

ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

1. Τι κάνουμε για την αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος;

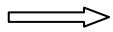
Για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα, επιδιώκουμε να απαλείψουμε από μια εξίσωση τον ένα από τους δύο αγνώστους και να καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν άγνωστο.

2. Με ποιες μεθόδους επιλύουμε αλγεβρικά ένα σύστημα;

- ❖ με τη μέθοδο της αντικατάστασης
- ❖ με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών

3. Πότε συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης;

Συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης όταν υπάρχει **άγνωστος** που σε κάποια από τις δύο εξισώσεις εμφανίζεται με **συντελεστή 1**.



ΠΩΣ ΕΡΓΑΖΟΜΑΣΤΕ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ;

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$

Το y έχει συντελεστή - 1

- Συνήθως λύνουμε ως προς εκείνο τον άγνωστο που σε κάποια από τις δύο εξισώσεις εμφανίζεται με συντελεστή 1.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -y = 5 - 2x \end{cases}$$

- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράσταση του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$
$$\begin{cases} 3x + 2(2x - 5) = 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4x - 10 = 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4x = 4 + 10 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 14 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$
- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος. $(x, y) = (2, -1)$

Πως Εργαζόμαστε Στη Μέθοδο Των Αντιθέτων Συντελεστών;

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' ένα από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (-2) \cdot \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases} \\ (3) \cdot \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases} \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 4y = -8 \\ 6x - 15y = 27 \end{cases}$$

**ΣΥΝΗΘΩΣ
ΑΥΤΗ
ΧΡΗΣΙΜΟΠΟΙΟΥΜΕ**

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, που μαζί με μία από τις αρχικές εξισώσεις σχηματίζουν ισοδύναμο σύστημα.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -19y = 19 \end{cases}$$

- Λύνουμε την εξίσωση με τον έναν άγνωστο και την τιμή που βρίσκουμε αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2 \cdot (-1) = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2 = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 4 + 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

$$(x, y) = (2, -1)$$

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

A) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

- (1) Το σημείο $A(2, 1)$ είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών $2y = x$ και $y = 1$.
- (2) Οι ευθείες $y - 3x = 2$ και $y - x = 0$ τέμνονται στην αρχή των αξόνων.
- (3) Οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - 2y = 3$, $\varepsilon_2 : 6x - 4y = -3$ είναι παράλληλες.
- (4) Οι ευθείες $\varepsilon_1 : 4x - y = 1$, $\varepsilon_2 : x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}$ τέμνονται.
- (5) Η εξίσωση $(3x - 2y + 1)(x - 2y + 5) = 0$ εκφράζει γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
- (6) Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι δυνατόν να έχει ακριβώς δύο λύσεις.
- (7) Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y είναι αόριστο, τότε αυτό αληθεύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- (8) Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y έχει λύσεις τα ζεύγη $(3, 2)$ και $(-1, 2)$ τότε θα έχει λύση και το $(-2, 2)$.
- (9) Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases}$ δεν είναι ποτέ αδύνατο.

B) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

- (1) Για την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι προτιμότερο να λύσουμε:
 - a. Την πρώτη εξίσωση ως προς x ;
 - b. Την πρώτη εξίσωση ως προς y ;
 - c. Τη δεύτερη εξίσωση ως προς x ;
 - d. Τη δεύτερη εξίσωση ως προς y ;
- (2) Οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + 2y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x - 5y = -3$ έχουν κοινό σημείο το:
 - (α) $A(1, 1)$
 - (β) $B(3, -2)$
 - (γ) $\Gamma(-4, -1)$
 - (δ) $\Delta(6, 3)$
- (3) Η παράσταση $(x - 3y + 5)^2 + (2x + y - 4)^2 + 2.013$ γίνεται ελάχιστη όταν:
 - (α) $x = 1$ ή $y = 2$
 - (β) $x = 1$ και $y = 2$
 - (γ) $x = 2$ ή $y = 1$
 - (δ) $x = -1$ ή $y = 2$.
- (4) Το σύστημα $\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ 6x - 12y = 5 \end{cases}$ είναι:

