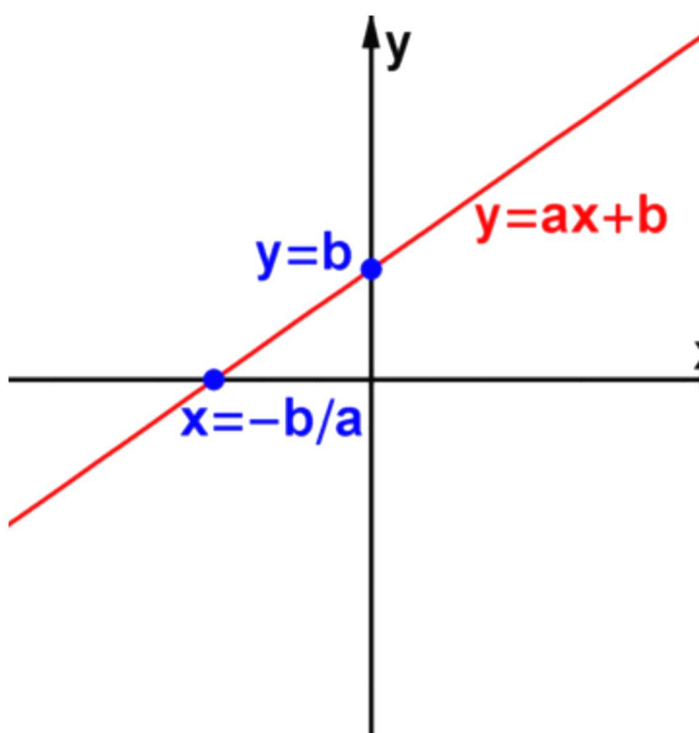


Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

Συναρτήσεις

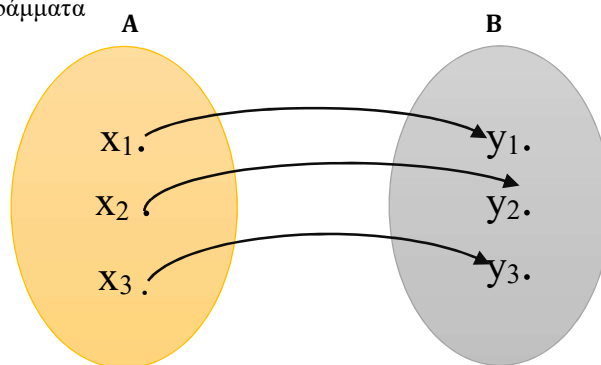


ΣΤΟΛΗ ΧΡΙΣΤΙΝΑ ΠΕ03-ΠΕ20
9^ο ΓΥΜΝΑΣΙΟ ΑΘΗΝΩΝ
ΣΧΟΛΙΚΟ ΕΤΟΣ 2016-2017

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Συνάρτηση από ένα σύνολο A σ' ένα σύνολο B , λέγεται ένας τρόπος σύνδεσης των στοιχείων των δύο αυτών συνόλων, έτσι ώστε **σε κάθε στοιχείο του συνόλου A να αντιστοιχίζεται σε ένα μόνο στοιχείο του συνόλου B .**

Μία οπτική έννοια της συνάρτησης έχουμε με τα παρακάτω διαγράμματα



Τα στοιχεία του συνόλου A τα συμβολίζουμε με x_1, x_2, x_3 κ.ο.κ. και τα στοιχεία του συνόλου B με y_1, y_2, y_3 κ.ο.κ. Στην περίπτωση αυτή λέμε ότι « **Η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x .**»

ΤΙΜΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Όταν μία μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x , τότε για μία τιμή του x προκύπτει μόνο μία τιμή για τη μεταβλητή y . Τα ζευγαράκια (x, y) που προκύπτουν τα ονομάζουμε τιμές της συνάρτησης.

Παράδειγμα

Έστω ότι έχουμε τη συνάρτηση με τύπο $y = 2x - 1$.

Μπορούμε να βρούμε τιμές της συνάρτησης βάζοντας στη θέση του x μία τιμή και τότε θα πάρουμε την αντίστοιχη τιμή του y .

