

ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Όνομα.....

Επώνυμο.....

ΘΕΩΡΙΑ 1

A) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ)αν είναι σωστές ή με (Λ) , αν είναι λανθασμένες:

i) Τα μονώνυμα $\frac{2}{5}x^3y\omega^2$ και $-5x^3y\omega^2$ είναι όμοια.

ii) Τα μονώνυμα $-4x^2y$ και $4xy^2$ είναι αντίθετα

iii) Το πηλίκο δύο μονωνύμων είναι πάντα μονώνυμο

Μονάδες : $0,90 \times 3 = 2,7$

B) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά, ώστε οι ισότητες που θα προκύψουν να εκφράζουν αξιοσημείωτες ταυτότητες (να μεταφερθούν στο γραπτό σας).

i) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$

ii) $(\alpha + \beta)^2 = \dots\dots\dots$

Μονάδες : $1+1=2$

Γ. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

Μονάδες : 2

ΘΕΩΡΙΑ 2

A) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ)αν είναι σωστές ή με (Λ) ,αν είναι λανθασμένες:

i) Δύο κανονικά πολύγωνα είναι όμοια.

ii) Δύο πολύγωνα είναι όμοια αν έχουν τις πλευρές τους ανάλογες.

iii) Δύο πολύγωνα είναι όμοια αν έχουν τις αντίστοιχες γωνίες τους ίσες και τις πλευρές τους ανάλογες.

iv) Δύο τετράγωνα είναι όμοια.

Μονάδες : $4 \times 0,95 = 3,8$

B) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) , αν είναι λανθασμένες:

i) Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι όμοια.

ii) Αν δύο ισοσκελή τρίγωνα έχουν μία γωνία ίση είναι όμοια.

iii) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση, είναι όμοια.

Μονάδες : $3 \times 0,95 = 2,85$

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι παραστάσεις $A = (x-3)^2 - (x+3)^2$ και $B = x^2 + 7x + 6$

α) Να αποδείξετε ότι $A = -12x$

β) Να λύσετε την εξίσωση $A+B=0$

γ) Να λύσετε την ανίσωση $A > 24$

Μονάδες : $2,66 + 3 + 1 = 6,66$

ΑΣΚΗΣΗ 2

α) Να δείξετε ότι η ισότητα $(x+1)^2 + (y+2)^2 = x^2 + y^2 + 1$, μετά από πράξεις παίρνει τη μορφή $2x + 4y = -4$.

β) Να λύσετε το σύστημα :

$$\begin{cases} 2x + 4y = -4 \\ x + 6y = 2 \end{cases}$$

Μονάδες : $3,33 + 3,33 = 6,66$

ΑΣΚΗΣΗ 3

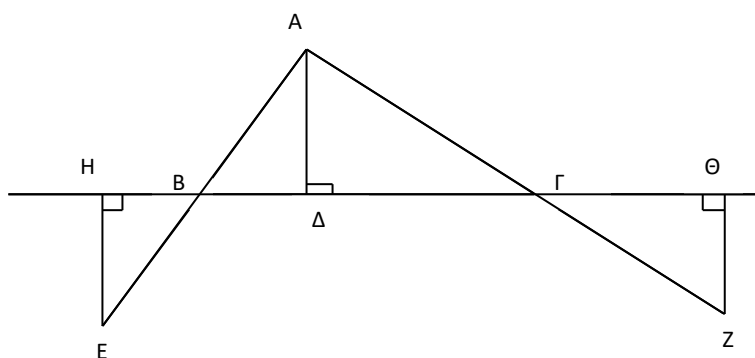
Στο διπλανό σχήμα είναι : $BE=BA$ και $GA=GZ$. Το τμήμα AD είναι ύψος του τριγώνου $ABΓ$. Τα τμήματα EH και $ZΘ$ είναι κάθετα στην προέκταση της $BΓ$.

Να δείξετε ότι :

α) $ZΘ=AD$

β) $EH=AD$

γ) Τι συμπεραίνετε για τα τμήματα AD, EH και $ZΘ$;



Μονάδες : 6,66

Όλα τα θέματα να απαντηθούν στην κόλλα αναφοράς.

Από τις δύο θεωρίες να γράψετε τη μία και από τις τρεις ασκήσεις να γράψετε τις δύο.

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ:

ΘΕΩΡΙΑ: Από τα επόμενα δύο θέματα θεωρίας να επιλέξετε και να απαντήσετε μόνο στο ένα!

ΘΕΜΑ 1^ο

A) Να συμπληρώσετε τις ταυτότητες:

- i. $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$
- ii. $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$
- iii. $(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$

B) Να αποδείξετε ότι ισχύει η ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

ΘΕΜΑ 2^ο

A) Να διατυπώσετε 2 από τα 3 κριτήρια ισότητας δύο τριγώνων.

B) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις ως αληθείς (Α) ή ψευδείς (Ψ):

- i. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία οξεία γωνία ίση είναι όμοια.
- ii. Δύο τρίγωνα που έχουν ίσες γωνίες είναι ίσα.
- iii. Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια.

.....

ΑΣΚΗΣΕΙΣ: Από τις επόμενες τρεις ασκήσεις να επιλέξετε και να λύσετε μόνο τις δύο!

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Δίνεται το πολυώνυμο: $P(x) = (2x + 1)^2 + (x - 4)(x + 4) + 3x(2 - x) - 13(x - 1) + 3$

α) Να κάνετε τις πράξεις και να δείξετε ότι: $P(x) = 2x^2 - 3x + 1$

β) Να λύσετε την εξίσωση: $P(x) = 0$

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Δίνεται το σύστημα: $3(x - y + 2) = 2(5 - y) + x + 1$

$$4(x + 2) + 2(y - 3) = 3(x + 2) + y$$

α) Να δείξετε ότι γράφεται: $2x - y = 5$

$$x + y = 4$$

β) Να λύσετε το σύστημα.

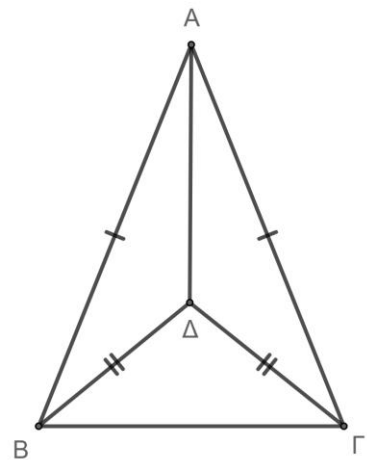
ΑΣΚΗΣΗ 3^η

Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ του διπλανού σχήματος ($AB = A\Gamma$) και το σημείο Δ που βρίσκεται στο εσωτερικό του τριγώνου και ισαπέχει από τις κορυφές B και Γ , δηλαδή $\Delta B = \Delta\Gamma$.

Να δείξετε ότι:

α) Τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $A\Gamma\Delta$ είναι ίσα .

β) Η $A\Delta$ είναι διχοτόμος της γωνίας $\widehat{BAG}$.



ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ!!!

A . ΘΕΩΡΙΑ Να απαντήσετε σε μία μόνο από τις δύο θεωρίες

ΘΕΩΡΙΑ 1η

A) Να αποδείξετε ότι $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2 \cdot \alpha \cdot \beta + \beta^2$.

B) Να συμπληρώσετε τα κενά, ώστε να προκύψουν αληθείς σχέσεις:

i) $(\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta) = \dots\dots\dots$

ii) $(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι **σωστές** και με (Λ) αν είναι **λανθασμένες**:

i) $(\alpha + 3\beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha \cdot 3\beta + 3\beta^2$

ii) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 + \beta^3$

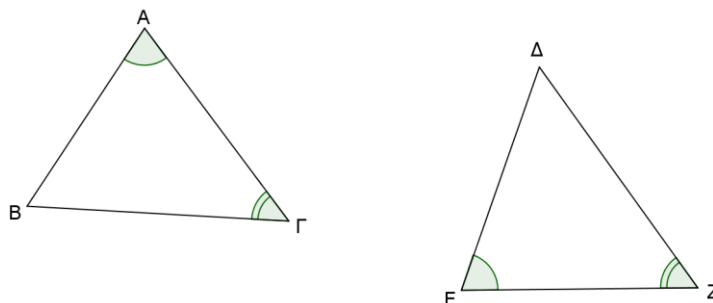
iii) $(-\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

iv) $(x - y)^2 = x^2 - 2x \cdot (-y) + y^2$

ΘΕΩΡΙΑ 2η

A) Ποτε δύο τρίγωνα λέγονται όμοια;

B) Τα τρίγωνα ABΓ και ΔΕΖ είναι όμοια.



Να συμπληρώσετε τους διπλανούς λόγους: $\frac{AB}{\dots} = \frac{\dots}{EZ} = \frac{\dots}{\dots}$

Γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι **σωστές** και με (Λ) αν είναι **λανθασμένες**:

i) Αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε είναι ίσα. Σ Λ

ii) Αν δύο τρίγωνα είναι ίσα, τότε είναι όμοια. Σ Λ

iii) Δύο ορθογώνια τρίγωνα που έχουν μία οξεία γωνία ίση, είναι όμοια. Σ Λ

iv) Δύο ισοσκελή τρίγωνα που έχουν μία γωνία ίση, είναι όμοια. Σ Λ

Β . ΑΣΚΗΣΕΙΣ Να απαντήσετε σε δύο μόνο από τις τρεις ασκήσεις**ΑΣΚΗΣΗ 1**

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = (3x + 2)^2 - 4 \cdot (8x - 3) - 5 \cdot (x - 2)^2$, και $B = x^3 + 5x^2 - x - 5$

A) Να δείξετε ότι $A = 4x^2 - 4$

B) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A και B .

