

ΛΥΣΗ

α) Είναι $P(x) = \alpha x^3 + \beta x^2 + x = x(\alpha x^2 + \beta x + 1)$, οπότε έχει μία ρίζα τη $x=0$. Συνεπώς οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες, θα είναι ρίζες του τριωνύμου $\alpha x^2 + \beta x + 1$, που επειδή έχει ακέραιους συντελεστές, θα πρέπει οι δύο αυτές ακέραιες ρίζες να είναι διαιρέτες του σταθερού όρου, δηλαδή του 1. Δεδομένου ότι οι μόνοι διαιρέτες του 1 είναι το 1 και το -1, συμπεραίνουμε ότι οι άλλες δύο ακέραιες ρίζες είναι το 1 και το -1.

Τελικά το $P(x)$ έχει ρίζες τους αριθμούς 0, 1 και -1.

β) Είναι $P(1) = 0 \Leftrightarrow \alpha + \beta + 1 = 0$ (1).

Επίσης $P(-1) = 0 \Leftrightarrow -\alpha + \beta - 1 = 0$ (2).

Με πρόσθεση κατά μέλη των (1) και (2) έχουμε ότι $2\beta = 0 \Leftrightarrow \beta = 0$ και με αντικατάσταση στην (1) έχουμε ότι $\alpha = -1$.

γ) Με $\alpha = -1$ και $\beta = 0$ είναι $P(x) = -x^3 + x = x(1 - x^2)$

ι. Το πρόσημό του $P(x)$ φαίνεται στον παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	-1	0	1	$+\infty$		
x	-	-	○	+	+		
$1 - x^2$	-	○	+	+	○	-	
$P(x)$	+	○	-	○	+	○	-

Συνεπώς η ανίσωση $P(x) > 0$ αληθεύει για κάθε $x \in (-\infty, -1) \cup (0, 1)$.

ii. Είναι $\log \sqrt{10} = \log 10^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2} \cdot \log 10 = \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{2}$, οπότε $P(\log \sqrt{10}) = P(\frac{1}{2}) > 0$, αφού όπως

δείξαμε παραπάνω $P(x) > 0$ για $x \in (0, 1)$.