

1.2 Ομαλή Κυκλική κίνηση

Θυμίζω: $T, f, \nu, \phi, \omega = \frac{\varphi}{t} \text{ rad/s}, \omega = \frac{2\pi}{T}, \nu = \omega R, a_c = \frac{v^2}{r}$

Δύο τροχοί που εφάπτονται, που συνδέονται με ιμάντα ή είναι ομόκεντροι

1. Δύο τροχοί ποδηλάτου ακτίνας $R_1=100\text{cm}$ και $R_2=50\text{cm}$ συνδέονται με μεταλλική αλυσίδα. Η συχνότητα περιστροφής του ενός είναι $f_1=\frac{10}{\pi} \text{ Hz}$. Να υπολογίσετε:
 - α. Το μέτρο των ταχυτήτων δύο σημείων Α και Γ της αλυσίδας, σε σημεία που εφάπτονται ένα σε κάθε τροχό.
 - β. Το μέτρο των ταχυτήτων δύο σημείων Μ και Ν της αλυσίδας, σε σημεία που είναι ανάμεσα στους τροχούς.
 - γ. Να υπολογίσετε τις επιταχύνσεις στα τέσσερα παραπάνω σημεία.
 - δ. Την συχνότητα περιστροφής f_2 του τροχού ακτίνας R_2 .

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$

Απ. $\nu_A=20\text{m/s}, a_A=400\text{m/s}^2, a_\Gamma=800\text{m/s}^2, a_M=0=a_N, f_2=\frac{20}{\pi} \text{ Hz}$

2. Δύο τροχοί ποδηλάτου είναι για επισκευή. Ο λόγος των ακτίνων τους είναι 3:4. Για τεχνικούς λόγους περιστρέφονται ομαλά γύρω από άξονα που διέρχεται από το κοινό τους κέντρο με την ίδια συχνότητα. Αν τα σημεία της περιφέρειας του μικρού τροχού έχουν γραμμική ταχύτητα $\nu=7,5\text{m/s}$, να υπολογίσετε την γραμμική ταχύτητα των σημείων της περιφέρειας του μεγάλου τροχού. Απ. $\nu=10\text{m/s}$

Κινητά που κινούνται στην ίδια περιφέρεια.

3. Δύο δρομείς τρέχουν με ταχύτητα σταθερού μέτρου, σε απόλυτα κυκλικό στίβο. Η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς είναι $R=17,5\text{m}$. Οι ταχύτητες των 2 δύο δρομέων είναι αντίστοιχα $\nu_1=36\text{Km/h}$ και $\nu_2=27\text{Km/h}$. Ζητείται:
 - α) Ο χρόνος μεταξύ δύο διαδοχικών συναντήσεων.
 - i. Όταν οι δρομείς κινούνται με αντίθετες φορές.
 - ii. Όταν οι δρομείς κινούνται με την ίδια φορά.
 - β) Τον αριθμό των περιστροφών στη δεύτερη περίπτωση

Απ. $t_1=0,8\pi \text{ s}, t_2=14\pi \text{ s}, N_1=4 \text{ περιστροφές}, N_2=3 \text{ περιστροφές}$
4. Ποδήλατο κινείται με ταχύτητα ν ομαλά σε ευθύγραμμο δρόμο. Να αποδείξετε ότι τα σημεία της περιφέρειας κάθε τροχού του ποδηλάτου έχουν γραμμική ταχύτητα ν' , λόγω περιστροφής, με μέτρο ίσο με το μέτρο της μεταφορικής ταχύτητας του ποδηλάτου.

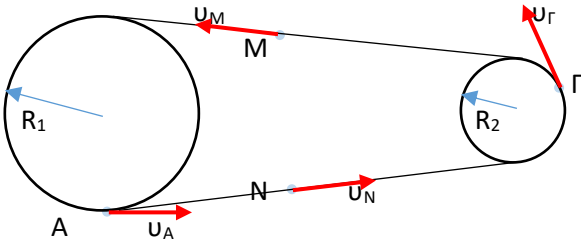
1.2 Ομαλή Κυκλική κίνηση

1. Δύο τροχοί συνδέονται με αλυσίδα ή ιμάντα.

Σημείωση 1: Όλα τα σημεία της αλυσίδας έχουν γραμμική ταχύτητα u , με το ίδιο μέτρο.

Σημείωση 2: Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας των τροχών είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας οποιαδήποτε σημείου της αλυσίδας.