Γ) Δίνεται η παράσταση $\Gamma = \frac{B}{A}$, όπου A και B οι παραπάνω παραστάσεις

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Γ .

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση Γ .

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνεται το σύστημα:
$$\begin{cases} 3\alpha + \beta = 11 \\ 2\alpha - 3\beta = -11 \end{cases}$$

A) Να λύσετε το σύστημα

B) Αν η λύση του συστήματος είναι $(\alpha, \beta) = (2, 5)$,

i) Να λύσετε την εξίσωση $\alpha x^2 - \beta x + 3 = 0$

ii) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $\alpha x^2 - \beta x + 3$.

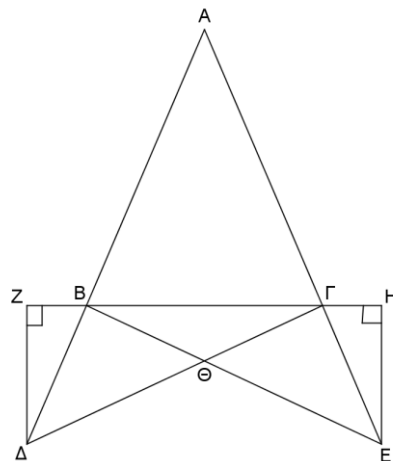
ΑΣΚΗΣΗ 3

Στο διπλανό σχήμα είναι το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$). Στις προεκτάσεις των ίσων πλευρών AB και $A\Gamma$, παίρνουμε αντίστοιχα, ίσα τμήματα $B\Delta = \Gamma E$.

α) Να δείξετε ότι $\widehat{B\Delta\Gamma} = \widehat{B\Gamma E}$.

β) Αν ΔZ και $E\text{H}$ κάθετα ευθύγραμμα τμήματα στην $B\Gamma$,
να δείξετε ότι $Z\Delta = \text{H}E$.

γ) Να δείξετε ότι το τρίγωνο $\Theta B\Gamma$ είναι ισοσκελές.



Καλή επιτυχία!

Θ Ε Μ Α Τ Α Θ Ε Ω Ρ Ι Α Σ

**Α π ό τ α δ ύ ο θ έ μ α τ α θ ε ω ρ ί α ς ν α
γ ρ ά ψ ε τ ε μ ό ν ο τ ο έ ν α .**

Θ Ε Μ Α 1 ο

- A.** Τι ονομάζεται ταυτότητα. (15 μον.)
- B.** Να κάνετε την αντιστοίχιση:
- | | |
|-------------------------|--------------------------------------|
| 1. $(\alpha+\beta)^2$ | κ) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$ |
| 2. $(\alpha-\beta)^2$ | λ) $(\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2)$ |
| 3. $(\alpha^2-\beta^2)$ | μ) $(\alpha^2+2\alpha\beta+\beta^2)$ |
- (10 μον.)

Θ Ε Μ Α 2 ο

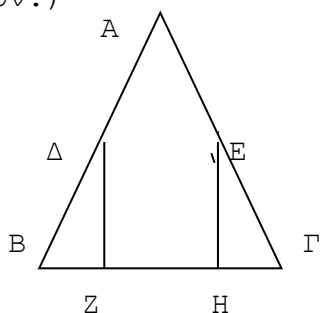
- A.** Έστω η εξίσωση $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0, \alpha \neq 0$ τότε να γίνει η αντιστοίχιση αν:
- | | |
|-----------------|-------------------------------------|
| 1. $\Delta = 0$ | α) η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις |
| 2. $\Delta < 0$ | β) η εξίσωση δεν έχει λύση |
| 3. $\Delta > 0$ | γ) η εξίσωση έχει μία διπλή λύση |
- (15 μον.)
- B.** Να συμπληρωθούν οι παρακάτω τύποι:
- $\Delta = \dots\dots\dots$
- $X_1 = -\beta \dots\dots\dots / 2\alpha$
- $X_2 = \dots\dots - \sqrt{\Delta} / 2\dots$
- $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = \alpha (x - \dots\dots) (x - \dots\dots)$
- (10 μον.)

Θ Ε Μ Α Τ Α Α Σ Κ Η Σ Ε Ω Ν

Θ Ε Μ Α 3 ο

Έστω τρίγωνο ισοσκελές $AB\Gamma$, με $AB = A\Gamma$. Αν Δ μέσο της πλευράς AB και E μέσο της πλευράς $A\Gamma$ τότε:

- A.** Να αποδείξετε ότι οι αποστάσεις των Δ και E από την πλευρά $B\Gamma$ είναι ίσες, δηλαδή $DZ = EH$. (15 μον.)
- B.** Να αποδείξετε ότι και $BZ = H\Gamma$. (10 μον.)



Θ Ε Μ Α 4 ο

Να λυθεί το παρακάτω σύστημα :

$$x + y = 5\}$$

$$2x - y = 10\}$$

(25 μον.)

Έστω το πολυώνυμο $P(x) = x^2 + x - 9$.

A. Ποιός είναι ο βαθμός του $P(x)$; (5
μον.)

B. Να δείξετε ότι: $P(-3) = P(2)$ (10
μον.)

Γ. Να δείξετε ότι: $P(3) + P(2) = 0$ (10
μον.)

ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ !

A. ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ A1

α) Ποιά ισότητα λέγεται ταυτότητα;

β) Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

γ) Να γράψετε στην κόλλα σας ολοκληρωμένες τις παρακάτω ταυτότητες:

i) $\alpha^2 - \beta^2 = \dots\dots\dots$

ii) $(\alpha + \beta)^3 = \dots\dots\dots$

iii) $(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$

iv) $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$

ΘΕΜΑ A2

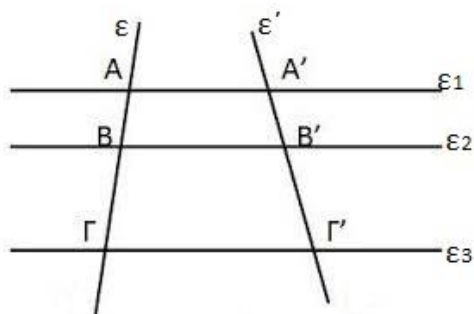
α) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.

β) Αν οι ευθείες ε_1 , ε_2 και ε_3 του παρακάτω σχήματος είναι παράλληλες, να γράψετε στην κόλλα σας ολοκληρωμένες τις ισότητες:

i) $\frac{AB}{BG} = \dots\dots\dots$

ii) $\frac{AG}{AB} = \dots\dots\dots$

iii) $\frac{B'G'}{A'G'} = \dots\dots\dots$



Β. ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ Β1

Δίνονται οι παραστάσεις: $A = x^2 + 2x$, $B = x^2 - 4$ και $\Gamma = x^2 - 4x + 4$

α) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις A , B και Γ .

β) Να βρείτε το ΕΚΠ των παραστάσεων A , B και Γ .

γ) Αν $x \neq -2$ και $x \neq 0$ και $x \neq 2$, να λύσετε την εξίσωση: $\frac{A}{x} + \frac{B}{x+2} + \frac{\Gamma}{x-2} = -2x^2$

ΘΕΜΑ Β2

Δίνονται οι ευθείες $\epsilon_1: -3x + 4\psi = 14$ και $\epsilon_2: 2x - \psi = -1$.

α) Να βρείτε το κοινό σημείο των ευθειών ϵ_1 και ϵ_2 .

β) Αν οι ευθείες ϵ_1 και ϵ_2 τέμνονται στο σημείο $A(2, 5)$ και η ευθεία $\epsilon_3: \alpha x + \beta \psi = 3$ διέρχεται από τα σημεία $A(2, 5)$ και $B(0, -3)$, να βρείτε τις τιμές των α και β .

ΘΕΜΑ Β3

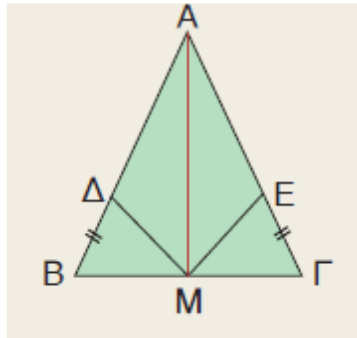
Δίνεται το ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$, με $AB=AG$.

Αν M είναι το μέσο της βάσης $B\Gamma$ και τα Δ, E σημεία των πλευρών AB και AG αντίστοιχα, τέτοια ώστε $B\Delta = GE$, να αποδείξετε ότι:

α) Το τρίγωνο $M\Delta E$ είναι ισοσκελές.

β) Τα τρίγωνα ΔDM και AEM είναι ίσα.

γ) Η AM είναι διχοτόμος της γωνίας ΔME .



ΟΔΗΓΙΕΣ

1. Όλα τα θέματα να τα απαντήσετε στην κόλλα σας.
2. Από τα δύο (2) θέματα θεωρίας να απαντήσετε μόνο στο ένα (1).
3. Από τα τρία (3) θέματα ασκήσεων να απαντήσετε μόνο στα δύο (2).
4. Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα.
5. Στα σχήματα που θα χρειαστούν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε και μολύβι.
6. Διαθέσιμος χρόνος εξέτασης δύο (2) ώρες.
7. Χρόνος δυνατής αποχώρησης 30' μετά από τη διανομή των θεμάτων.

Καλή επιτυχία!

ΟΝΟΜ/ΜΟ.....