- (α) αδύνατο (β) αόριστο
(γ) έχει δύο λύσεις (δ) έχει μοναδική λύση
- (5) Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ παριστάνει δύο ευθείες:
- (α) που είναι παράλληλες (β) που τέμνονται
(γ) που ταυτίζονται (δ) τίποτα από τα παραπάνω

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να επιλυθούν τα συστήματα: (με αντικατάσταση)

(α)
$$\begin{cases} x = 2y - 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

(β)
$$\begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + y = 11 \end{cases}$$

(γ)
$$\begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

(2) Να επιλυθούν τα συστήματα: (με αντίθετους συντελεστές)

(α)
$$\begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

(β)
$$\begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases}$$

(γ)
$$\begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x - 7y = -1 \end{cases}$$

(3) Να επιλυθεί το σύστημα:
$$\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ 2x + 4y = 40 \end{cases}$$

(4) Το σύστημα
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - 4y = -10 \end{cases}$$

A) έχει μια λύση

B) είναι αδύνατο

Γ) είναι αδύνατο

(5) Το σύστημα
$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 20 \end{cases}$$

A) έχει μια λύση

B) είναι αδύνατο

Γ) είναι αδύνατο

(6) Να επιλυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} x - 3y = 9 \\ -2x + 6y = -18 \end{cases}$$

(7) Να επιλυθεί το σύστημα
$$\begin{cases} 6x - 2y = 11 \\ 9x - 3y = 15 \end{cases}$$

(8) Να επιλυθούν τα συστήματα:

α)
$$\begin{cases} 3 - 2(x - 3y) = y - x \\ x - (2y - 1) = y - 6 \end{cases}$$

β)
$$\begin{cases} x - 2(x - y + 1) = 3y - 1 \\ 11 + 3(x - 1) = x - 2(y - 3) \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} 2x - y(x - 1) = -1 + x(3 - y) \\ xy - x(2x - 1) = 1 - (2x - y)(x + 1) \end{cases}$$

(9) Να επιλυθούν τα συστήματα:

$$\alpha) \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} = \frac{x - 2y}{3} \\ x - \frac{2x - y}{4} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{7x + y}{3} - \frac{y - 1}{2} = x + 3 \\ \frac{x}{2} - \frac{9y - 1}{4} = -x + 1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x + 2}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases}$$

(10) Να αποδείξετε ότι τα συστήματα

$$\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x - 2y = 7 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} -x + 4y = 1 \\ 2x - 3y = 3 \end{cases}$$

έχουν κοινή λύση

(11) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών :

$$(\alpha) \varepsilon_1 : y = 2x - 1 \text{ και } \varepsilon_2 : y = x + 2$$

$$(\beta) \varepsilon_1 : 2x - y = 3 \text{ και } \varepsilon_2 : x + y = 1$$

(12) Αν το σύστημα $\begin{cases} 2ax - \beta y = -1 \\ \beta x - \alpha y = 1 \end{cases}$ έχει λύση την $x = -1$ και $y = 1$, να βρείτε τα α, β .

(13) Αν το σύστημα $\begin{cases} (\alpha - 1)x + \beta y = \alpha + 3 \\ \alpha x + (2\beta - 1)y = 3\beta + 5 \end{cases}$ έχει λύση την $x = 3$ και $y = 2$, να βρείτε τα α, β .