- Για $x=-2$, έχουμε $y = 2 \cdot (-2) - 1 = -4 - 1 = -5$
- Για $x=-1$, έχουμε $y = 2 \cdot (-1) - 1 = -2 - 1 = -3$
- Για $x=0$, έχουμε $y = 2 \cdot 0 - 1 = 0 - 1 = -1$
- Για $x=1$, έχουμε $y = 2 \cdot 1 - 1 = 2 - 1 = 1$
- Για $x=2$, έχουμε $y = 2 \cdot 2 - 1 = 4 - 1 = 3$

ΠΙΝΑΚΑΣ ΤΙΜΩΝ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Σε μία συνάρτηση η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών x και y υποτυπώνεται καλύτερα με την βοήθεια ενός πίνακα τιμών. Συγκεκριμένα για το προηγούμενο παράδειγμα έχουμε:

Η συνάρτηση είναι $y = 2x - 1$:

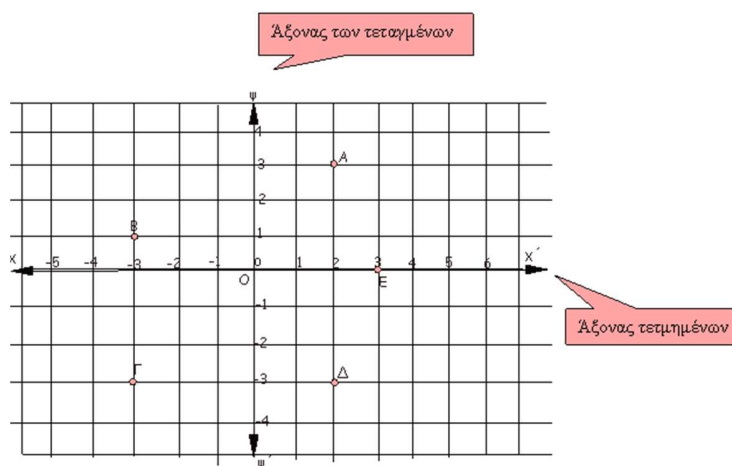
x	-2	-1	0	1	2
y	-5	-3	-1	1	3

ΣΥΣΤΗΜΑ ΑΞΟΝΩΝ

Ένα σύστημα **ορθογωνίων αξόνων** προκύπτει αν σχεδιάσουμε δύο **κάθετους άξονες** xx' και yy' με **κοινή αρχή το σημείο O**. Σε περίπτωση που οι **μονάδες μέτρησης** και **στους δύο άξονες** είναι η **ίδια**, τότε το σύστημα το ονομάζουμε **Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων**.

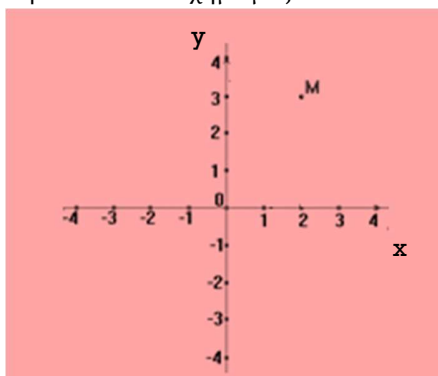
Το σημείο **O** ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.

Στην εικόνα που ακολουθεί απεικονίζεται ένα Ορθοκανονικό σύστημα αξόνων:



ΣΥΝΤΕΤΑΓΜΕΝΕΣ ΣΗΜΕΙΟΥ

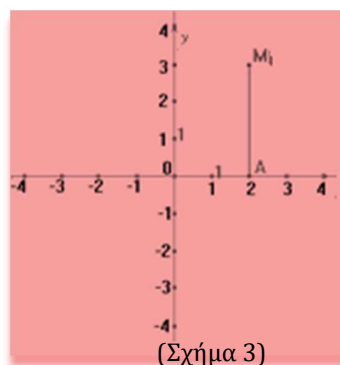
Η θέση ενός σημείου στο επίπεδο, προσδιορίζεται από ένα ζεύγος τιμών (x, y) . Αν θέλουμε να τοποθετήσουμε ένα αντικείμενο σε ένα επίπεδο θα πρέπει με κάποιον τρόπο να προσδιορίσουμε τη θέση του. Έστω το αντικείμενο **M** που φαίνεται στο σχήμα μας.



