

3.1 Η έννοια της γραμμικής ΕΞΙΣΩΣΗΣ

1. Τι ονομάζουμε γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους;

Γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους ονομάζουμε κάθε εξίσωση της μορφής $ax + by = \gamma$ όπου a, b, γ πραγματικοί αριθμοί.

π.χ. $2x + y = 6$, $\sqrt{2}x - y = 4$, $y = 4$, $2x = 5$

2. Τι ονομάζουμε λύση μιας γραμμικής εξίσωσης με δύο αγνώστους;

Λύση μιας εξίσωσης $ax + by = \gamma$ ονομάζεται κάθε ζεύγος αριθμών (x, y) που την επαληθεύει.

3. Τι παριστάνει γραφικά μια γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους;

Μια γραμμική εξίσωση με δύο αγνώστους $ax + by = \gamma$ αν $a \neq 0$ ή $b \neq 0$ παριστάνει ευθεία γραμμή.

4. Τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$;

Η εξίσωση $y = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$ και τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $(0, k)$. (Είναι συνάρτηση)

5. Τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση $y = 0$;

Η εξίσωση $y = 0$ παριστάνει τον άξονα $x'x$. (Είναι συνάρτηση)

6. Τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$;

Η εξίσωση $x = k$ με $k \neq 0$ παριστάνει μια ευθεία που είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$ και τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $(k, 0)$. (Δεν είναι συνάρτηση)

7. Τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση $x = 0$;

Η εξίσωση $x = 0$ παριστάνει τον άξονα $y'y$. (Δεν είναι συνάρτηση)

8. Ποια η ικανή και αναγκαία συνθήκη για να ανήκει ένα σημείο σε μια ευθεία;

- ✧ Αν ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία, τότε οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της ευθείας.
- ✧ Αν οι συντεταγμένες ενός σημείου επαληθεύουν την εξίσωση μιας ευθείας, τότε το σημείο ανήκει στην ευθεία αυτή.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ - ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

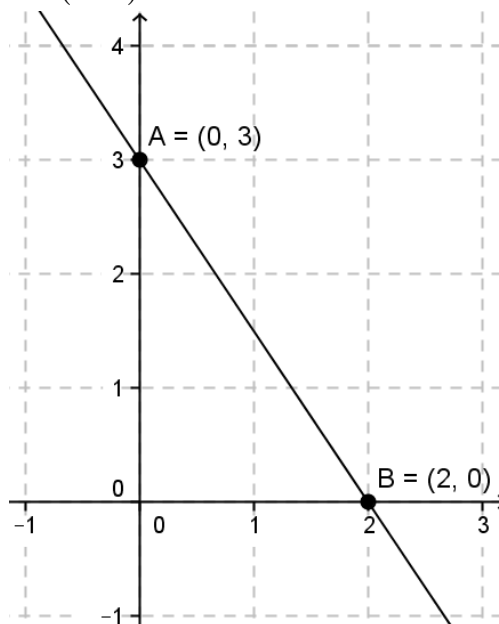
1. Να σχεδιαστεί η ευθεία: $3x - 2y = 6$.

Για να σχεδιάσουμε την ευθεία χρειαζόμαστε δύο σημεία.

Για $x = 0$ έχουμε: $-2y = 6$ δηλαδή $y = -3$

Για $y = 0$ έχουμε: $3x = 6$ δηλαδή $x = 2$

Άρα η εξίσωση $3x - 2y = 6$ παριστάνει ευθεία ε που διέρχεται από τα σημεία $A(0, -3)$ και $B(2, 0)$.



2. Ένα σημείο M της ευθείας $\varepsilon: 3x - 2y = 6$ έχει τεταγμένη 9. Να βρείτε την τετμημένη του.

Το σημείο M ανήκει στην ευθεία ε , αν οι συντεταγμένες του επαληθεύουν την εξίσωση της. Αφού το M έχει τεταγμένη $y = 9$ για την τετμημένη του x πρέπει να ισχύει:

$$3x - 2 \cdot 9 = 6 \leftrightarrow 3x - 18 = 6 \leftrightarrow 3x = 6 + 18 \leftrightarrow 3x = 24 \text{ ΑΡΑ } x = 8$$

Άρα η τετμημένη του M είναι $x = 8$.

