

ΛΥΣΗ

α) Η f είναι περιττή και $f(-1)=2$. Αλλά, $f(-1)=-f(1)$ δηλαδή $f(1)=-f(-1)$, οπότε έχουμε $f(1)=-2$.

Η συνάρτηση f είναι γνησίως μονότονη και $f(-1) > f(1)$, οπότε είναι γνησίως φθίνουσα στο $\mathbb{R}$.

β) Από την ισότητα $f(-x)=-f(x)$ που ισχύει για όλα τα x , αφού η f είναι περιττή, με $x=0$ παίρνουμε:

$$f(-0)=-f(0) \Rightarrow f(0)+f(0)=0 \Rightarrow 2f(0)=0 \Rightarrow f(0)=0$$

Άρα η γραφική παράσταση της f διέρχεται από την αρχή O .

γ) Η f είναι γνησίως φθίνουσα και ισχύει $f(0)=0$, οπότε:

- Αν $x > 0$, τότε $f(x) < f(0)=0$, οπότε $f(x) < 0$.
- Αν $x < 0$, τότε $f(x) > f(0)=0$, οπότε $f(x) > 0$.

Παρατηρούμε ότι $f(0)=0$ και $g(0)=e^0-1=1-1=0$, οπότε οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g έχουν κοινό σημείο το O .

Γεωμετρικά, η μοναδικότητα του κοινού σημείου αιτιολογείται από το γεγονός ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα, η g γνησίως φθίνουσα και έχουν κοινό το σημείο O . Ένα ενδεικτικό σχήμα είναι το διπλανό.

Αλγεβρικά, αν $x > 0$ τότε έχουμε $f(x) < 0$ και $g(x)=e^x-1 > 0$ οπότε $f(x) < 0 < g(x)$, ενώ αν $x < 0$ τότε $f(x) > 0$ και $g(x)=e^x-1 < 0$ οπότε $f(x) > 0 > g(x)$.

Επομένως, οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων f, g δεν έχουν άλλο κοινό σημείο πέρα από το O .

δ) Ο τύπος της συνάρτησης h που έχει τη γραφική παράσταση που περιγράφεται στην εκφώνηση είναι

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x+2)+1 = -2(x+2)^3+1 = -2(x^3+6x^2+12x+8)+1 \\ &= -2x^3-12x^2-24x-16+1 = -2x^3-12x^2-24x-15 \end{aligned}$$