Σημείωση 3: Το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας των τροχών είναι ίσο με το μέτρο της ταχύτητας οποιαδήποτε σημείου του τροχού, u .



α) Ο τροχός ακτίνας R_1 κατά την περιστροφή του θα έχει γραμμική ταχύτητα u_1 .

Έστω το σημείο A της αλυσίδας.

Κάποια στιγμή θα εφάπτεται στον τροχό ακτίνας R_1 .

Θα ισχύει: $v_A = v_1 = \omega_1 R = 2\pi f_1 R_1 = 20\text{m/s}$

β) Και επειδή έχουμε αλυσίδα, όλα τα σημεία της θα έχουν γραμμική ταχύτητα u με το ίδιο μέτρο.

Δηλ. $u=u_A=u_N=u_\Gamma=u_M=20\text{m/s}$.

Θυμάμαι: Την αλλαγή της ταχύτητας ενός σώματος την εκφράζει η επιτάχυνση $\vec{a}$

Η ταχύτητα είναι μέγεθος διανυσματικό και περιγράφεται από

- το σημείο εφαρμογής,
- τη διεύθυνση,
- τη φορά και
- το μέτρο (που το υπολογίζω κάθε φορά από τον τύπο)

Όταν έχω αλλαγή σε κάποιο από τα παραπάνω, λέμε ότι αλλάζει το διάνυσμα. Έτσι:

0 Όταν αλλάζει το μέτρο της ταχύτητας $\vec{v}$, λέμε ότι αλλάζει η ταχύτητα.

Η αλλαγή αυτή εκφράζεται με την επιτόρχεια επιτάχυνση ή απλά επιτάχυνση $\vec{a}$, με $\vec{a} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ όπως την είδαμε και τη μελετήσαμε στις ευθύγραμμες κινήσεις. (επιτάχυνση ή επιβράδυνση)

Στην ομαλή κυκλική κίνηση η τιμή της ταχύτητας είναι σταθερή.

ΑΛΛΑΖΕΙ ΟΜΩΣ Η ΔΙΕΥΘΥΝΣΗ ΚΑΙ Η ΦΟΡΑ, οπότε λέμε και πάλι ότι το ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΑΛΛΑΖΕΙ.

Η αλλαγή αυτή εκφράζεται με την κεντρομόλο επιτάχυνση $\vec{a}_κ$, με $a_κ = \frac{v^2}{R}$ που έχει κατεύθυνση προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς

Σύνθετη κίνηση ενός τροχού: (βλέπε άσκηση 4)

Σε πραγματικές συνθήκες μια ρόδα ενός αυτοκινήτου που κινείται κάνει σύνθετη κίνηση:

- Τη μεταφορική του οχήματος.
- Την περιστροφική γύρω από το κέντρο του, γύρω από τον άξονα στήριξης της ρόδας.

Η ταχύτητα ή η επιτάχυνση ενός σημείου του τροχού είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο ταχυτήτων.

γ) Σύμφωνα με τα παραπάνω, στα σημεία M και N και γενικά σ' όλα τα σημεία της αλυσίδας ανάμεσα στους τροχούς, το διάνυσμα της ταχύτητας είναι σταθερό κατά μέτρο, δ/νση και φορά. Εκτελούν Ε.Ο.Κ. Άρα η επιτάχυνση είναι μηδέν $a_M=a_N=0$

Τα σημεία A και Γ, όπως και όλα τα σημεία που εφάπτονται των τροχών, εκτελούν ομαλή κυκλική κίνηση. Άρα έχουν κεντρομόλο επιτάχυνση $a_κ$

σημείο A: $a_{κ(A)} = \frac{v_A^2}{R_1} = \frac{v^2}{R_1} = 400\text{m/s}^2$

σημείο Γ: $a_{κ(\Gamma)} = \frac{v_\Gamma^2}{R_2} = \frac{v^2}{R_2} = 400\text{m/s}^2$

δ) Τα σημεία της περιφέρειας του τροχού με ακτίνα R_2 , θα έχουν γραμμική ταχύτητα με μέτρο ίσο με το μέτρο της ταχύτητας των σημείων της αλυσίδας, άρα ίση και με το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας του τροχού R_1 .