3. Αν η ευθεία $\varepsilon: \lambda x - (\lambda - 1)y = 11$ διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$, τότε να προσδιορίσετε τη τιμή του λ και στη συνέχεια να βρεθούν τα κοινά σημεία της ε με τους άξονες.

Η ευθεία $\varepsilon: \lambda x - (\lambda - 1)y = 11$ διέρχεται από το σημείο $A(-1, 3)$, οπότε οι συντεταγμένες του σημείου A επαληθεύουν την εξίσωση

$$\lambda x - (\lambda - 1)y = 11. \text{ Άρα έχουμε:}$$

$$\lambda(-1) - (\lambda - 1) \cdot 3 = 11 \leftrightarrow -\lambda - 3\lambda + 3 = 11 \leftrightarrow -\lambda - 3\lambda = 11 - 3$$

$$-4\lambda = 8 \leftrightarrow \frac{-4\lambda}{-4} = \frac{8}{-4} \leftrightarrow \lambda = -2$$

Συνεπώς η εξίσωση της ευθείας ε παίρνει τη μορφή: $-2x + 3y = 11$

Για $x = 0$ έχουμε $3y = 11$ ή $y = \frac{11}{3}$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $y'y$ στο σημείο $\left(0, \frac{11}{3}\right)$.

Για $y = 0$ έχουμε $-2x = 11$ ή $x = -\frac{11}{2}$, δηλαδή η ευθεία ε τέμνει τον άξονα $x'x$ στο σημείο $\left(-\frac{11}{2}, 0\right)$.

Ερωτήσεις κατανόησης

Α) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

- (1) Η εξίσωση $2x + y^2 = 4$ είναι γραμμική.
- (2) Η εξίσωση $\frac{4}{x} + 3y = 1$ είναι γραμμική.
- (3) Η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda^2 - 4)y = 5$ είναι γραμμική για κάθε τιμή λ .
- (4) Η ευθεία $x = -2$ είναι συνάρτηση.
- (5) Η ευθεία $y = -2$ είναι συνάρτηση.
- (6) Οι ευθείες $x = 3$ και $x = -2$ είναι παράλληλες.
- (7) Οι ευθείες $x = 3$ και $y = -2$ είναι κάθετες.
- (8) Η ευθεία $x = -7$ είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
- (9) Η εξίσωση $(\kappa^2 - 1)x - (\kappa - 1)y = 0$ παριστάνει πάντα ευθεία.
- (10) Κάθε γραμμική εξίσωση έχει άπειρες λύσεις.
- (11) Η εξίσωση $y = -3$ έχει άπειρες λύσεις.
- (12) Η εξίσωση $-4x + 2y = 0$ είναι γραμμική.
- (13) Αν (x_0, y_0) είναι μια λύση της γραμμικής εξίσωσης $ax + by = \gamma$ τότε $ax_0 + by_0 = \gamma$.
- (14) Η εξίσωση $ax + by = \gamma$ γραφικά παριστάνει πάντα ευθεία γραμμή.
- (15) Η εξίσωση $4x + \kappa y = 4$ γραφικά παριστάνει ευθεία για κάθε κ .
- (16) Το σημείο $K(-3, 4)$ ανήκει στην ευθεία $x = 4$.
- (17) Κάθε σημείο της ευθείας $y = x$ ισαπέχει από τους άξονες.
- (18) Το σημείο τομής των ευθειών $2x - y = 5$ και $x - 2y = 3$ είναι το $(0, 0)$.
- (19) Η ευθεία $3x - 2y = 6$ τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $(2, 0)$.
- (20) Οι ευθείες $x = -1$ και $y = 3$ τέμνονται στο σημείο $A(-1, 3)$.
- (21) Η ευθεία $x = 3$ τέμνει τον $y'y$ το $A(0, 3)$.
- (22) Η ευθεία $3x - 2y = 0$, διέρχεται από την αρχή των αξόνων.