(14) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} (x - 2y)(x + y - 1) = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

(15) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = -5 \end{cases}$

- (16) Να λύσετε το σύστημα
$$\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 0 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$$
- (17) Ο Γιάννης έχει στο αγρόκτημα του κοτόπουλα και κουνέλια. Όταν τον ρώτησε κάποιος πόσα κουνέλια και πόσα κοτόπουλα έχει, ο Γιάννης του απάντησε: Αν μετρήσεις τα κεφάλια τους είναι 35, αν μετρήσεις τα πόδια τους είναι 100 πόσα κουνέλια και πόσα κοτόπουλα έχει ο Γιάννης;
- (18) Σ' ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα. Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες, πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ;
- (19) Ο Γιώργος γράφει ένα διαγώνισμα, το οποίο αποτελείται από 18 θέματα. Για κάθε σωστό θέμα παίρνει 10 βαθμούς ενώ για κάθε λάθος κάνει 5 βαθμούς. Αν η τελική βαθμολογία είναι 135 βαθμοί, να βρείτε το πλήθος των σωστών και λανθασμένων θεμάτων.
- (20) Να επιλύσετε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:
- 1)
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
 - 2)
$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$
 - 3)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$
 - 4)
$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 5y = 4 \end{cases}$$
 - 5)
$$\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ -7x + 3y = -5 \end{cases}$$
 - 6)
$$\begin{cases} 6x + y = 13 \\ x - y = 8 \end{cases}$$
 - 7)
$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$
 - 8)
$$\begin{cases} 5x + 2y = 45 \\ 4x + y = 33 \end{cases}$$
 - 9)
$$\begin{cases} 4x + 6y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$

$$10) \begin{cases} 7x - 4y = 17 \\ 5x + 12y = 1 \end{cases}$$

$$11) \begin{cases} 10x + 9y = \frac{11}{3} \\ -9x + 3y = -7 \end{cases}$$

$$12) \begin{cases} 4x - 16y = -19 \\ 2x + 8y = \frac{21}{2} \end{cases}$$

$$13) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{12} = \frac{54}{12} \end{cases}$$