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα Α :

(α1) Να χαρακτηρίσετε με σωστό ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

Για πραγματικούς αριθμούς χ και ψ ισχύει ότι :

1) Το μονώνυμο $3\chi^4\psi^2$ είναι 6^{ου} βαθμού ως προς χ και ψ (Σ Λ)

2) Δύο μονώνυμα που έχουν ίσους συντελεστές είναι όμοια (Σ Λ)

3) Η παράσταση $\frac{\chi^4+2}{\chi+5}$, ορίζεται για κάθε $\chi \neq 5$ (Σ Λ)

4) Τα μονώνυμα $8\chi^2$ και $-8\chi^3$ είναι αντίθετα (Σ Λ)

(α2) Να κάνετε την παρακάτω αντιστοίχιση μεταξύ των στηλών 1 και 2, όπου χ, ψ είναι πραγματικοί αριθμοί.

ΣΤΗΛΗ 1

ΣΤΗΛΗ 2

(1) $(\chi - \psi)^2 = \dots$

(α) $(\chi + \psi) \cdot (\chi - \psi)$

(2) $(\chi + \psi)^2 = \dots$

(β) $\chi^2 - 2\chi\psi + \psi^2$

(3) $\chi^2 - \psi^2 = \dots$

(γ) $\chi^2 - 2\chi\psi - \psi^2$

(δ) $\chi^2 + 2\chi\psi + \psi^2$

Θέμα Β:

(β1) Να χαρακτηρίσετε με σωστό ή λάθος τις παρακάτω προτάσεις :

1) Ο αριθμός 0 είναι λύση της εξίσωσης $2\chi^2 - 6\chi + 4 = 0$ (Σ Λ)

2) Οι λύσεις της εξίσωσης $(\chi - 3)(\chi + 4) = 0$ είναι $\chi = 3$ και $\chi = -4$ (Σ Λ)

3) Η εξίσωση $\chi^2 = -16$ έχει λύση τον αριθμό $\chi = -4$ (Σ Λ)

4) Ο αριθμός $\chi = 3$ είναι λύση της εξίσωσης $\chi^2 = 9$ (Σ Λ)

(β2) Να κάνετε την παρακάτω αντιστοίχιση μεταξύ των στηλών 1 και 2, όπου Δ είναι η διακρίνουσα της εξίσωσης $a\chi^2 + b\chi + \gamma = 0$, $a \neq 0$

ΣΤΗΛΗ 1

ΣΤΗΛΗ 2

(1) $\Delta > 0$

(α) Η εξίσωση έχει μία διπλή λύση

(2) $\Delta = 0$

(β) Η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις

(3) $\Delta < 0$

(γ) Η εξίσωση έχει δύο άνισες λύσεις

(δ) Η εξίσωση δεν έχει λύση (αδύνατη)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1^η:

- 1) Να λύσετε την εξίσωση : $x^2 - 4x + 3 = 0$ (μον. 4)
- 2) Να τρέψετε το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ σε γινόμενο παραγόντων (μον. 2,5)

ΑΣΚΗΣΗ 2^η:

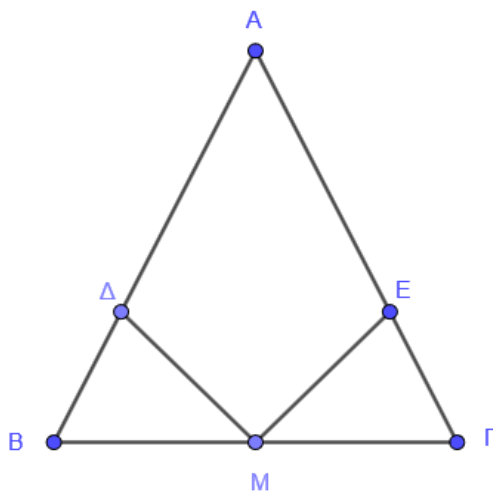
Αν για την οξεία γωνία ω ισχύει ότι $\eta\mu\omega = \frac{2}{3}$ τότε :

- 1) Να υπολογίσετε το $\sigma\upsilon\nu\omega$ (μον. 4)
- 2) Να υπολογίσετε την $\epsilon\phi\omega$ (μον. 2,5)

ΑΣΚΗΣΗ 3^η:

Στο παρακάτω σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές ($AB = A\Gamma$) ,
Το M είναι το μέσο της $B\Gamma$ και $B\Delta = \Gamma E$

- 1) Να αποδείξετε ότι $M\Delta = ME$ (μον. 4)
- 2) Να αποδείξετε ότι η ευθεία AM είναι μεσοκάθετος του ευθ. τμήματος ΔE (μον. 2,5)



**ΓΡΑΠΤΕΣ ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΤΙΚΕΣ ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ
ΠΕΡΙΟΔΟΥ ΙΟΥΝΙΟΥ 2022**

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ: Μαθηματικά

Διάρκεια εξέτασης: Δύο (2) ώρες-Δυνατή αποχώρηση: 45' μετά τη διανομή των θεμάτων

ΝΑ ΑΠΑΝΤΗΣΕΤΕ ΣΤΗΝ ΚΟΛΛΑ ΑΝΑΦΟΡΑΣ ΚΑΙ ΟΧΙ ΣΤΟ ΠΑΡΟΝ ΦΥΛΛΑΔΙΟ!

ΘΕΩΡΙΑ(ΠΡΟΣΟΧΗ! Να απαντήσετε μόνο σε ένα από τα δύο θέματα θεωρίας)

ΘΕΩΡΙΑ 1(6,6 μ.)

A. Να αντιστοιχίσετε, στη σελίδα σας, σε κάθε αλγεβρική παράσταση της στήλης I το ανάπτυγμα της από τη στήλη II, ώστε να προκύψουν οι γνωστές ταυτότητες. (2 μ.)

B. Να αποδείξετε την ταυτότητα

$$(a + b)(a - b) = a^2 - b^2 \text{ (2,6 μ.)}$$

Γ. Να χαρακτηρίσετε, στην σελίδα σας, την κάθε πρόταση ως Σωστή ή Λάθος: (2 μ.)

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
	A. $a^2 - 2ab + b^2$
1. $(a + b)^2$	B. $a^2 - b^2$
2. $(a - b)^3$	Γ. $a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
3. $(a - b)^2$	Δ. $a^2 + 2ab + b^2$
4. $(a + b)^3$	E. $a^3 + b^3$
	Z. $a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

1. Το πολώνυμο $3x^2 + 4x - 11$ λέγεται τριώνυμο.

2. Κάθε ισότητα που περιέχει μεταβλητές ονομάζεται ταυτότητα

3. Η παράσταση $\frac{x^4 + 3y^2}{5}$ είναι μια ρητή αλγεβρική παράσταση.

4. Ο βαθμός του πολωνύμου $x^5y - 3x^3y^5 + 6xy^2$, ως προς x και y, είναι 8.

ΘΕΩΡΙΑ 2 (6,6 μ.)

A. Να αντιστοιχίσετε σε κάθε στοιχείο της στήλης I το ίσο του από τη στήλη II, ώστε να προκύψουν, σύμφωνα με το σχήμα, οι γνωστοί ορισμοί. (2 μ.)

B. Να αποδείξετε την σχέση $\varepsilon\varphi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$ (2,6 μ.)

Γ. Να χαρακτηρίσετε, στην σελίδα σας, την κάθε πρόταση ως

Σωστή ή Λάθος:

(2 μ.)

1. Το $\varepsilon\varphi 140^\circ = \varepsilon\varphi 40^\circ$

ΣΤΗΛΗ I	ΣΤΗΛΗ II
	A. $\frac{y}{x}$
1. ρ^2	B. $\frac{x}{y}$
2. $\eta\mu\omega$	Γ. $\frac{x}{\rho}$
3. $\sigma\upsilon\nu\omega$	Δ. $x^2 + y^2$
4. $\varepsilon\varphi\omega$	E. $\frac{y}{\rho}$
	Z. $\frac{x^2 + y^2}{\rho^2}$

2. Για κάθε γωνία ω , με $0^\circ \leq \omega \leq 180^\circ$, ισχύει η σχέση $0 \leq \sin \omega \leq 1$
3. Αν η γωνία ω είναι αμβλεία, τότε $\eta\mu\omega < 0$
4. Για κάθε γωνία ω ισχύει η σχέση $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ(ΠΡΟΣΟΧΗ! Να απαντήσετε μόνο σε δύο από τα τρία θέματα ασκήσεων)

ΑΣΚΗΣΗ1 (6,7 μ.)

A.i) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 - 4x + 3 = 0$ (3 μ.)

ii) Να παραγοντοποιήσετε το τριώνυμο $x^2 - 4x + 3$ (1 μ.)

B. Δίνεται το πολώνυμο $A(x) = (x+3)^2 - 6(x+2) + 2$

Να αποδείξετε ότι $A(x) = x^2 - 1$ (1,5 μ.)

Γ. Να απλοποιήσετε την παράσταση : $\frac{x^2 - 4x + 3}{A(x)}$ (1,2 μ.)

ΑΣΚΗΣΗ2 (6,7 μ.)

Δίνεται το σύστημα γραμμικών εξισώσεων
$$\begin{cases} 2x - 3y = -1 \\ x + 2y = 10 \end{cases}$$

A. i) Να λύσετε το παραπάνω σύστημα γραμμικών εξισώσεων, με όποια αλγεβρική μέθοδο θέλετε και να δείξετε ότι η λύση του είναι το ζεύγος $(x, y) = (4, 3)$. (2,5 μ.)

ii) Να ερμηνεύσετε γραφικά το αποτέλεσμα του Α ερωτήματος. (1 μ.)

B. Έστω ω αμβλεία γωνία, με $\eta\mu\omega = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}}$, όπου x και y τα του Α ερωτήματος.

i) Να αποδείξετε ότι $\eta\mu\omega = \frac{3}{5}$ (1,2 μ.)

ii) Να υπολογίσετε τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας ω . (2 μ.)

