

ΛΥΣΗ

α)

i. Έχουμε:

$$x(e^x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } e^x - 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } e^x = 1$$

$$\Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } e^x = e^0$$

$$\Leftrightarrow x = 0$$

ii. Από το ερώτημα (i) γνωρίζουμε ότι κάθε παράγοντας του γινομένου $x(e^x - 1)$ έχει ρίζα το 0. Ακόμη είναι $e^x - 1 > 0 \Leftrightarrow e^x > 1 \Leftrightarrow e^x > e^0 \Leftrightarrow x > 0$ και $e^x - 1 < 0 \Leftrightarrow x < 0$. Ο προσδιορισμός του προσήμου του γινομένου $x(e^x - 1)$ γίνεται με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x	—		+
$e^x - 1$	—		+
$x(e^x - 1)$	+		+

Έτσι το γινόμενο $x(e^x - 1)$ είναι θετικό για κάθε $x \neq 0$.

β)

i. Η συνάρτηση f ορίζεται για εκείνες τις τιμές του x , για τις οποίες ισχύει $x(e^x - 1) \geq 0$. Από το ερώτημα (α) προκύπτει ότι $x(e^x - 1) \geq 0 \Leftrightarrow x \in \mathbb{R}$. Άρα το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f είναι το $\mathbb{R}$.

ii. Είναι

$$f(0) = \sqrt{0 \cdot (e^0 - 1)} = 0$$

$$f(\ln 2) = \sqrt{\ln 2 \cdot (e^{\ln 2} - 1)} = \sqrt{\ln 2 \cdot (2 - 1)} = \sqrt{\ln 2}$$

$$f(-\ln 2) = \sqrt{-\ln 2 \cdot (e^{-\ln 2} - 1)} = \sqrt{-\ln 2 \cdot \left(e^{\frac{\ln 1}{2}} - 1\right)} = \sqrt{-\ln 2 \cdot \left(\frac{1}{2} - 1\right)} = \sqrt{\frac{\ln 2}{2}}$$

iii. Επειδή ισχύει $-\ln 2 < 0$ και $f(-\ln 2) > f(0)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως αύξουσα στο $\mathbb{R}$.

Επειδή ισχύει $0 < \ln 2$ και $f(0) < f(\ln 2)$ συμπεραίνουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

Τελικά, ο ισχυρισμός « η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x(e^x - 1)}$ είναι γνησίως μονότονη στο πεδίο ορισμού της» είναι ψευδής.