$$14) \begin{cases} \frac{x}{9} + y = -\frac{23}{54} \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 0 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{5y}{2} = 2 \\ \frac{x - 5y}{2} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x + \frac{1}{7}y = 0 \\ \frac{2x}{5} - \frac{y}{2} = \frac{39}{70} \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} \frac{x-y}{3} + \frac{x-y}{4} = \frac{7}{4} \\ \frac{4x+y}{5} - \frac{2x+y}{2} = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3} \\ \frac{x}{2} = y + 2 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} \frac{x-2}{5} + \frac{y+2}{7} = 2 \\ \frac{3x-1}{4} - \frac{2y-5}{5} = 4 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
20) \quad & \begin{cases} 6 - \frac{y-x}{5} = \frac{x+y}{3} \\ \frac{x}{2} - \frac{x-y}{5} = \frac{7}{2} \end{cases} \\
21) \quad & \begin{cases} x + 3y - \frac{x-1}{2} = 1 \\ x - \frac{x-3+y}{2} = \frac{1}{2}y \end{cases} \\
22) \quad & \begin{cases} \frac{3x+2}{4} + \frac{2y+3}{5} = \frac{11}{10} \\ \frac{3(x+1)+2(y+3)}{2} + \frac{x}{3} + \frac{y-2}{4} = 4 \end{cases} \\
23) \quad & \begin{cases} \frac{4}{15} - \frac{5y-3x}{3} = 2(x-y) \\ 2x+y - \frac{4}{5} = \frac{2x+y}{13} \end{cases} \\
24) \quad & \begin{cases} 2y - \frac{x-5}{3} = \frac{7}{2}(y-1) \\ \frac{y-3}{5} - \frac{2-5x}{2} = 2x \end{cases} \\
25) \quad & \begin{cases} \frac{3x+2y}{2} - \frac{5x-6y}{3} = x+2y \\ \frac{4(x-2y)}{9} + \frac{3y-2x}{6} = 3x-4y \end{cases} \\
26) \quad & \begin{cases} 15 - \frac{4}{5}(x+y) = \frac{2y-x}{2} \\ \frac{x+y}{12} - \frac{y-x}{2} = \frac{7}{4} \end{cases} \\
27) \quad & \begin{cases} \frac{x+y}{11} - \frac{4-x}{8} = \frac{25}{11} - \frac{y-4}{6} \\ \frac{x}{4} - 1 = \frac{y}{10} - \frac{y-x}{6} \end{cases} \\
28) \quad & \begin{cases} 4x-2y-5 - \frac{7x+11}{16} + \frac{15}{4} = \frac{x}{4} \\ 2\left(x + \frac{2+y}{3}\right) = 3y - \frac{y+2x}{5} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
29) \quad & \begin{cases} \frac{3}{4} \left(\frac{2x-2y}{3} - \frac{x-2}{2} \right) = y-x \\ \frac{2}{5} \left(\frac{x+3}{2} - \frac{3x-2y-5}{3} \right) = 4y - \frac{3}{5} \end{cases} \\
30) \quad & \begin{cases} \frac{1}{3} \left(x-2 - \frac{3y}{4} \right) - \frac{2}{3} \left(\frac{y}{2} - \frac{1+x}{4} \right) = -1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{x-1}{2} - \frac{2y-3}{3} \right) = \frac{3}{4} \left(\frac{2x+2}{3} - y \right) \end{cases} \\
31) \quad & \begin{cases} \frac{1}{4} \left[\frac{2(x-y)}{3} - \frac{x-2}{2} \right] = \frac{y-x}{3} \\ \frac{2y}{5} - \frac{5+2y-3x}{9} = \frac{x+3}{3} - 2 \left(3x + \frac{11}{15} \right) \end{cases} \\
32) \quad & \begin{cases} 4x - \frac{11+3x}{16} - 2(y+1) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \\ 2 \left(x + \frac{2+y}{3} \right) = \frac{1}{2} \left[6y - \frac{2(y+2x)}{5} \right] \end{cases} \\
33) \quad & \begin{cases} \frac{4}{5} \left[1 - \frac{3}{4} \left(\frac{2x-1}{3} - \frac{y}{6} \right) \right] = \frac{1}{3} \left[8 - 3 \left(x + \frac{y-2}{2} \right) \right] - \frac{49}{15} \\ \frac{1}{2} \left[\frac{4x-y}{3} - \frac{3}{4} \left(\frac{6-x-2y}{3} \right) \right] = -\frac{1}{8} \end{cases} \\
