

Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

(Παράγραφος Α 1.5-Ασκήσεις στις ταυτότητες)

1. Υπολογίστε τις επόμενες ταυτότητες:

α) $(5\alpha+4\beta)^2$	ε) $(x^2\psi+x\psi^2)^2$	θ) $(\alpha^3\beta-\beta^2)^2$
β) $(3\alpha+2\beta)^2$	στ) $(x+\frac{1}{x})^2$	ι) $(3\alpha-\frac{1}{\alpha})^2$
γ) $(x\psi+x^2)^2$	ζ) $(x\psi-\psi^2)^2$	ια) $(x^2-\frac{3}{x})^2$
δ) $(x^3+2x)^2$	η) $(x^2-x\psi^3)^2$	ιβ) $(2x^2-x^3)^2$

2. Να βρείτε τα επόμενα αναπτύγματα:

α) $(-x-\psi)^2$	γ) $(-x^3+2x^2)^2$	ε) $(-x^2\psi-x\psi^2)^2$
β) $(-x^2-2x)^2$	δ) $(-\alpha^2+\alpha\beta^2)^2$	στ) $(-\alpha\beta^2+\alpha)^2$

3. Να γίνουν οι επόμενες πράξεις:

α) $(x+2)^2+2(x-1)^2$	γ) $\alpha(2\alpha-3)^2-4\alpha(\alpha+3)^2$
β) $3(\alpha+1)^2-(3\alpha-2)^2$	δ) $x^2(x-2)^2-x(x^2+1)^2$

4. Αποδείξτε τις παρακάτω σχέσεις:

α) $(\alpha+\beta)^2+(\alpha-\beta)^2=2\alpha^2+2\beta^2$	γ) $(2\alpha-3)^2-4(\alpha+1)^2=5-20\alpha$
β) $(\alpha+3)^2-(\alpha-3)^2=12\alpha$	δ) $(x-3)^2+(2x-1)^2=5(x-1)^2+5$

5. Συμπληρώστε τις επόμενες ισότητες:

α) $(x+\dots)^2=\dots+\dots+25\psi^2$	γ) $(\frac{\alpha}{2}+\dots)^2=\dots+\alpha+\dots$
β) $(3\alpha-\dots)^2=\dots-6\alpha\beta+\dots$	δ) $(\dots-\dots)^2=4x^2-5x\psi+\dots$

6. Να υπολογίσετε τα επόμενα αναπτύγματα:

α) $(\alpha+2)^3$	γ) $(2x^2-3x)^3$	ε) $(-x-2)^3$	ζ) $(-x+\frac{1}{x})^3$
β) $(x^2+2x)^3$	δ) $(3\alpha^3-2\alpha^2)^3$	στ) $(-2x+1)^3$	η) $(2\alpha+\frac{3}{\alpha})^3$

7. Να συμπληρώσετε τα επόμενα κενά:

α) $x^3+6x^2+.....+.....=(.....+.....)^3$ β) $x^3-.....+.....-8=(.....-.....)^3$

8. Κάντε τις επόμενες πράξεις:

α) $(x+2)^3-x(x+2)^3$ β) $(2x+1)^3+(x-3)^3-(x+1)(3x-1)^2$ γ) $(\sqrt{2}+1)^3+(\sqrt{27}-1)^3$

9. Αποδείξτε τις επόμενες σχέσεις:

α) $(x-3)^3+9(x-2)^2+9(x-1)=x^3$ γ) $\alpha(\alpha+5)^2-(\alpha-3)^3-(\alpha-1)^2=18\alpha^2+26$

β) $(x+2)^3-6(x+1)^2=x^3+2$ δ) $x(x+1)^2-(x-1)^3=(x-1)^2+(2x)^2$

10. Βρείτε τα επόμενα αναπτύγματα:

α) $(\alpha+2)(\alpha-2)$ ε) $(\sqrt{x}-\sqrt{2})(\sqrt{x}+\sqrt{2})$ θ) $(\sqrt{8}-\sqrt{11})(\sqrt{8}-\sqrt{11})$