ΑΣΚΗΣΗ3 (6,7 μ.)

Δίνεται το διπλανό ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$).

Στη διχοτόμο του $A\Delta$ θεωρούμε τυχαίο σημείο K .

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα AKB και $AK\Gamma$ είναι ίσα.

(3,5 μ.)

B. Να βρείτε το είδος του τριγώνου $BK\Gamma$, ως προς τις πλευρές του,
δικαιολογώντας την απάντησή σας. **(1,5 μ.)**

Γ. Να εξηγήσετε γιατί το $K\Delta$ είναι ύψος του τριγώνου $BK\Gamma$. **(1,7 μ.)**

ΘΕΜΑΤΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΘΕΩΡΙΑ

Από τα 2 Θέματα Θεωρίας να επιλέξετε 1 θέμα

ΘΕΜΑ 1^ο

1. Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$.

Μονάδες 1,1

2. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.
- i. Ο αριθμός 2022 θεωρείται σταθερό μονώνυμο.
 - ii. Τα μονώνυμα $5\kappa\lambda^2\mu$ και $5\kappa^2\lambda\mu$ είναι όμοια.
 - iii. Ισχύει $(-\alpha - \beta)^2 = -(\alpha + \beta)^2$ για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α και β .
 - iv. Ισχύει $(\beta - \alpha)^3 = \beta^3 + 3\alpha^2\beta - 3\alpha\beta^2 - \alpha^3$ για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών α και β .
 - v. Ο βαθμός του μονωνύμου $x\gamma^3w^5$ ως προς x, γ, w είναι 8.
 - vi. Ισχύει $(-z + \omega)^2 = \omega^2 - 2z\omega + z^2$ για κάθε τιμή των πραγματικών αριθμών z και ω .
 - vii. Αν το πολυώνυμο $P(x)$ έχει βαθμό 3 και το πολυώνυμο $Q(x)$ έχει βαθμό 2, τότε το πολυώνυμο $P(x) + Q(x)$ έχει βαθμό 5.

Μονάδες 3,5

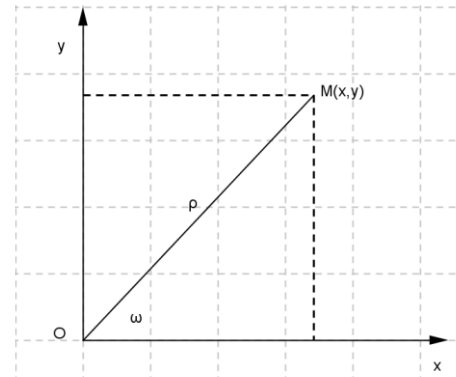
3. Να αντιστοιχίσετε στο φύλλο των απαντήσεών σας το γράμμα των προτάσεων από τη στήλη Α με τον αριθμό από τη στήλη Β.

Στήλη Α	Στήλη Β
α) Είναι όμοια μονώνυμα και έχουν αντίθετους ς συντελεστές.	1. Όμοια μονώνυμα
β) Είναι όμοια μονώνυμα με τον ίδιο συντελεστή.	2. Αντίθετα μονώνυμα
γ) Μονώνυμο με βαθμό μηδέν.	3. Μηδενικό μονώνυμο
δ) Για το μονώνυμο αυτό δεν ορίζεται βαθμός.	4. Σταθερό μονώνυμο
	5. Σταθερό και μη μηδενικό μονώνυμο
	6. Ίσα μονώνυμα

Μονάδες 2

ΘΕΜΑ 2^ο

1. Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να γράψετε στο φύλλο των απαντήσεών σας τον τύπο του ρ και να ορίσετε το $\eta\mu\omega$, το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και την $\epsilon\phi\omega$.



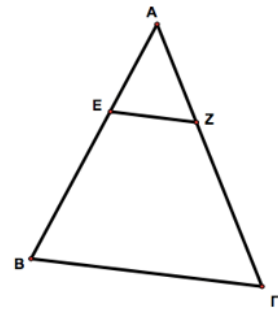
Μονάδες 1

2. Να αποδείξετε ότι για οποιαδήποτε γωνία ω ισχύει $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega = 1$.

Μονάδες 1,1

3. Στο διπλανό σχήμα δίνονται τα όμοια τρίγωνα ABΓ και AEZ με $EZ \parallel B\Gamma$. Να αντιγράψετε και να συμπληρώσετε στο φύλλο των απαντήσεών σας τις παρακάτω ισότητες:

$$\frac{AB}{AE} = \frac{\dots\dots\dots}{AZ} = \frac{B\Gamma}{\dots\dots\dots}, \dots\dots\dots = \widehat{AEZ} \text{ και } \hat{\Gamma} = \dots\dots\dots$$



Μονάδες 1

4. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο φύλλο των απαντήσεών σας

τη λέξη **Σωστό** ή **Λάθος**, δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- Αν $\sigma\upsilon\nu\omega = 0$, δεν ορίζεται η $\epsilon\phi\omega$.
- Αν η γωνία ω είναι οξεία, τότε $\eta\mu\omega < 0$.
- Δύο ισόπλευρα τρίγωνα είναι πάντα όμοια.
- Ισχύει $\epsilon\phi(180^\circ - \omega) = \epsilon\phi\omega$.
- Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία, τότε θα έχουν και την τρίτη τους πλευρά ίση.
- Για κάθε γωνία ω , $\eta\mu^2\omega = 1 - \sigma\upsilon\nu^2\omega$.
- Δύο ορθογώνια τρίγωνα είναι ίσα, όταν έχουν δύο οποιεσδήποτε πλευρές τους μία προς μία ίσες.

Μονάδες 3,5

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Από τις 3 Ασκήσεις να επιλέξετε 2 Ασκήσεις

ΑΣΚΗΣΗ 1^η

1. Δίνονται τα πολυώνυμα $A(x) = (x - 1)^3 - (x + 3)^2 + x(4x - 1) + 10$, $B(x) = x^2 + (3x - 2)^2 - 2$ και η κλασματική παράσταση $\Gamma(x) = \frac{x^2 - 4x + 4}{x^2 - 4} \cdot \frac{x^4 + 2x^3}{x^2 - 2x}$.

A1. Να δείξετε ότι $A(x) = x^3 - 4x$.

Μονάδες 1,4

A2. Να λυθεί η εξίσωση $B(x) = 0$.

Μονάδες 1,4

A3. Να αποδείξετε ότι $\Gamma(x) = x^2$.

Μονάδες 2

2. Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{5-x}{4} + \frac{2y-1}{3} = x+1 \\ (x+3)^2 - (x-1)(x+3) + 2y = 20 \end{cases}$$

Μονάδες 1,8

ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο ABΓ είναι ισοσκελές με $AB = AG = 12\text{cm}$.

Δίνεται $AM = AN = 3\text{cm}$, ΜΗ και ΝΚ κάθετες στη βάση ΒΓ και $MN \parallel B\Gamma$.

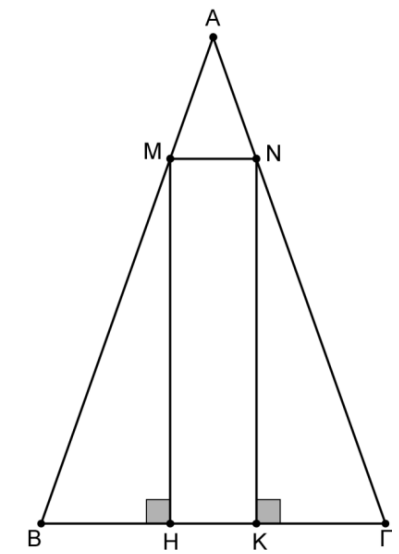
1. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΒΗΜ και ΝΚΓ είναι ίσα.
2. Να δείξετε ότι $BH = K\Gamma$.
3. Να δείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΜΝ και ΑΒΓ είναι όμοια.
4. Αν $MN = 2\text{cm}$, βρεθεί το μήκος του ΒΓ και του ΒΗ.

Μονάδες 2

Μονάδες 1

Μονάδες 2

Μονάδες 1,6



ΑΣΚΗΣΗ3^η

1. Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $\eta\mu\omega = \frac{\sqrt{7}}{4}$, να υπολογίσετε

A1. τους υπόλοιπους τριγωνομετρικούς αριθμούς την γωνίας ω .

Μονάδες 2,6

A2. την παράσταση $A = 2\eta\mu\omega \cdot \sigma\upsilon\nu 120^\circ - 8\sigma\upsilon\nu\omega + \frac{3}{4}\epsilon\phi\omega \cdot \epsilon\phi 135^\circ$.

