

ΛΥΣΗ

α) Από τα δεδομένα έχουμε:

$$\begin{cases} P(1)=2 \\ P(2)=15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 \cdot 1^3 - \alpha \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 + \beta = 2 \\ 2 \cdot 2^3 - \alpha \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + \beta = 15 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -\alpha + \beta = -2 \\ -4\alpha + \beta = -5 \end{cases} \stackrel{(-)}{\Leftrightarrow} \begin{cases} -3\alpha = -3 \\ -\alpha + \beta = -2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = -1. \end{cases}$$

Άρα  $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ .

β)

i. Από το α) ερώτημα, έχουμε  $P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1$ . Οπότε:

$$P(x) = 2x^3 - x^2 + 2x - 1 = x^2(2x - 1) + (2x - 1) = (2x - 1)(x^2 + 1). \quad \text{Άρα το πολυώνυμο}$$

$\pi(x) = x^2 + 1$  είναι παράγοντας του  $P(x)$ .

ii. Έχουμε ισοδύναμα:

$$P(x) = 0, \text{ δηλαδή}$$

$$(2x - 1)(x^2 + 1) = 0, \text{ οπότε}$$

$$(2x - 1) = 0 \text{ (αφού } x^2 + 1 \neq 0 \text{ για κάθε } x) \text{ και τελικά}$$

$$x = \frac{1}{2}.$$

γ) Έχουμε ισοδύναμα:

$$\sigma\upsilon\nu^3 x + \sigma\upsilon\nu x = 1 - \frac{1}{2} \eta\mu^2 x \stackrel{\substack{(\eta\mu^2 x = 1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \\ (2)}}{\Leftrightarrow}$$

$$2\sigma\upsilon\nu^3 x + 2\sigma\upsilon\nu x = 2 - (1 - \sigma\upsilon\nu^2 x) \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^3 x + 2\sigma\upsilon\nu x = 2 - 1 + \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow$$

$$2\sigma\upsilon\nu^3 x - \sigma\upsilon\nu^2 x + 2\sigma\upsilon\nu x - 1 = 0 \stackrel{(\alpha)}{\Leftrightarrow}$$

$$P(\sigma\upsilon\nu x) = 0.$$

Οπότε από το βii) ερώτημα έχουμε  $\sigma\upsilon\nu x = \frac{1}{2}$  και επειδή  $x \in (0, 2\pi)$ ,

$$x = \frac{\pi}{3}, \quad x = 2\pi - \frac{\pi}{3} = \frac{5\pi}{3}.$$