Β) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

- (1) Η ευθεία $y = -4$ είναι κάθετη:
(α) στον $x'x$ (β) στον $y'y$ (γ) στην ευθεία $y = -5$ (δ) στην ευθεία $y = 3x$
- (2) Αν η ευθεία $2x - (\kappa + 1)y = 2$ περνάει από το σημείο $A(-1, 1)$ τότε η τιμή του κ είναι:
(α) $\kappa = 1$ (β) $\kappa = 0$ (γ) $\kappa = 0$ ή $\kappa = 1$ (δ) $\kappa = -5$
- (3) Το σημείο τομής των ευθειών $2x - 3y = 1$ και $x - 4y = -5$ είναι:
(α) $(0, 0)$ (β) $(-1, 1)$ (γ) $(1, 1)$ (δ) $(1, -1)$
- (4) Η ευθεία η οποία διέρχεται από το σημείο $A(-2, 3)$ και είναι παράλληλα στον $y'y$ έχει εξίσωση:
(α) $x = -2$ (β) $x = 2$ (γ) $y = 3$ (δ) $y = 2$
- (5) Η ευθεία $3x + 6y - 12 = 0$, τέμνει τον $x'x$ στο σημείο:
(α) $(0, 4)$ (β) $(4, 0)$ (γ) $(0, 3)$ (δ) $(3, 0)$
- (6) Η ευθεία $x = -2$ είναι παράλληλη:
(α) στον $x'x$ (β) στον $y'y$ (γ) στην ευθεία $y = -x$ (δ) στην ευθεία $y = x$
- (7) Από τις παρακάτω εξισώσεις γραμμική είναι:
(α) $3x - xy = 5$ (β) $3x - 5y + 1 = 0$ (γ) $x - 2 + y = 5$ (δ) $x + 2y - 3 = 4$
- (8) Η εξίσωση $(\kappa^2 - \kappa)x + \kappa y = 3$. Παριστάνει ευθεία όταν:
(α) $\kappa = 0$ (β) $\kappa \neq 0$ (γ) $\kappa = 1$ (δ) $\kappa \neq 1$
- (9) Η ευθεία $x - 3y = 6$, σχηματίζει με τους άξονες εμβαδόν:
(α) 8 τ.μ. (β) 4 τ.μ. (γ) 6 τ.μ. (δ) 12 τ.μ.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- (1) Να σχεδιάσετε στο ίδιο σύστημα αξόνων στις ευθείες:
(α) $x - 3y = 4$ (β) $x - y = 0$ (γ) $x = 4$ (δ) $y = -2$
- (2) Δίνεται η ευθεία $2x - y = 8$.
α. Να βρεθεί η τιμή του πραγματικού αριθμού λ ώστε η ευθεία να τέμνει τον $x'x$ στο σημείο $(\lambda^2 - 2, 0)$.
β. Για τη μεγαλύτερη τιμή που βρήκατε από το α) ερώτημα να κάνετε την γραφική παράσταση της ευθείας: $\lambda x + 2y = 3$.
- (3) Δίνεται η ευθεία $x - 3y = 6$.
α. Να βρείτε τα σημεία που η ευθεία τέμνει τους άξονες.
β. Αν A το σημείο τομής με τον άξονα $x'x$, να βρείτε την ευθεία που περνάει από το A και είναι παράλληλη στον άξονα $y'y$.
- (4) Δίνεται η ευθεία $kx + 3y = 6$. Να βρείτε:
α. Τον αριθμό k αν η ευθεία τέμνει τον $x'x$ στο 3.
β. Για την τιμή του k που βρήκατε στο α) ερώτημα να βρείτε το εμβαδόν που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες.
- (5) Να βρείτε την τιμή του λ , ώστε η εξίσωση $(\lambda - 2)x + (\lambda^2 - 4)y = 8$
α. Να παριστάνει ευθεία
β. Να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $y'y$
γ. Να παριστάνει ευθεία παράλληλη στον $x'x$
- (6) Δίνεται η εξίσωση $(\lambda - 3)x + (\lambda^2 - 3\lambda)y = \lambda^2 - 9$.
Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε:
α. Η εξίσωση να παριστάνει ευθεία
β. Η εξίσωση να παριστάνει ευθεία η οποία να περνάει από την αρχή των αξόνων.
- (7) Δίνεται η εξίσωση $6x + (\mu^2 - 5\mu + 4)xy + 3y - 12 = 0$.
Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε η εξίσωση να είναι γραμμική.