34) \quad & \begin{cases} x + \frac{(x+y)^2}{3} - \frac{7(x+y)(y-x)}{6} = (1-y)(1+y) + \frac{5x^2 + (2x+y)^2}{6} \\ \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{5} - \frac{y(2-x)}{3} = \frac{x(3x^2+5y)}{15} - \frac{1}{5} \end{cases} \\
35) \quad & \begin{cases} \frac{1}{4} (x-6)^2 + (2-y)^2 - \frac{x^2}{4} = 14 + y^2 \\ 4 \left(2 + \frac{x}{2} \right) - 4 \left(\frac{x}{4} - y \right) = y + 3(x-y) \end{cases} \\
36) \quad & \begin{cases} 4y \left(1 - \frac{x}{4} \right) - \frac{3}{2} (1-2y)x = 9 + 2y(x+2) \\ \left(\frac{x}{2} + 2y \right) \left(\frac{x}{2} - 2y \right) + 4 \left(y + \frac{1}{2} \right) \left(y - \frac{1}{2} \right) + \frac{1}{4} (2-x)(2+x) = 2(1+y) - \frac{x}{2} \end{cases} \\
37) \quad & \begin{cases} \frac{3(x-1)(1+x)-2y}{18} + \frac{2x-(1+y)(1-y)}{3} - \frac{xy}{2} = \frac{(3x-4y)^2 - x^2}{48} - \frac{4}{3} \\ \frac{(x-8)^2}{20} - \frac{9x-y}{45} - \frac{13}{3} = \frac{3x(x-2)-8y}{60} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
38) & \begin{cases} \frac{x^2 - 4}{3} - \frac{x - 2y}{4} = 2 + \frac{(x - 2)^2 - y}{3} \\ \frac{2 - 3x}{4} - \frac{xy + (y - 3)^2}{3} = 2 - \frac{y(x + y)}{3} \end{cases} \\
39) & \begin{cases} 3(1 - 5y) - \frac{8x^2 - 9y^2}{2} = \frac{(3y - 1)^2 + 10x}{2} - (1 + 2x)^2 \\ \frac{8x^2 + 27y^2 - 5}{6} - \frac{9y + (2x - 1)(2x + 1)}{3} = \frac{(3y + 1)(3y - 1) + 4x}{2} \end{cases} \\
40) & \begin{cases} 5y + \frac{56 + 3(3y - 10)^2}{16} = 16 + \frac{(x - 2)^2}{12} + \frac{(2x + 9y)(9y - 2x)}{48} \\ xy + \frac{3y(4 - x)^2}{8} - \frac{x(y - 2)^2}{2} = 4 + \frac{xy(3x - 4y)}{8} \end{cases} \\
41) & \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{xy} \\ \frac{2}{y} + 5 = 3 \end{cases} \\
42) & \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{9}{2xy} \\ x + 2y = 3 \end{cases} \\
43) & \begin{cases} \frac{2(4 + x)}{x + 1} + 1 = \frac{6y - 1}{2y - 3} \\ \frac{x + 2}{1 - x} - \frac{1 + 4y}{2(2 - y)} = 1 \end{cases} \\
44) & \begin{cases} \frac{5}{x - y} - \frac{2}{x - 2} = \frac{3(y + 3)}{(2 - x)(x - y)} \\ \frac{4}{1 - y} + \frac{5}{x + y} - \frac{2(x + 3)}{(1 - y)(x + y)} = 0 \end{cases} \\
45) & \begin{cases} \frac{x}{x + 1} - \frac{5}{(x + 1)(1 - y)} = \frac{y}{y - 1} \\ \frac{3x^2 - 1 + 2y^2}{xy} - \frac{2y - 1}{x} = \frac{1 + 3x}{y} \end{cases} \\
46) & \begin{cases} \frac{x - y + 1}{x^2 + xy + y^2} + \frac{3(1 - xy)}{y^3 - x^3} = \frac{1}{x - y} \\ \frac{x + y}{x} - \frac{2x - 3}{x - y} = \frac{7 + y(5 - 2x)}{x^2 - xy} - \frac{x - y}{x} \end{cases} \\
47) & \begin{cases} \frac{x + 1}{y - 1} - \frac{x - 1}{y + 1} = \frac{x + 2y - 5}{y^2 - 1} \\ \frac{2x - 1}{y + 1} - \frac{2y + 1}{x - 1} = \frac{(x - y)(2x + 2y + 1)}{(x - 1)(y + 1)} \end{cases}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
48) \quad & \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{y-x} = \frac{2x^2+2y^2-x+8y-1}{x^2-y^2} \\ \frac{2x+y}{x+2y} - \frac{x+2y}{x-2y} = \frac{x^2+y^2-7y(x+y)-2(x-2y)-1}{x^2-4y^2} \end{cases} \\
49) \quad & \begin{cases} \frac{x+y+1}{x+y-1} - \frac{x+y-1}{x+y+1} = \frac{5x+7y-6}{(x+y)^2-1} \\ \frac{x+2y}{2x-y} + \frac{2x-y}{x+y} = \frac{5x^2+3y^2-xy-x+2y-3}{(x+y)(2x-y)} \end{cases} \\
50) \quad & \begin{cases} 2 - \frac{1}{x+y} - \frac{x+2y-3}{2(x-y)} = \frac{3x^2-3xy-6y^2+5x-4y-6}{2x^2-2y^2} \\ \frac{x+2y+3}{2x-3y} - \frac{2x+y-1}{3x-2y} + \frac{x^2-8xy+y^2-3x+5y-6}{6x^2-13xy+6y^2} = 0 \end{cases}
\end{aligned}$$