4x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x^3 - 1) + 4x + 1 < 4x + 1 \Leftrightarrow (x^2 - 4)(x - 1)(x^2 + x + 1) < 0.$$

Το πρόσημο του πολυωνύμου $\Pi(x) = (x^2 - 4)(x - 1)(x^2 + x + 1)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-2	1	2	$+\infty$		
x^2-4	+	○	-	-	○	+	
$x-1$	-	-	○	+	+		
x^2+x+1	+	+	+	+			
$\Pi(x)$	-	○	+	○	-	○	+

Συνεπώς η ζητούμενη ανίσωση αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, -2) \cup (1, 2)$.