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΟΥ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ Η ΓΡΑΦΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΤΟΥ

1. Τι ονομάζουμε γραμμικό σύστημα;

Γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζουμε κάθε ζευγάρι γραμμικών εξισώσεων με δύο αγνώστους.

π.χ.

$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ x + y = 5 \end{cases}$$

2. Τι ονομάζουμε λύση γραμμικού συστήματος δύο αγνώστων;

Λύση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους ονομάζουμε κάθε ζεύγος (x, y) που επαληθεύει τις εξισώσεις του.

3. Τι ονομάζουμε επίλυση συστήματος;

Επίλυση ενός **συστήματος** ονομάζουμε την διαδικασία που ακολουθούμε για να βρούμε την λύση του.

4. Με ποιους τρόπους μπορεί να γίνει επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;

Η επίλυση ενός συστήματος γίνεται με δύο τρόπους:

- ✧ Γραφικά
- ✧ Αλγεβρικά

5. Τι ονομάζουμε γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους;

Γραφική επίλυση γραμμικού συστήματος δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι ο προσδιορισμός του σημείου τομής των δύο ευθειών που παριστάνουν οι δύο εξισώσεις.

6. Ποιο το βασικό μειονέκτημα της γραφικής επίλυσης;

Η γραφική επίλυση έχει ένα σοβαρό μειονέκτημα, τον μη ακριβή προσδιορισμό των λύσεων του συστήματος που οφείλεται σε σχεδιαστικά σφάλματα ή στην αδυναμία να προσδιορίσουμε με ακρίβεια πάνω στους άξονες κλασματικούς ή άρρητους αριθμούς.

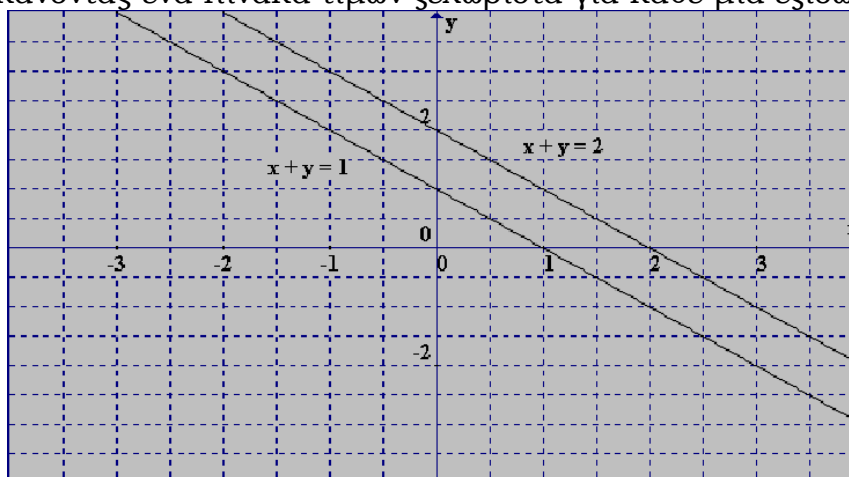
7. Ποια η σχετική θέση δύο ευθειών σε σχέση με τις εξισώσεις τους;

Οι ευθείες τέμνονται σε ένα σημείο.	Το σύστημα έχει μοναδική λύση.
Οι ευθείες είναι παράλληλες.	Το σύστημα είναι αδύνατο.
Οι ευθείες συμπίπτουν	Το σύστημα είναι αόριστο

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ – ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

(1) Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$$

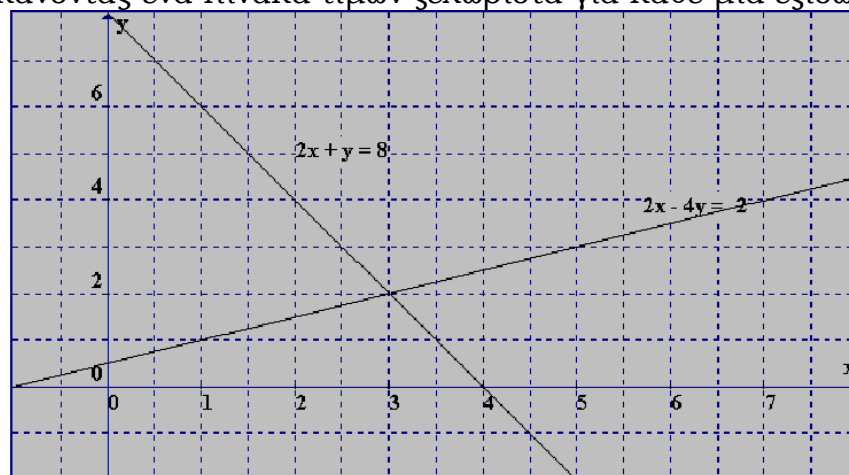
Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων κάνοντας ένα πίνακα τιμών ξεχωριστά για κάθε μια εξίσωση.