β) $(x-3)(x+3)$ στ) $(x-\sqrt{5})(x+\sqrt{5})$ ι) $(6+2\sqrt{5})(6-2\sqrt{5})$

γ) $(2x+5)(2x-5)$ ζ) $(3\sqrt{x}+2)(-3\sqrt{x}+2)$ ια) $(2\sqrt{5}+3)(3-2\sqrt{5})$

δ) $(6x+7\psi)(7\psi-6x)$ η) $(x-\psi)(-x-\psi)$ ιβ) $(\sqrt{18}-2\sqrt{3})(3\sqrt{2}+\sqrt{12})$

11. Συμπληρώστε τα επόμενα κενά:

α) $(2\alpha+.....)(.....-.....)=.....-9\beta^2$ β) $(\alpha^2x^3+.....)(.....-.....)=.....-\beta^4\psi^8$

12. Βρείτε τις τιμές των παραστάσεων:

α) $\sqrt{3+\sqrt{5}}\cdot\sqrt{3-\sqrt{5}}$ β) $\sqrt{2\sqrt{5}-\sqrt{11}}\cdot\sqrt{2\sqrt{5}+\sqrt{11}}$

13. Κάντε τις επόμενες πράξεις:

α) $(x-6)(x+6)-(x-4)^2$ β) $9(x-2)(x+2)-(3x-4)(3x+4)$ γ) $(x^2-2x)(x^2+2x)+(x^2+2)^2$

14. Αποδείξτε τις επόμενες σχέσεις:

α) $(2x-1)(2x+1)-(2x-3)^2=12x-10$ δ) $2+(x-2)^2=2(x-1)^2-(x-2)(x+2)$

β) $(\alpha+3)^2+(\alpha-3)^2-2(\alpha-3)(\alpha+3)=36$ ε) $(\alpha\beta-1)^2-(\alpha-\beta)^2=(\alpha-1)(\beta-1)(\alpha+1)(\beta+1)$

γ) $(x^2-2)^2-x^2(x-2)(x+2)=4$

15. α) Αποδείξτε ότι: $(x-1)(x+1)+1=x^2$

β) Βρείτε τον αριθμό κ, όπου $\kappa=\sqrt{2020\cdot 2022+1}$

16. Αν $x+\frac{2}{x}=4$ (όπου $x \neq 0$), να βρεθεί η τιμή της παράστασης $x^2+\frac{4}{x^2}$.

17. Αν $P(x)=x^2-2x-5$, να βρείτε το πολυώνυμο $Q(x)=P(x-1)+P(x-2)-(2x-1)$.

18. Έστω το πολυώνυμο $P(x)=(x+4)^2-(x-3)(-x-3)$.

α) Να το κατατάξετε κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x και να βρείτε το βαθμό του.

β) Αποδείξτε ότι $P(a-2)=P(-a-2)$

19. Έστω τα πολυώνυμα $P(x)=x(x+1)^2+(x-3)^2$ και $Q(x)=x^3-8x+16$

α) Να γράψετε το $P(x)$ κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x .

β) Αποδείξτε ότι $P(a-2)=Q(a-1)$.

ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ ΓΙΑ ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΑ ΠΡΟΤΥΠΑ ΛΥΚΕΙΑ

ΑΣΚΗΣΗ 1. (2018)

A') Δίνονται οι αριθμοί $\alpha = \sqrt{2} + 1$ και $\beta = \sqrt{2} - 1$.

i. Να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι αντίστροφοι.

ii. Αν είναι

$$\begin{array}{lcl} \text{Πρώτο βήμα:} & A_1 & = \alpha^1 + \beta^1 \\ \text{Δεύτερο βήμα:} & A_2 & = \alpha^2 + \beta^2 \\ & \vdots & \\ \text{Γενικό βήμα:} & A_n & = \alpha^n + \beta^n \end{array}$$

Να δείξετε ότι $A_2 \cdot A_3 = A_5 + A_1$

ΑΣΚΗΣΗ 2. (2020)

042. Η τιμή της παράστασης $\frac{1}{123 \cdot 127 - 125^2 + 3}$ είναι:

A. -1

B. $\frac{1}{2}$

Γ. $\frac{1}{127}$

Δ. $-\frac{1}{125^2}$

ΑΣΚΗΣΗ 3. (2020)

043. Η τιμή της παράστασης $\frac{2020^3 - 2005^3 - 15^3}{2020 \cdot 2005 \cdot 3}$ είναι:

A. 3

B. 15

Γ. -1

Δ. 5

ΑΣΚΗΣΗ 4. (2021)

028. Ποια από τις παρακάτω παραστάσεις είναι ίση με την παράσταση $K = (x^2 - y^2)(x + y)^2$.