Δηλ. $u_2=u$
και $u_2=2\pi f_2 R_2$ } $\Rightarrow f_2 = \frac{v}{2\pi R_2} = \frac{20}{\pi} \text{Hz}$

Παρατήρηση 1: $R_1 > R_2 \Rightarrow f_2 < f_1$ Δηλ. ο τροχός με τη μεγαλύτερη ακτίνα γυρίζει πιο αργά ...

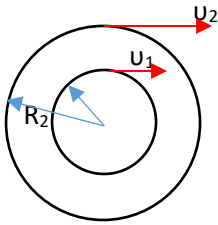
1.2 Ομαλή Κυκλική κίνηση

2. Ομόκεντροι κύκλοι

$\frac{R_1}{R_2} = \frac{3}{4}$
 $f_1 = f_2$

$u_1 = 7,5 \text{ m/s}$

$u_2 = ?$



Στην κυκλική κίνηση ισχύει: $u = \omega R$

Άρα για τα δύο σώματα έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} u_1 &= \omega R_1 \text{ ή } u_1 = 2\pi f_1 R_1 \\ \text{και } u_2 &= \omega R_2 \text{ ή } u_2 = 2\pi f_2 R_2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{u_1}{u_2} = \frac{2\pi f_1 R_1}{2\pi f_2 R_2} \Rightarrow u_2 = \frac{4}{3} u_1 = 10 \text{ m/s}$$

αλλά $f_1 = f_2$

3. Κινητά που κινούνται στην ίδια περιφέρεια.

$R = 17,5 \text{ m}$

$u_1 = 36 \text{ Km/h} = 36 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

$u_2 = 27 \text{ Km/h} = 27 \frac{1000 \text{ m}}{3600 \text{ s}} = 7,5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$

α) Σε κάθε περίπτωση οι δύο δρομείς από τη στιγμή που συναντήθηκαν, μέχρι τη στιγμή που θα ξανασυναντηθούν, διάνυσαν διαστήματα:

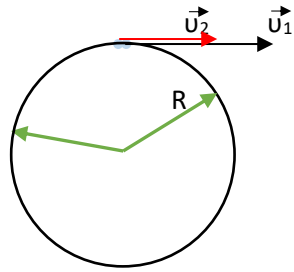
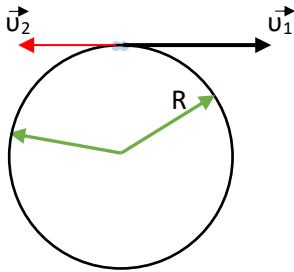
$s_1 = v_1 t$
και $s_2 = v_2 t$

1^η περίπτωση: κίνηση με αντίθετες φορές

$s_1 + s_2 = 2\pi R$
ή $v_1 t + v_2 t = 2\pi R$
ή $t(v_1 + v_2) = 2\pi R$
ή $t = \frac{2\pi R}{v_1 + v_2} = \dots = 2\pi \text{ s}$

2^η περίπτωση: κίνηση με ίδιες φορές
Ο δρομέας με τη μεγαλύτερη ταχύτητα θα έχει κάνει μια επιπλέον περιστροφή.

$s_1 = s_2 + 2\pi R$
ή $v_1 t - v_2 t = 2\pi R$
ή $t = \frac{2\pi R}{v_1 - v_2} = \dots = 14\pi \text{ s}$



β) Θυμόμαστε: συχνότητα

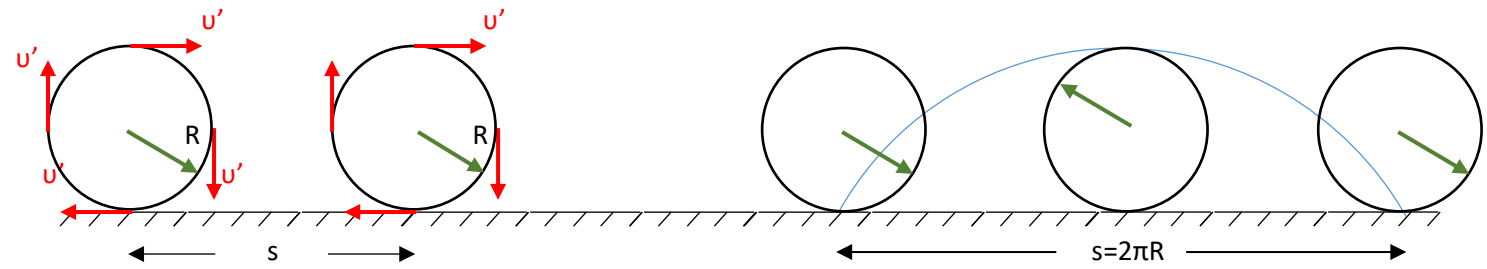
$f = \frac{\eta}{t} = \frac{\text{πλήθος περιστροφών}}{\text{αντίστοιχο χρόνο}}$ Άρα $N = f t = \frac{v}{2\pi R} t$