Παρατηρούμε από το σχήμα, ότι οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες παράλληλες, δηλαδή δεν έχουν κοινό σημείο. Επομένως το σύστημα είναι αδύνατο.

(2) Να επιλυθεί γραφικά το σύστημα
$$\begin{cases} 2x + y = 8 \\ 2x - 4y = -2 \end{cases}$$

Κάνουμε τις γραφικές παραστάσεις των δύο εξισώσεων στο ίδιο σύστημα αξόνων κάνοντας ένα πίνακα τιμών ξεχωριστά για κάθε μια εξίσωση.



Παρατηρούμε από το σχήμα, ότι οι γραφικές παραστάσεις είναι ευθείες που έχουν ένα κοινό σημείο με συντεταγμένες (3, 2). Επομένως η λύση του συστήματος είναι $(x, y) = (3, 2)$.

Ερωτήσεις κατανόησης

Α) Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις με (Σ), αν είναι σωστές ή με (Λ), αν είναι λανθασμένες.

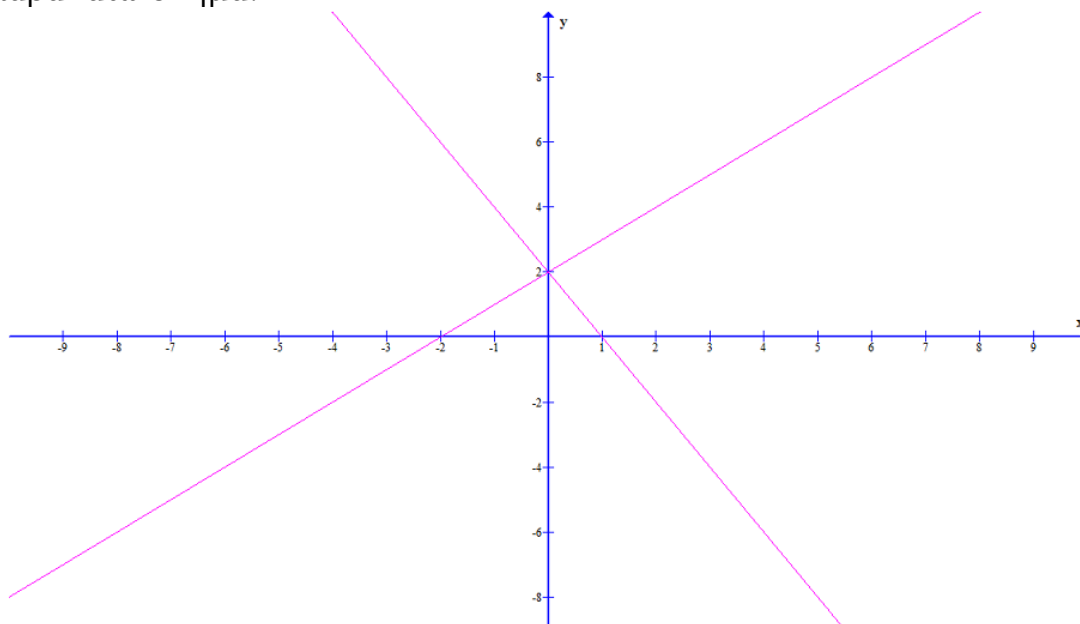
- (1) Ένα σύστημα δύο γραμμικών εξισώσεων είναι αδύνατο. Τότε οι ευθείες που παριστάνουν αυτές οι εξισώσεις είναι παράλληλες στον άξονα $x'x$.
- (2) Αν δύο ευθείες είναι παράλληλες, τότε το σύστημα των εξισώσεων τους είναι αόριστο.
- (3) Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους μπορεί να έχει μόνο δύο πραγματικές λύσεις.
- (4) Το σύστημα των εξισώσεων $\begin{cases} y = 2 \\ y - 4 = 0 \end{cases}$ είναι αδύνατο.
- (5) Το σύστημα των εξισώσεων $\begin{cases} 2x - 4 = 0 \\ y - 3 = 0 \end{cases}$ έχει μοναδική λύση.
- (6) Το σύνολο των εξισώσεων $2x + 3y = 1$, $x - 3y = 4$ αποτελεί ένα γραμμικό σύστημα.
- (7) Το ζεύγος $(-2, 1)$ είναι λύση του συστήματος $\begin{cases} 3x - 2y = -8 \\ 4x + 5y = -3 \end{cases}$
- (8) Το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = 4 \\ x + y = 1 \end{cases}$ είναι αδύνατο.