Μονάδες 2

2. Να αποδείξετε ότι για οποιεσδήποτε γωνίες ϕ και θ , ισχύει
 $\sigma\upsilon\nu^2\phi \cdot \sigma\upsilon\nu^2\theta + \sigma\upsilon\nu^2\phi \cdot \eta\mu^2\theta + \eta\mu^2\phi = 1$

Μονάδες 2

ΘΕΩΡΙΑ (από τα 2 θέματα απαντήστε σε 1)**ΘΕΜΑ 1^ο****α)** Να αποδείξετε την ταυτότητα:

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

β) Να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να είναι αληθείς οι ισότητες:

$$\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$(\alpha + \beta)^3 = \underline{\hspace{2cm}}$$

γ) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ) αν είναι σωστές ή με (Λ) αν είναι λάθος:

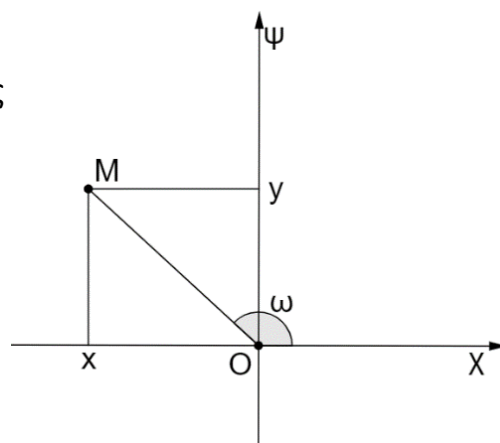
$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2$$

ΘΕΜΑ 2^ο**α)** Με τη βοήθεια του διπλανού σχήματος να ορίσετε τους τριγωνομετρικούς αριθμούς της γωνίας $\widehat{xOM} = \omega$:

$$\eta\mu\omega = \underline{\hspace{2cm}} \quad \sigma\upsilon\nu\omega = \underline{\hspace{2cm}}$$

$$\epsilon\phi\omega = \underline{\hspace{2cm}} \quad \rho = OM = \underline{\hspace{2cm}}$$

β) Να αποδείξετε ότι $\epsilon\phi\omega = \frac{\eta\mu\omega}{\sigma\upsilon\nu\omega}$.**γ)** Να αντιστοιχίσετε κάθε ένα από τη στήλη Α σε ένα από τη στήλη Β.

Στήλη Α	
1	$\eta\mu(180^\circ - \omega)$
2	$\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)$
3	$\epsilon\phi(180^\circ - \omega)$

Στήλη Β	
α	$\epsilon\phi\omega$
β	$-\eta\mu\omega$
γ	$-\sigma\upsilon\nu\omega$
δ	$\eta\mu\omega$
ε	$-\epsilon\phi\omega$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ(από τις 3 ασκήσεις απαντήστε σε 2)

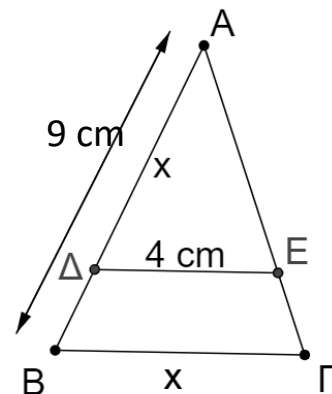
ΑΣΚΗΣΗ 1^η

Στο διπλανό σχήμα είναι $\Delta E \parallel B\Gamma$, $B\Gamma = x \text{ cm}$, $\Delta E = 4 \text{ cm}$, $AB = 9 \text{ cm}$ και $A\Delta = x \text{ cm}$.

α) Να εξηγήσετε γιατί το τρίγωνο $\Delta A\Gamma$ είναι όμοιο με το τρίγωνο $\Delta A\Delta E$.

β) Να γράψετε τις αναλογίες των πλευρών.

γ) Να υπολογίσετε το x .



ΑΣΚΗΣΗ 2^η

Δίνονται οι παραστάσεις

$$A = x^2 - 4x + 3$$

$$B = x^2 - 4$$

$$\Gamma = 3x - 9$$

α) Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$.

β) Να γίνουν γινόμενα οι παραστάσεις A, B, Γ .

γ) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται το κλάσμα $\frac{A}{\Gamma}$ και στη συνέχεια να το απλοποιήσετε.

ΑΣΚΗΣΗ 3^η

α) Να λυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - y = 14 \\ 3x + y = 16 \end{cases}$$

β) Αν $x = 6$ και $y = -2$ είναι η λύση του συστήματος του ερωτήματος α) να εξετάσετε αν είναι λύση και του συστήματος:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 6 \\ \frac{x+y}{4} + \frac{x+3y}{3} = 1 \end{cases}$$

Όλα τα θέματα είναι βαθμολογικά ισοδύναμα. Όλες οι απαντήσεις να δοθούν στην κόλλα αναφοράς.

ΘΕΩΡΙΑ

Θέμα 1^ο:

Να μεταφέρετε στο φύλλο των απαντήσεών σας τις παρακάτω ισότητες συμπληρωμένες ώστε να προκύψουν γνωστές ταυτότητες.

1) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \dots$

2) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - \dots + \dots$

3) $(\alpha + \beta)^3 = \dots + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \dots$

4) $(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - \dots + 3\alpha\beta^2 - \dots$

5) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots - \dots$

Θέμα 2^ο:

Να διατυπώσετε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων (κανόνες και σχήματα)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1^η

Δίνεται η παράσταση : $A = (x-3)^2 + (x-2)(x+1) - (x-5)(x+5) - 26$

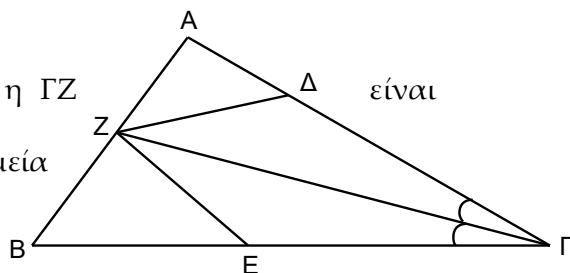
Να κάνετε τις πράξεις στην παραπάνω παράσταση και να δείξετε ότι $A = x^2 - 7x + 6$.

Άσκηση 2^η Να λύσετε το σύστημα :
$$\begin{cases} 3x + y = 5 \\ x - 2y = -3 \end{cases}$$

Άσκηση 3^η:

Στο τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος η ΓΖ

διχοτόμος της γωνίας $\hat{\Gamma}$. Αν Δ και Ε είναι σημεία των πλευρών ΑΓ και ΒΓ αντίστοιχα έτσι, ώστε $\Gamma\Delta = \Gamma E$, να δείξετε ότι $Z\Delta = ZE$



ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ : ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ : 2

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ.....

ΘΕΩΡΙΑ (Να απαντήσετε σε ένα από τα δύο θέματα θεωρίας)

Θεωρία Θέμα Α

A. Να αποδειχθεί η ταυτότητα: $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$.

B. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας την παρακάτω πρόταση και να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψει ταυτότητα:

$(\alpha - \beta)^3 = \dots\dots\dots$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Το μηδενικό πολυώνυμο έχει βαθμό 0.
2. Ο βαθμός ως προς τις μεταβλητές x, y του μονώνυμου $2x^2y$ είναι 2.
3. Οι ακέραιες αλγεβρικές παραστάσεις, στις οποίες μεταξύ των μεταβλητών σημειώνεται μόνο η πράξη του πολλαπλασιασμού, λέγονται **μονώνυμα**.
4. Δύο μονώνυμα λέγονται ίσα όταν είναι όμοια και έχουν ίσους συντελεστές.

Θεωρία Θέμα Β

A. Να διατυπώσετε το θεώρημα Θαλή.

B. Να μεταφέρετε στην κόλλα σας τις παρακάτω προτάσεις και να συμπληρώσετε τα κενά ώστε να προκύψουν κριτήρια ισότητας τριγώνων:

α. Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν τις τους ίσες μία προς μία.

β. Δύο τρίγωνα είναι ίσα όταν έχουν δύο πλευρές ίσες μία προς μία και την
γωνία τους ίση.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στην κόλλα σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση

1. Αν δύο πολύγωνα έχουν τις πλευρές τους ανάλογες, τότε πάντα είναι όμοια.
2. Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο γωνίες ίσες μία προς μία, τότε είναι όμοια.
3. Κύρια στοιχεία ενός τριγώνου είναι οι πλευρές και οι γωνίες του.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ (Να απαντήσετε σε δύο από τα τρία θέματα ασκήσεων)

Ασκήσεις Θέμα 1

A. Να λυθεί η εξίσωση $(x+1)^2 + 3(x-1)^2 - 3x^2 - x = 0$

B. Να παραγοντοποιηθεί το τριώνυμο $x^2 - 5x + 4$

Γ. Να απλοποιηθεί η παράσταση $A = \frac{x^2 - 5x + 4}{x^2 - 16}$.

Ασκήσεις Θέμα 2

Δίνεται το σύστημα (Σ):
$$\begin{cases} \frac{x+y}{2} + \frac{x+2y-2}{3} = y+2 \\ \frac{x-3y}{3} + \frac{x+y}{4} = 1 \end{cases}$$

A. Αφού κάνετε τις πράξεις στις εξισώσεις του συστήματος (Σ), να αποδείξετε ότι το σύστημα (Σ) καταλήγει στο σύστημα (Σ₁)
$$\begin{cases} 5x + y = 16 \\ 7x - 9y = 12 \end{cases}$$

B. Να λυθεί το σύστημα (Σ₁).

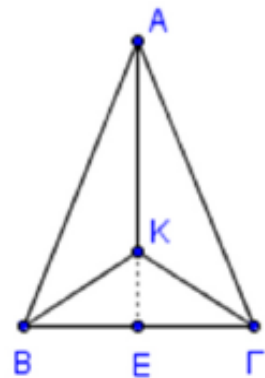
Ασκήσεις Θέμα 3 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ=ΑΓ)

θεωρούμε εσωτερικό σημείο Κ, ώστε ΒΚ=ΚΓ.

A. Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΚ και ΑΓΚ είναι ίσα.

B. Να αποδείξετε ότι η ΑΚ είναι διχοτόμος της γωνίας ΒΑΓ.

Γ. Αν η προέκταση της ΑΚ τέμνει την ΒΓ στο σημείο Ε, να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΕ είναι ίσα.