A. $x^4 - 2yx^3 + 2y^3x - y^4$

B. $x^4 + 2yx^3 + y^3x - y^4$

Γ. $x^4 - 2yx^3 - 2y^3x + y^4$

Δ. $x^4 + 2yx^3 - 2y^3x - y^4$

ΑΣΚΗΣΗ 5. (2021)

030. Αν $\alpha + \frac{2}{\alpha} = 3$, τότε $\alpha^2 + \frac{4}{\alpha^2} =$

A. 3

B. 5

Γ. 7

Δ. 9

ΑΣΚΗΣΗ 6. (2021)

039. Αν $N = 999.999$ πόσα ψηφία ίσα με 1 έχει ο αριθμός $N^2 + 2 \cdot 10^6$;

A. 0

B. 1

Γ. 2

Δ. 8

ΑΣΚΗΣΗ 7. (2021)

050. Αν $x \neq y$ και ισχύει $x^2 = 2x + y$, $y^2 = 2y + x$, τότε $x^2 + y^2 =$

A. 4

B. 3

Γ. 2

Δ. 1

ΑΣΚΗΣΗ 8. (2022)

027. Ο αριθμός $(\sqrt{3 + \sqrt{5}} + \sqrt{3 - \sqrt{5}})^2$ είναι ίσος με

A. 6

B. 10

Γ. $6 - 2\sqrt{5}$

Δ. 256

ΑΣΚΗΣΗ 9. (2022)

034. Αν $\alpha = (3\sqrt{5} + 2\sqrt{5} + \sqrt{5})^2$, τότε:

A. $\alpha = 70$

B. $\alpha = 30$

Γ. $\alpha = 180$

Δ. $\alpha = 36\sqrt{5}$

ΑΣΚΗΣΗ 10. (2022)

036. Η εξίσωση $x^2 + 2x + 2 + \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$

- A. είναι αδύνατη B. έχει ακριβώς μια λύση Γ. έχει δυο λύσεις
Δ. έχει περισσότερες από δύο λύσεις

ΑΣΚΗΣΗ 11. (2022)

039. Αν οι ακτίνες δύο κύκλων είναι ίσες με $3\alpha^2 - 1$ και $2\sqrt{3}\alpha$, τότε η ακτίνα του κύκλου με εμβαδόν ίσο με το άθροισμα των εμβαδών των δύο προηγούμενων κύκλων είναι:

- A. $3\alpha^2 + 1$ B. $(3\alpha^2 + 2\sqrt{3}\alpha - 1):2$ Γ. $3\alpha^2$ Δ. $9\alpha^2 + 1$

ΑΣΚΗΣΗ 12. (2022)

040. Ο αριθμός $\alpha = \left(2022 + \frac{1}{1011}\right)^2 - \left(2022 - \frac{1}{1011}\right)^2$ είναι ίσος με

- A. 0 B. 8 Γ. $\frac{2}{(1011)^2}$ Δ. 4

ΑΣΚΗΣΗ 13. (2022)

042. Αν $\alpha + \beta = 1000$, τότε η τιμή της παράστασης

$(2\alpha + \beta + 2022)^2 + 2(2\alpha + \beta + 2022)(\alpha + 2\beta - 22) + (\alpha + 2\beta - 22)^2$ είναι ίση με:

- A. 5.000 B. 5.022 Γ. 25.220.484 Δ. $2,5 \cdot 10^7$

ΑΣΚΗΣΗ 14. (2022)

34. Αν για τους αριθμούς α και β ισχύει ότι $\alpha + \beta = 5$ και $\alpha \cdot \beta = 6$, τότε η παράσταση

$\alpha^2 + \beta^2$ είναι ίση με:

- A. 37
B. 36
Γ. 25
Δ. 13