Β) Να επιλέξετε την σωστή απάντηση:

- (1) Η εξίσωση της ευθείας που διέρχεται από τα σημεία $(-1, -1)$ και $(2, 2)$ είναι:
(α) $y = -x$ (β) $y = 2x + 1$ (γ) $x - y = 0$ (δ) $y = x + 1$
- (2) Η ευθεία $y + 3x = 6$ τέμνει τον άξονα $x'x$ στο:
(α) $A(6, 2)$ (β) $B(-2, -6)$ (γ) $\Gamma(2, 6)$ (δ) $\Delta(2, 0)$
- (3) Οι ευθείες (ε) $3x - 5y = -7$, (ζ) $-2x - 3y = 3$
(α) είναι παράλληλες (β) ταυτίζονται
(γ) τέμνονται σε ένα σημείο (δ) διέρχονται από το $(0, 0)$
- (4) Οι ευθείες: (ε) $3x + y = 0$, (ζ) $x - y = 0$ τέμνονται στο:
(α) $A(0, 0)$ (β) $B(-3, -1)$ (γ) $\Gamma(2, 6)$ (δ) $\Delta(1, 1)$

Ασκήσεις

- (1) Να εξετάσετε τι παριστάνει γραφικά η εξίσωση:
 $3\lambda^2 x + (\lambda^2 + 2)y = \lambda(5 + 3y) + 3\lambda x$ για τις διάφορες τιμές του μ .
- (2) Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα:
$$\begin{cases} x + y = 1 \\ x - 2y = 2 \end{cases}$$
- (3) Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα:
$$\begin{cases} \frac{2}{5}x - \frac{1}{2}y = -\frac{1}{2} \\ y = \frac{4}{5}x + 1 \end{cases}$$
- (4) Να επιλύσετε γραφικά το σύστημα:
$$\begin{cases} 2x - 5y + 3 = 0 \\ y = \frac{4}{5}x - 1 \end{cases}$$
- (5) Να βρείτε το σύστημα που παριστάνεται γραφικά από το παρακάτω σχήμα:



§ 3.3 ΑΛΓΕΒΡΙΚΗ ΕΠΙΛΥΣΗ ΓΡΑΜΜΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ

1. Τι κάνουμε για την αλγεβρική επίλυση γραμμικού συστήματος;

Για να επιλύσουμε αλγεβρικά ένα σύστημα, επιδιώκουμε να απαλείψουμε από μια εξίσωση τον ένα από τους δύο αγνώστους και να καταλήξουμε σε εξίσωση με έναν άγνωστο.

2. Με ποιες μεθόδους επιλύουμε αλγεβρικά ένα σύστημα;

- ☼ με τη μέθοδο της αντικατάστασης
- ☼ με τη μέθοδο των αντιθέτων συντελεστών

3. Πότε συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης;

Συνήθως χρησιμοποιούμε τη μέθοδο της αντικατάστασης όταν υπάρχει άγνωστος που σε κάποια από τις δύο εξισώσεις εμφανίζεται με συντελεστή 1.