(Σχήμα 2)

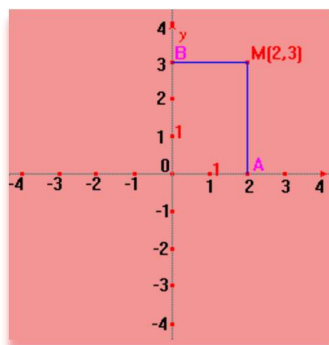
Τότε θα χρησιμοποιήσουμε ένα διατεταγμένο ζεύγος αριθμών (το ονομάζουμε διατεταγμένο γιατί έχει σημασία η σειρά που θα γράψουμε τους αριθμούς) τους οποίους τους βρίσκουμε ως εξής:

Από το σημείο M φέρνουμε μία ευθεία κάθετη στον άξονα xx' και βρίσκουμε το σημείο που τον τέμνει, το οποίο αντιστοιχεί στον αριθμό x .



Άρα $x=2$

Από το σημείο M φέρνουμε μία ευθεία κάθετη στον άξονα yy' και βρίσκουμε το σημείο που τον τέμνει, το οποίο αντιστοιχεί στον αριθμό y .



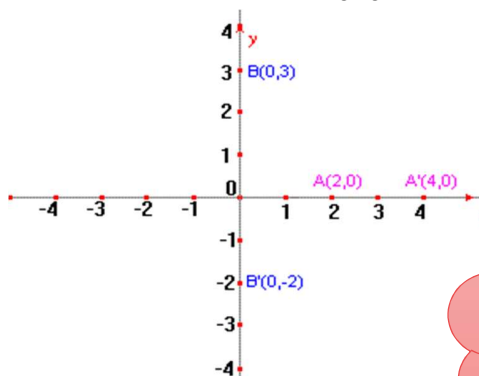
Άρα $y=3$

Με τον τρόπο αυτό, στο σημείο M αντιστοιχούμε ένα ζεύγος αριθμών (x,y) και γράφουμε $M(x,y)$. Στην περίπτωση μας έχουμε $M(2,3)$.

ΣΧΟΛΙΑ

- Οι αριθμοί (x,y) λέγονται συντεταγμένες του σημείου M .
- Ο αριθμός x (ο πρώτος) λέγεται τετμημένη του σημείου M .
- Ο αριθμός y (ο δεύτερος) λέγεται τεταγμένη του σημείου M .

ΠΡΟΣΟΧΗ!!!!!!



Αν ένα σημείο βρίσκεται πάνω στον άξονα xx' τότε η τεταγμένη του είναι πάντα 0 δηλαδή $M(x,0)$.

Σημεία A, A'

Αν ένα σημείο βρίσκεται πάνω στον άξονα yy' τότε η τετμημένη του είναι πάντα 0 δηλαδή $M(0,y)$.

Σημεία B, B'

ΑΠΟΣΤΑΣΗ ΕΝΟΣ ΣΗΜΕΙΟΥ ΑΠΟ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ

Ένα σημείο με συντεταγμένες $M(x,y)$ απέχει απόσταση από τον άξονα xx' ίση με την απόλυτη τιμή της τεταγμένης του (δηλαδή $|y|$).

Ένα σημείο με συντεταγμένες $M(x,y)$ απέχει απόσταση από τον άξονα yy' ίση με την απόλυτη τιμή της τετμημένης του (δηλαδή $|x|$).

ΤΙ ΟΝΟΜΑΖΟΥΜΕ ΓΡΑΦΙΚΗ ΠΑΡΑΣΤΑΣΗ ΜΙΑΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Γραφική παράσταση μιας συνάρτησης ονομάζουμε την γραμμή που προκύπτει αν ενώσουμε το σύνολο των σημείων (x,y) που παίρνουμε σ' ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων.

ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Δύο ποσά λέγονται ανάλογα όταν ο λόγος των τιμών του ενός, προς τις αντίστοιχες τιμές του άλλου είναι σταθερός.

Αν δηλαδή τα ποσά x και y είναι ανάλογα, έχουμε: $\frac{y}{x} = a$ (όπου a ο σταθερός αριθμός).

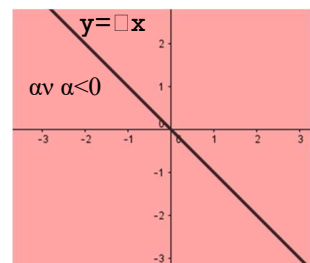
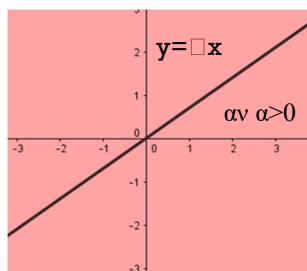
ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΟΠΟΥ ΕΚΦΡΑΖΟΝΤΑΙ ΔΥΟ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζονται δύο ανάλογα ποσά είναι:
 $y = a \cdot x$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = a \cdot x$

Η συνάρτηση με τύπο $y = a \cdot x$ έχει σαν γραφική παράσταση μία ευθεία γραμμή που **περνάει** από την αρχή των αξόνων.

- Αν $\alpha > 0$, η ευθεία διέρχεται από το 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο,
- Αν $\alpha < 0$, η ευθεία διέρχεται από το 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο.



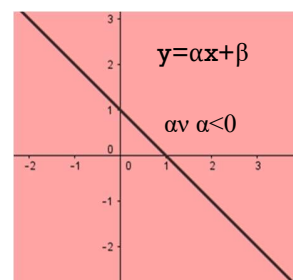
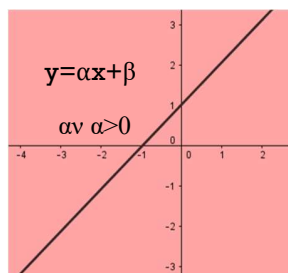
ΚΛΙΣΗ ΕΥΘΕΙΑΣ

Κλίση μιας ευθείας με εξίσωση της μορφής $y = a \cdot x$ λέγεται ο αριθμός a οποίος είναι πάντα σταθερός και ισούται με το λόγο

$$a = \frac{y}{x} \text{ με } x \neq 0$$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = a \cdot x + \beta$

Η συνάρτηση $y = a \cdot x + \beta$ έχει σαν γραφική παράσταση μία ευθεία γραμμή που **δεν περνάει** από την αρχή των αξόνων:



- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = a \cdot x + \beta$ με $\beta \neq 0$, είναι μία ευθεία παράλληλη στην ευθεία $y = a \cdot x$, η οποία διέρχεται από το σημείο του άξονα yy' με τετμημένη β .
- Η ευθεία $y = a \cdot x + \beta$ έχει κλίση ίση με τον αριθμό a .

ΣΗΜΕΙΑ ΤΟΜΗΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $y = a \cdot x + \beta$ ΜΕ ΤΟΥΣ ΑΞΟΝΕΣ

- Το σημείο τομής της συνάρτησης με τύπο $y = a \cdot x + \beta$ με τον άξονα xx' είναι το σημείο με συντεταγμένες $(-\frac{\beta}{a}, 0)$ (θέτω στον τύπο της συνάρτησης όπου $y=0$ και λύνω ως προς x).
- Το σημείο τομής της συνάρτησης με τύπο $y = a \cdot x + \beta$ με τον άξονα yy' είναι το σημείο με συντεταγμένες $(0, \beta)$ (θέτω στον τύπο της συνάρτησης όπου $x=0$ και λύνω ως προς y).