Έτσι έχουμε $N_1 = \frac{v_1}{2\pi R} t$ και $N_2 = \frac{v_2}{2\pi R} t$

Με αριθμητική αντικατάσταση προκύπτει $N_1 = 4$ περιστροφές, $N_2 = 3$ περιστροφές

1.2 Ομαλή Κυκλική κίνηση

4. Σχέση μεταφορικής ταχύτητας u και γραμμικής ταχύτητας u' σημείων περιφέρειας ενός τροχού.



Ο τροχός εκτελεί μεταφορική κίνηση. Έτσι σε χρονικό διάστημα Δt έχω:

- ευθύγραμμη μετατόπιση $s = u \cdot \Delta t$ του κινητού.
- σε κάθε περιστροφή ο τροχός διανύει διάστημα $s = 2\pi R$. Όσο δηλαδή το μήκος της περιφέρειάς του.
- όταν ο τροχός (η ρόδα) κάνει N περιστροφές, τότε διανύει διάστημα $s = N \cdot 2\pi R$.

Άρα $N \cdot 2\pi R = u \cdot \Delta t \Rightarrow \frac{N}{\Delta t} = \frac{u}{2\pi R}$

και επειδή $f = \frac{N}{\Delta t}$ $\Rightarrow f = \frac{u}{2\pi R} \Rightarrow u = 2\pi f R$ ①

Ο τροχός όμως εκτελεί και περιστροφική κίνηση.

Λόγω της περιστροφής το μέτρο της γραμμικής ταχύτητας των σημείων της περιφέρειας του τροχού είναι:

$u' = \omega R = \frac{2\pi}{T} R \Rightarrow u' = 2\pi f R$ ②

Από ①, ② $\Rightarrow u' = u$

Για όλα τα κινητά που κινούνται ευθύγραμμα με ταχύτητα (μεταφορική) μέτρου u , τα σημεία της περιφέρειας τους έχουν μέτρο γραμμικής ταχύτητας, λόγω περιστροφής, ίση με u .

Σύνθετη κίνηση ενός τροχού:

Σε πραγματικές συνθήκες μια ρόδα ενός αυτοκινήτου που κινείται κάνει σύνθετη κίνηση:

- Τη μεταφορική του οχήματος.
- Την περιστροφική γύρω από το κέντρο του, γύρω από τον άξονα στήριξης της ρόδας.

Η ταχύτητα ή η επιτάχυνση ενός σημείου του τροχού είναι το διανυσματικό άθροισμα των δύο ταχυτήτων.

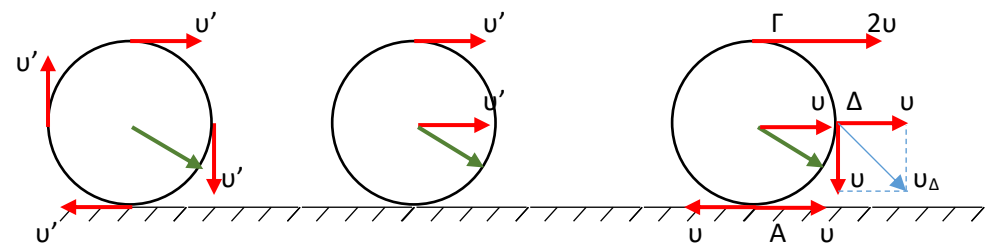
Έτσι τα σημεία της περιφέρειας του τροχού θα έχουν όλα

- ταχύτητα μέτρου u λόγω της μεταφορικής κίνησης και
- ταχύτητα μέτρου u' λόγω της περιστροφικής κίνησης.

Έτσι το σημείο Α θα έχει συνολική ταχύτητα μηδέν,

το σημείο Β θα έχει συνολική ταχύτητα $2u$

το σημείο Γ θα έχει συνολική ταχύτητα $u\sqrt{2}$.



στροφοική
κίνηση

μεταφορική
κίνηση

σύνθετη
κίνηση