ΠΩΣ ΕΡΓΑΖΟΜΑΣΤΕ ΣΤΗ ΜΕΘΟΔΟ ΤΗΣ ΑΝΤΙΚΑΤΑΣΤΑΣΗΣ;

- Λύνουμε μία από τις εξισώσεις του συστήματος ως προς έναν άγνωστο.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - y = 5 \end{cases}$$
- Συνήθως λύνουμε ως προς εκείνο τον άγνωστο που σε κάποια από τις δύο εξισώσεις εμφανίζεται με συντελεστή 1.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -y = 5 - 2x \end{cases}$$
- Αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση του συστήματος τον άγνωστο αυτόν με την ίση παράσταση του, οπότε προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, την οποία και λύνουμε.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2(2x - 5) = 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4x - 10 = 4 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 4x = 4 + 10 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 7x = 14 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$
- Την τιμή του αγνώστου που βρήκαμε την αντικαθιστούμε στην προηγούμενη εξίσωση,

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2x - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \cdot 2 - 5 \end{cases}$$

οπότε βρίσκουμε και τον άλλο
άγνωστο.

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = 4 - 5 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του
συστήματος. $(x, y) = (2, -1)$

Πως Εργαζόμαστε Στη Μέθοδο Των Αντιθέτων Συντελεστών;

- Πολλαπλασιάζουμε τα μέλη κάθε εξίσωσης με κατάλληλο αριθμό, ώστε να εμφανιστούν αντίθετοι συντελεστές σ' ένα από τους δύο αγνώστους προκειμένου να τον απαλείψουμε

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} (-2) \cdot \\ (3) \cdot \end{matrix} \begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ 2x - 5y = 9 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x - 4y = -8 \\ 6x - 15y = 27 \end{cases}$$

- Προσθέτουμε κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και προκύπτει εξίσωση με έναν άγνωστο, που μαζί με μία από τις αρχικές εξισώσεις σχηματίζουν ισοδύναμο σύστημα.

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ -19y = 19 \end{cases}$$

- Λύνουμε την εξίσωση με τον έναν άγνωστο και την τιμή που βρίσκουμε αντικαθιστούμε στην άλλη εξίσωση, οπότε βρίσκουμε και τον άλλο άγνωστο

$$\begin{cases} 3x + 2y = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x + 2 \cdot (-1) = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x - 2 = 4 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 4 + 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3x = 6 \\ y = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2 \\ y = -1 \end{cases}$$

- Προσδιορίζουμε τη λύση του συστήματος.

$$(x, y) = (2, -1)$$

Ερωτήσεις κατανόησης

A) Να χαρακτηρίσετε τις επόμενες προτάσεις με σωστό (Σ) ή λάθος (Λ)

- (1) Το σημείο $A(2, 1)$ είναι λύση του συστήματος των εξισώσεων των ευθειών $2y = x$ και $y = 1$.
- (2) Οι ευθείες $y - 3x = 2$ κ $y - x = 0$ τέμνονται στην αρχή των αξόνων.
- (3) Οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x - 2y = 3$, $\varepsilon_2 : 6x - 4y = -3$ είναι παράλληλες.
- (4) Οι ευθείες $\varepsilon_1 : 4x - y = 1$, $\varepsilon_2 : x - \frac{1}{4}y = \frac{1}{4}$ τέμνονται.
- (5) Η εξίσωση $(3x - 2y + 1)(x - 2y + 5) = 0$ εκφράζει γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους.
- (6) Ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους είναι δυνατόν να έχει ακριβώς δύο λύσεις.
- (7) Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y είναι αόριστο, τότε αυτό αληθεύει για κάθε $x, y \in \mathbb{R}$.
- (8) Αν ένα γραμμικό σύστημα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους x, y έχει λύσεις τα ζεύγη $(3, 2)$ και $(-1, 2)$ τότε θα έχει λύση και το $(-2, 2)$.
- (9) Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 0 \\ 4x + 7y = 0 \end{cases}$ δεν είναι ποτέ αδύνατο.