ΟΔΗΓΙΕΣ: Να απαντήσετε σε 1 θέμα θεωρίας και σε 2 θέματα ασκήσεων. Δεν θα γράψετε καμία απάντηση στην κόλλα των θεμάτων. Όλα τα θέματα είναι ισοδύναμα. Απαγορεύετε η χρήση διορθωτικού υγρού (blanko) και υπολογιστών τσέπης.

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΩΡΙΑ 1

A) Να γράψεις στην κόλλα αναφοράς δίπλα σε κάθε αριθμό τη λέξη πουλείπει ώστε να συμπληρωθεί σωστά ο ορισμός της ταυτότητας.

Ταυτότητα λέγεται κάθε(1)..... που περιέχει(2)..... και αληθεύει για όλες τις(3)..... των(4)..... της.

B)Αφού μεταφέρεις στην κόλλα αναφοράς τον πίνακα 2, να τον συμπληρώσεις αντιστοιχώντας σε κάθε γινόμενο της Α στήλης του πίνακα 1 ένα μόνο ανάπτυγμα από την Β στήλη, ώστε να προκύψουν αξιοσημείωτες ταυτότητες.

(πίνακας 1)

A ΣΤΗΛΗ	B ΣΤΗΛΗ
i) $(\alpha - \beta)^2$	1) $\alpha^2 - \beta^2$
ii) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta)$	2) $\alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$
iii) $(\alpha + \beta)^3$	3) $\alpha^3 + 3\alpha\beta + \beta^3$
iv) $(\alpha - \beta)^3$	4) $\alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$
v) $(\alpha + \beta)^2$	5) $\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$
	6) $\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$

(πίνακας 2)

i	ii	iii	iv	v

ΘΕΩΡΙΑ 2

A) Να γράψεις στην κόλλα αναφοράς δίπλα σε κάθε αριθμό τη λέξη πουλείπει ώστε να προκύψουν κριτήρια ισότητας τριγώνων.

- i) Αν δύο τρίγωνα έχουν δύο πλευρές(1)..... μία προς μία και την(2)..... γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.
- ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν μία πλευρά ίση και τις (1)..... στην πλευρά αυτή γωνίες (2)..... μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- iii) Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν μία αντίστοιχη(1)..... ίση και μία αντίστοιχη (2)..... γωνία ίση, τότε είναι ίσα.

B)Να χαρακτηρίσεις καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις σωστή ή λανθασμένη γράφοντας στην κόλλα αναφοράς τη λέξη Σωστή ή Λάθος δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

- i) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα.
- ii) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
- iii) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες, μία προς μία, τότε είναι ίσα.

iv) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες γωνίες βρίσκονται ίσες πλευρές.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

i) Να λύσεις την εξίσωση: $3x^2 - 5x - 2 = 0$

ii) Να παραγοντοποιήσεις το τριώνυμο: $3x^2 - 5x - 2$

iii) Να κάνεις την πράξη $\frac{3x^2 - 5x - 2}{x^2 - 9} : \frac{3x - 6}{x + 3}$ με όλες τις δυνατές απλοποιήσεις.

ΑΣΚΗΣΗ 2

Δίνονται οι παραστάσεις:

$$A = (x - 2)^2 - x(x - 4) - 1 \text{ και } B = x(x + 2) - (x - 3)(x + 3) - 2(x - 1)$$

i) Να κάνεις πράξεις, εφαρμόζοντας όπου είναι δυνατόν ταυτότητα, για να δείξεις ότι $A = 3$.

ii) Να κάνεις πράξεις, εφαρμόζοντας όπου είναι δυνατόν ταυτότητα, για να δείξεις ότι $B = 11$.

iii) Να λύσεις το σύστημα:
$$\left. \begin{array}{l} 2x - y = A \\ 3x + 5y = B \end{array} \right\} \text{ με όποια αλγεβρική μέθοδο θέλεις,}$$

όπου A και B τα αποτελέσματα των ερωτημάτων i) και ii)

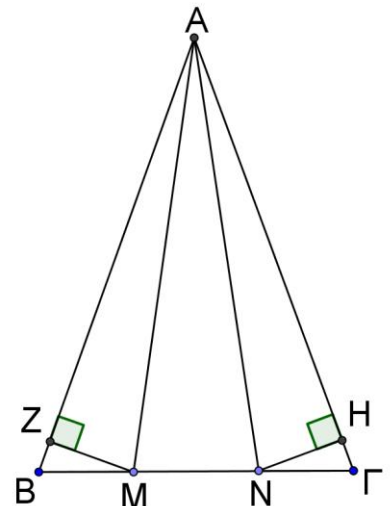
ΑΣΚΗΣΗ 3

Στο διπλανό σχήμα το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ισοσκελές με $AB = A\Gamma$.

Αν M, N σημεία της βάσης BΓ με $BM = N\Gamma$ και φέρουμε επίσης $MZ \perp AB$ και $NH \perp A\Gamma$, τότε:

i) Να δείξεις ότι τα τρίγωνα ABM και ANΓ είναι ίσα.

ii) Να δικαιολογήσεις γιατί $AZ = AH$.



Από τα δύο θέματα θεωρίας απαντάτε το ένα και από τις τρεις ασκήσεις λύνετε τις δύο.

Τα θέματα είναι βαθμολογικώς ισοδύναμα. Όλες οι απαντήσεις να δοθούν στην κόλλα αναφοράς.

ΤΑΞΗ Γ΄

(Α) ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ 1 : (α) Να συμπληρωθούν οι ισότητες :

$$(\alpha + \beta)^2 =$$

$$(\alpha - \beta)^2 =$$

$$(\alpha + \beta) \cdot (\alpha - \beta) =$$

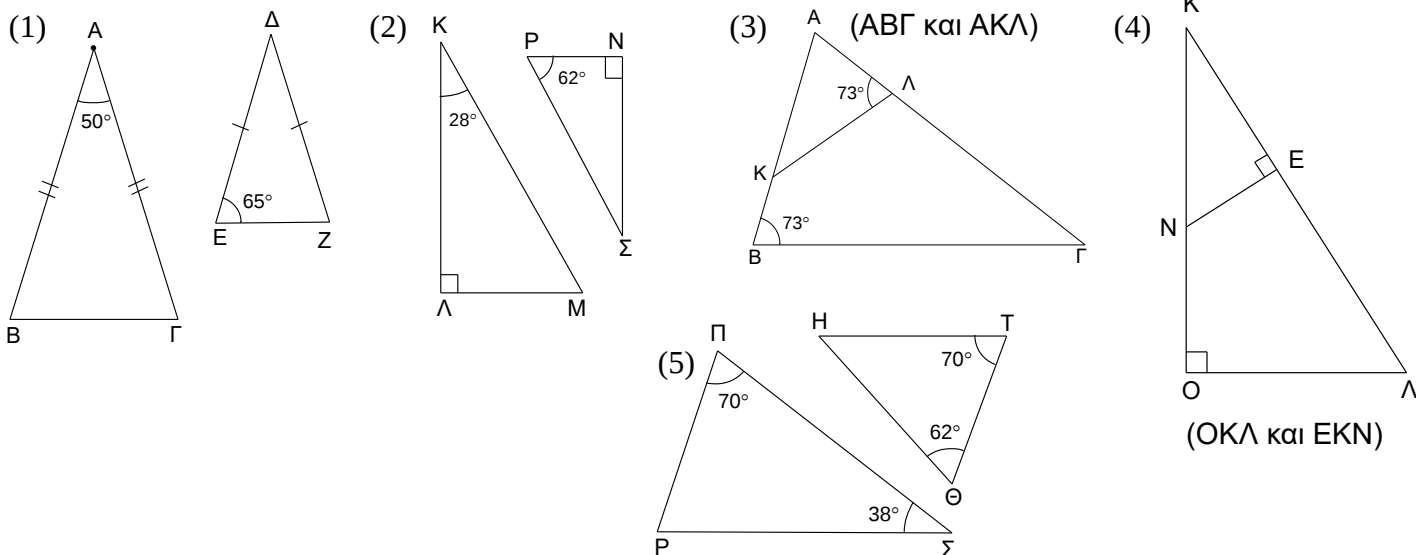
$$(\alpha + \beta)^3 =$$

$$(\alpha - \beta)^3 =$$

(β) Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστή» ή «Λάθος» καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις :

1. Η αλγεβρική παράσταση **Error!** είναι **μονώνυμο**
2. Το μονώνυμο $4\alpha\beta^5$ και $-4\alpha^5\beta$ είναι **αντίθετα**
3. Το πολώνυμο $3xy^4 + 2x^2y^2 - 5xy$ είναι 4^{ου} βαθμού ως προς **x και y**
4. Ισχύει **Error!** $= \alpha - 4$
5. Το **μηδενικό** μονώνυμο έχει βαθμό μηδέν

ΘΕΜΑ 2 : (α) Για καθένα από τα παρακάτω ζεύγη τριγώνων, να αναφέρετε αν είναι **όμοια** ή όχι :



(β) Να χαρακτηρίσετε ως «Σωστή» ή «Λάθος» καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις :

1. Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο γωνίες τους ίσες μια προς μια, τότε είναι **όμοια**
2. Δύο κανονικά πολύγωνα είναι πάντοτε **όμοια**
3. Αν δύο τρίγωνα είναι **όμοια**, τότε θα είναι και **ίσα**
4. Αν δύο ορθογώνια τρίγωνα έχουν από μια οξεία γωνία ίση, τότε είναι **όμοια**
5. Δυο ορθογώνια παραλληλόγραμμα είναι πάντα **όμοια**