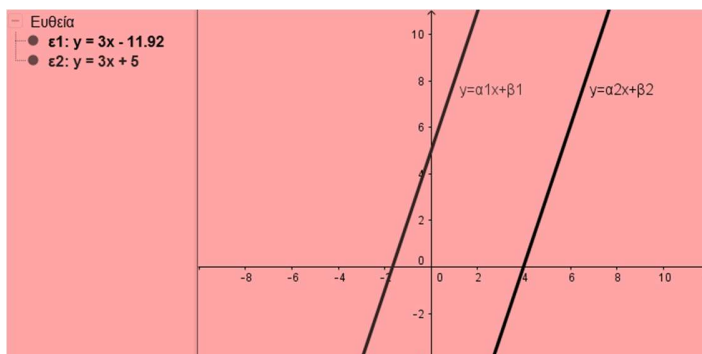
Σχόλιο

Δίνονται οι ευθείες με τύπους:

$$e_1: y = \alpha_1 x + \beta_1$$

$$e_2: y = \alpha_2 x + \beta_2$$

Για να είναι παράλληλες οι e_1 και e_2 αρκεί: $\alpha_1 = \alpha_2$



Στο παράδειγμα απεικονίζονται δύο ευθείες ε_1 και ε_2 όπου παρατηρούμε ότι η ε_1 είναι παράλληλη στην ε_2 . Αυτό ισχύει καθώς $\alpha_1 = \alpha_2 = 3$.

ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

Δύο ποσά λέγονται αντιστρόφως ανάλογα όταν το γινόμενο των τιμών του ενός, επί τις αντίστοιχες τιμές του άλλου είναι σταθερό. Αν δηλαδή τα ποσά x και y είναι αντιστρόφως ανάλογα, έχουμε $x \cdot y = a$ (όπου a σταθερός αριθμός).

ΤΥΠΟΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΟΠΟΥ ΕΚΦΡΑΖΟΝΤΑΙ ΔΥΟ ΑΝΤΙΣΤΡΟΦΩΣ ΑΝΑΛΟΓΑ ΠΟΣΑ

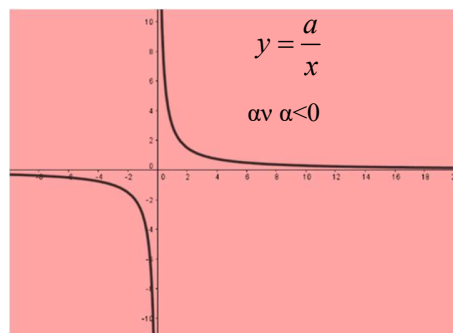
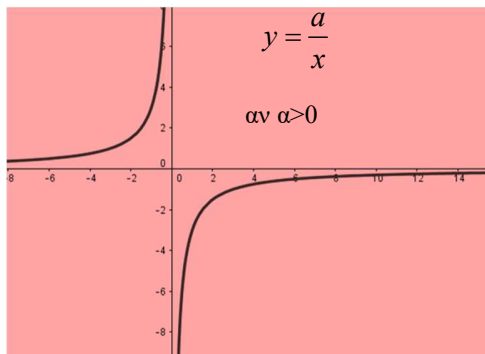
Ο τύπος της συνάρτησης που εκφράζονται δύο αντιστρόφως ανάλογα ποσά είναι: $y = \frac{a}{x}$, με $x \neq 0$

Η ΣΥΝΑΡΤΗΣΗ $y = \frac{a}{x}$, $x \neq 0$

Η συνάρτηση με τύπο $y = \frac{a}{x}$ έχει σαν γραφική παράσταση μία

καμπύλη γραμμή που αποτελείται από δύο κλάδους.

- Αν $a > 0$, οι κλάδοι της υπερβολής βρίσκονται στο 1^ο και 3^ο τεταρτημόριο,
- Αν $a < 0$, οι κλάδοι της υπερβολής βρίσκονται στο 2^ο και 4^ο τεταρτημόριο.



Σχόλιο

Ανεξάρτητα από το αν το a είναι θετικό ή αρνητικό η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει :

- Κέντρο συμμετρίας την αρχή O των αξόνων.
- Άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, (δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις $y=x$ και $y=-x$).