(Β) ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΘΕΜΑ 1 : Να λυθεί η εξίσωση :

$$(2x - 1)^2 = 3x(x - 2) + 9$$

ΘΕΜΑ 2 : Δίνεται το σύστημα :

$$\begin{cases} 2\alpha - \beta = 5 \\ \alpha - 2\beta = -20 \end{cases}$$

(α) Να λυθεί το σύστημα (με οποιαδήποτε μέθοδο) και να βρεθεί ότι η λύση του είναι το ζεύγος $(\alpha, \beta) = (10, 15)$

(β) Δίνονται οι αλγεβρικές παραστάσεις :

$$A = x^2 - \alpha x + 25, \quad B = 3x - \beta \quad \text{και} \quad \Gamma = x^2 - 25$$

(όπου (α, β) είναι η λύση του παραπάνω συστήματος)

(i) Να παραγοντοποιηθούν οι παραστάσεις A , B και Γ

(ii) Να απλοποιηθούν τα κλάσματα **Error!** και **Error!**

ΘΕΜΑ 3 : Δίνεται αμβλεία γωνία ω , για την οποία ισχύει $\eta\mu\omega = \mathbf{Error!}$

(α) Να υπολογιστούν το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και η $\epsilon\phi\omega$

(β) Να βρεθούν οι τριγωνομετρικοί αριθμοί $\eta\mu(180^\circ - \omega)$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)$ και $\epsilon\phi(180^\circ - \omega)$

ΑΠΟ ΤΑ ΔΥΟ ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΘΑ ΓΡΑΨΕΤΕ ΤΟ ΕΝΑ
ΑΠΟ ΤΙΣ ΤΡΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΘΑ ΛΥΣΕΤΕ ΤΙΣ ΔΥΟ

⊇↓↓< !

Γραπτές Απολυτήριες Εξετάσεις Μαΐου-Ιουνίου 2022

ΘΕΜΑΤΑ

A. ΘΕΜΑΤΑ ΘΕΩΡΙΑΣ

Επιλέγετε και απαντάτεσ'ένα(1) από τα δυο θέματα θεωρίας.

ΘΕΜΑ Α(6 μονάδες)

A) Ποια μονώνυμα λέγονται όμοια; Να αναφέρετε παράδειγμα.

Μονάδες 1

B) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στην κόλλα σας δίπλα στον αριθμό που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση, την λέξη **Σωστό**, αν η πρόταση είναι σωστή, ή **Λάθος**, αν η πρόταση είναι λανθασμένη.

- 1) Ένα πολώνυμο λέγεται τριώνυμο, αν έχει δυο όρους.
- 2) Η διαδικασία με την οποία μια παράσταση, που είναι άθροισμα, μετατρέπεται σε γινόμενο παραγόντων, λέγεται παραγοντοποίηση.
- 3) Η εξίσωση $3x = 0$ είναι αδύνατη.
- 4) Αν $\alpha > \beta$ τότε $\alpha - \beta < 0$.

Μονάδες 4

Γ) Να συμπληρώσετε στην κόλλα σας τις παρακάτω ταυτότητες :

α) $(\alpha - \beta)^2 = \dots\dots\dots$

β) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \dots\dots\dots$

Μονάδες 1

ΘΕΜΑ Β(6 μονάδες)

A) Να διατυπώσετε το θεώρημα του Θαλή.

Μονάδες 1

B) Να συμπληρώσετε τα κενά που λείπουν στις παρακάτω προτάσεις γράφοντας στην κόλλα σας τον αριθμό της πρότασης και τις κατάλληλες λέξεις.

- 1) Αν δυο τρίγωνα έχουν δυο πλευρές ίσες μια προς μια και την γωνία τους ίση, τότε είναι ίσα.
- 2) Αν δυο τρίγωνα έχουν μια πλευρά ίση και τις στην πλευρά αυτή γωνίες ίσες μια προς μια, τότε είναι ίσα.

- 3) Αν δυο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους μια προς μια, τότε είναι ίσα.
4) Σε κάθε ισοσκελές τρίγωνο, η , το και η που φέρουμε από την κορυφή προς την βάση του συμπίπτουν.

Μονάδες 5

B. ΘΕΜΑΤΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ

Επιλέγετε και λύνετε **δυο(2)** από τις τρεις ασκήσεις.

ΘΕΜΑ Α(7μονάδες)

A) Να λύσετε την εξίσωση : $3x^2 - 8x + 5 = 0$.

Μονάδες 3

B) Να παραγοντοποιήσετε την παραπάνω εξίσωση.

Μονάδες 4

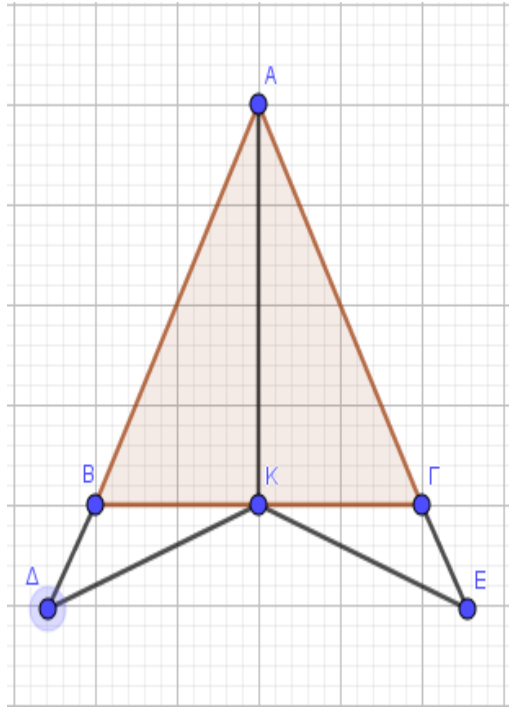
ΘΕΜΑ Β(7μονάδες)

A) Να λύσετε την ανισότητα : $x - \frac{3x+1}{2} > \frac{3}{4}$.

Μονάδες 7

ΘΕΜΑ Γ(7μονάδες)

Δίνεται τρίγωνο $ABΓ$ ισοσκελές με βάση την πλευρά $BΓ$. Προεκτείνουμε τις ίσες πλευρές AB και $AΓ$ κατά ίσα τμήματα $BΔ$ και $ΓΕ$ αντίστοιχα, όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Η $ΑΚ$ είναι διάμεσος του ισοσκελούς τριγώνου $ABΓ$.



A) Τι γνωρίζουμε για την διάμεσο που φέρουμε από την κορυφή προς την βάση ενός ισοσκελούς τριγώνου;

Μονάδες 2

B) Να αποδείξετε ότι τα τρίγωνα $AK\Delta$ και AKE είναι ίσα.

Μονάδες 5

ΟΔΗΓΙΕΣ

- Να απαντήσετε σε (1) ένα θέμα θεωρίας και (2) δύο θέματα ασκήσεων.

Θ Ε Ω Ρ Ι Α

ΘΕΜΑ 1^ο

A1. Τι λέγεται ταυτότητα.

A2. Να αποδείξετε την ταυτότητα : $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$.

A3. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές (Σ) ή Λάθος(Λ):

α. $\alpha^2 + 1 = (\alpha + 1)^2$

β. $(\alpha + 2)(2 - \alpha) = 4 - \alpha^2$

δ. $(\alpha - \beta)^2 = \beta^2 - 2\beta\alpha + \alpha^2$

ΘΕΜΑ 2^ο

A1. Να διατυπώσετε τα τρία κριτήρια ισότητας τριγώνων.

A2. Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστές ή Λάθος.

- i) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις γωνίες τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- ii) Αν δύο τρίγωνα έχουν τις πλευρές τους ίσες μία προς μία, τότε τα τρίγωνα είναι ίσα.
- iii) Σε δύο τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.
- iv) Σε δύο ίσα τρίγωνα απέναντι από ίσες πλευρές βρίσκονται ίσες γωνίες.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 1

i. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

$$K = 4x^2 - 16 =$$

$$\Lambda = 2x + 4 =$$

$$\Gamma = x^2 + 2x =$$

$$\Delta = x^2 - 4 =$$

ii. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις

$$A = \frac{x^2 + 2x}{x^2 - 4} \quad \text{και} \quad B = \frac{4x^2 - 16}{2x + 4} \quad \text{και να δείξετε ότι το γινόμενο } A \cdot B = 2x$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση $x^2 + 4x - 3 = A \cdot B$

Άσκηση 2

I. Να λυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 3(2\alpha - \beta) + 2\beta = 3\alpha + 4 \\ 2(3 - \alpha) + 4(\alpha - \beta) = 7(-\beta - 1) + 12 \end{cases}$$
 όπου α, β πραγματικοί αριθμοί και να αποδείξετε ότι: $\alpha = 1$ και $\beta = -1$.

- II. Αν $(\alpha, \beta) = (1, -1)$ είναι η λύση που βρήκατε στο ερώτημα , να υπολογίσετε το πολυώνυμο

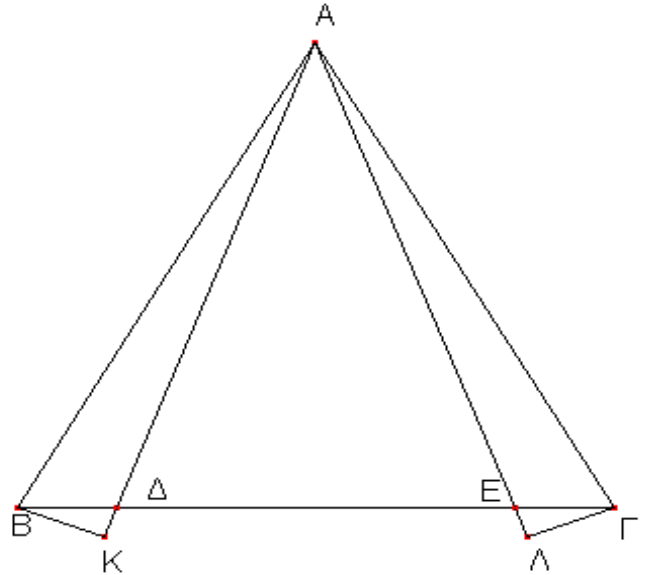
$$P(x) = (a - x)^2 + (1 - x)(1 + x) + 2(x + \beta) + 6 .$$

Άσκηση 3

Δίνεται ισοσκελές τρίγωνο $AB\Gamma$ ($AB=AG$) και πάνω στη βάση $B\Gamma$ παίρνουμε τα τμήματα $B\Delta = \Gamma E < \frac{B\Gamma}{2}$.

Δείξτε ότι:

- I. τα τρίγωνα $AB\Delta$ και $AG E$ είναι ίσα
- II. τα σημεία B, Γ ισαπέχουν από τις πλευρές $A\Delta$ και AE αντίστοιχα του τριγώνου $A\Delta E$ (δηλ. $BK = \Gamma \Lambda$)



Από τα δυο θέματα θεωρίας θα απαντήσετε το ένα και από τις τρεις ασκήσεις τις δυο.

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ:	ΑΠΟΛΥΤΗΡΙΕΣ	ΜΑΘΗΜΑ:	ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΤΜΗΜΑ:		ΗΜΕΡΟΜΗΝΙΑ:	09-06-2022

ΟΝΟΜΑΤΕΠΩΝΥΜΟ ΜΑΘΗΤΗ:

ΘΕΩΡΙΑ

ΘΕΜΑ Α

A1) Να αποδείξετε την ταυτότητα $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$ (Μονάδες 3)

A2) Να χαρακτηρίσετε με (Σ) αν είναι Σωστές ή με (Λ) αν είναι Λανθασμένες τις παρακάτω ισότητες (στην κόλλα αναφοράς):

α) $(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2 - 2\alpha\beta$

β) $(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + \alpha\beta^2 + \alpha^2\beta + \beta^3$

γ) $(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \beta^2 - \alpha^2$

δ) $(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$

(Μονάδες 2)

A3) Να συμπληρώσετε τον πίνακα (αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα αναφοράς) αντιστοιχίζοντας σε κάθε παράσταση της στήλης Α, το ανάπτυγμα της από τη στήλη Β.

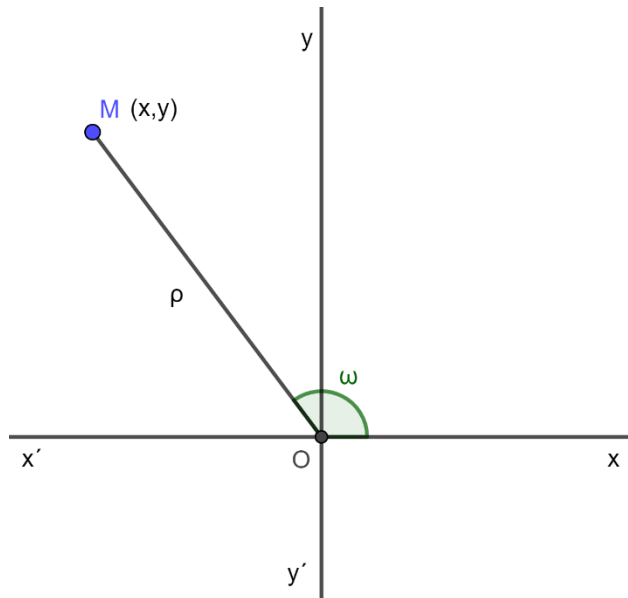
1	2	3	4	5

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1) $(x + 1)^2$	α) $x^3 + 3x^2 + 3x + 1$
2) $(x - 1)^2$	β) $x^2 - 1$
3) $(x + 1)(x - 1)$	γ) $x^2 - 2x + 1$
4) $(x + 1)^3$	δ) $x^3 - 3x^2 + 3x - 1$
5) $(x - 1)^3$	ε) $1 - x^2$
	στ) $x^3 + 3x^2 - 3x + 1$
	ζ) $x^2 + 2x + 1$
	η) $x^2 + 2x - 1$

(Μονάδα 2)

ΘΕΜΑ Β

Στο παρακάτω ορθοκανονικό σύστημα ακόνων είναι σχεδιασμένη μία γωνία $\omega = \widehat{xOM}$. Το σημείο $M(x,y)$ είναι ένα τυχαίο σημείο της τελικής πλευράς της γωνιάς ω και η απόσταση $\rho = OM = \sqrt{x^2 + y^2}$



B1) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά (στην κόλλα αναφοράς)

$$\eta\mu\omega = \frac{\text{.....}}{\text{.....}} = \frac{\text{.....}}{\text{.....}}$$

$$\sigma_{UV\Omega} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

$$\varepsilon\varphi\omega = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots} = \frac{\dots\dots\dots}{\dots\dots\dots}$$

(Μονάδες 3)

B2) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση και να τη γράψετε στην κόλλα αναφοράς.

1. Το $\eta\mu^2\omega + \sigma\upsilon\nu^2\omega$ είναι ίσο με

- а) $\varepsilon\varphi^2\omega$ б) 0 в) 1 г) 2

2. Η εφω είναι ίση με

- $$\alpha) \frac{\sigma_{\text{syn}\omega}}{\eta_{\mu\omega}} \qquad \beta) \eta_{\mu\omega} \cdot \sigma_{\text{syn}\omega} \qquad \gamma) \frac{\eta_{\mu\omega}}{\sigma_{\text{syn}\omega}} \qquad \delta) \eta_{\mu\omega} + \sigma_{\text{syn}\omega}$$

(Μονάδες 2)

B3) Να συμπληρώσετε τον πίνακα (αφού τον μεταφέρετε στην κόλλα αναφοράς) αντιστοιχίζοντας σε κάθε τριγωνομετρικό αριθμό της στήλης Α, τον ίσο του αριθμό από τη στήλη Β.

1	2	3	4

ΣΤΗΛΗ Α	ΣΤΗΛΗ Β
1) $\sin(180^\circ - \omega)$	α) 1
2) $\varepsilon\varphi(180^\circ - \omega)$	β) $\eta\mu\omega$
3) $\eta\mu(180^\circ - \omega)$	γ) 0
4) $\eta\mu 90^\circ$	δ) $-\sin\omega$
	ε) -1
	στ) $-\varepsilon\varphi\omega$

(Μονάδες 2)

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

ΑΣΚΗΣΗ 1

Δίνονται οι παραστάσεις $A = (2x-1)^2 - 3x(x+2) + 20$,

$$B = 3x^2 - 12 \quad \text{και} \quad \Gamma = x^2 - 4x + 4$$

A) Να δείξετε ότι η παράσταση Α μετά από πράξεις παίρνει τη μορφή

$$A = x^2 - 10x + 21$$

(Μονάδες 2)

B) Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις Β και Γ (Μονάδες 2)

Γ) Να λύσετε την εξίσωση $A = 0$ (Μονάδες 1,5)

Δ) Να απλοποιήσετε το κλάσμα $\frac{B}{\Gamma}$ (Μονάδες 1)

ΑΣΚΗΣΗ 2

Αν για την αμβλεία γωνία ω ισχύει $(2\eta\mu\omega - 1)^2 + 4\sin^2\omega = 3$

A) Να βρείτε το $\eta\mu\omega$ (Μονάδες 2)

B) Αν το $\eta\mu\omega = \frac{1}{2}$, να βρείτε: i) το $\sigma\upsilon\nu\omega$ και ii) την $\epsilon\varphi\omega$ (Μονάδες 2)

Γ) Να βρείτε τα $\eta\mu(180^\circ - \omega)$, $\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega)$ και $\epsilon\varphi(180^\circ - \omega)$ (Μονάδες 1,5)

Δ) Να βρείτε την τιμή της παράστασης

$$A = 2\eta\mu(180^\circ - \omega) + \frac{2}{\sqrt{3}}\sigma\upsilon\nu(180^\circ - \omega) - \sqrt{3}\epsilon\varphi(180^\circ - \omega) \text{ (Μονάδες 1)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 3

Στο τρίγωνο ABΓ του διπλανού σχήματος, με $AB < A\Gamma$, η AΔ είναι διχοτόμος της γωνίας A.

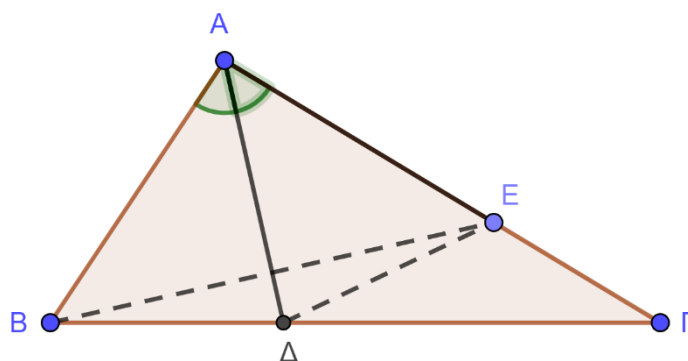
Στην πλευρά AΓ παίρνουμε τμήμα AE τέτοιο ώστε $AE = AB$.

Να αποδείξετε ότι:

A) τα τρίγωνα ABΔ και AΔE είναι ίσα

B) το τρίγωνο BΔE είναι ισοσκελές

Γ) η AΔ είναι κάθετη στην BE (Μονάδες 1,5)



(Μονάδες 3)

(Μονάδες 2)