B) Να επιλέξετε τη σωστή απάντηση

- (1) Για την επίλυση του συστήματος $\begin{cases} 3x + 2y = 5 \\ 2x + y = 7 \end{cases}$ με τη μέθοδο της αντικατάστασης είναι προτιμότερο να λύσουμε:
 - a. Την πρώτη εξίσωση ως προς x ;
 - b. Την πρώτη εξίσωση ως προς y ;
 - c. Τη δεύτερη εξίσωση ως προς x ;
 - d. Τη δεύτερη εξίσωση ως προς y ;
- (2) Οι ευθείες $\varepsilon_1 : 3x + 2y = 5$ και $\varepsilon_2 : 2x - 5y = -3$ έχουν κοινό σημείο το:

(α) $A(1, 1)$	(β) $B(3, -2)$
(γ) $\Gamma(-4, -1)$	(δ) $\Delta(6, 3)$
- (3) Η παράσταση $(x - 3y + 5)^2 + (2x + y - 4)^2 + 2.013$ γίνεται ελάχιστη όταν:

(α) $x = 1$ ή $y = 2$	(β) $x = 1$ και $y = 2$
(γ) $x = 2$ ή $y = 1$	(δ) $x = -1$ ή $y = 2$.
- (4) Το σύστημα $\begin{cases} 2x - 4y = 1 \\ 6x - 12y = 5 \end{cases}$ είναι:

(α) αδύνατο	(β) αόριστο
(γ) έχει δύο λύσεις	(δ) έχει μοναδική λύση

(5) Το σύστημα $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ x + y = 2 \end{cases}$ παριστάνει δύο ευθείες:

(α) που είναι παράλληλες (β) που τέμνονται

(γ) που ταυτίζονται

(δ) τίποτα από τα παραπάνω

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

(1) Να επιλυθούν τα συστήματα: (με αντικατάσταση)

$$(α) \begin{cases} x = 2y - 1 \\ x - 3y = 5 \end{cases}$$

$$(β) \begin{cases} 2x - 3y = 1 \\ 5x + y = 11 \end{cases}$$

$$(γ) \begin{cases} 3x - 5y = -4 \\ 3x - y = 4 \end{cases}$$

(2) Να επιλυθούν τα συστήματα: (με αντίθετους συντελεστές)

$$(α) \begin{cases} 5x - 3y = 3 \\ 2x + y = 10 \end{cases}$$

$$(β) \begin{cases} 2x - 5y = 2 \\ 4x + 3y = 4 \end{cases}$$

$$(γ) \begin{cases} 2x - 5y = -1 \\ 3x - 7y = -1 \end{cases}$$

(3) Να επιλυθεί το σύστημα: $\begin{cases} 3x + 2y = 36 \\ 2x + 4y = 40 \end{cases}$

(4) Το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ -2x - 4y = -10 \end{cases}$

A) έχει μια λύση

B) είναι αδύνατο

Γ) είναι αδύνατο

(5) Το σύστημα $\begin{cases} x + 2y = 5 \\ 3x + 6y = 20 \end{cases}$

A) έχει μια λύση

B) είναι αδύνατο

Γ) είναι αδύνατο

(6) Να επιλυθεί το σύστημα $\begin{cases} x - 3y = 9 \\ -2x + 6y = -18 \end{cases}$

(7) Να επιλυθεί το σύστημα $\begin{cases} 6x - 2y = 11 \\ 9x - 3y = 15 \end{cases}$

(8) Να επιλυθούν τα συστήματα:

$$α) \begin{cases} 3 - 2(x - 3y) = y - x \\ x - (2y - 1) = y - 6 \end{cases}$$

$$β) \begin{cases} x - 2(x - y + 1) = 3y - 1 \\ 11 + 3(x - 1) = x - 2(y - 3) \end{cases}$$

$$γ) \begin{cases} 2x - y(x - 1) = -1 + x(3 - y) \\ xy - x(2x - 1) = 1 - (2x - y)(x + 1) \end{cases}$$

(9) Να επιλυθούν τα συστήματα:

$$α) \begin{cases} 1 - \frac{x}{2} = \frac{x - 2y}{3} \\ x - \frac{2x - y}{4} = \frac{y}{2} \end{cases}$$

$$\beta) \begin{cases} \frac{7x+y}{3} - \frac{y-1}{2} = x+3 \\ \frac{x}{2} - \frac{9y-1}{4} = -x+1 \end{cases}$$

$$\gamma) \begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x+2}{3} - \frac{y}{6} = 1 \end{cases}$$

- (10) Να αποδείξετε ότι τα συστήματα

$$\begin{cases} x+2y=5 \\ 3x-2y=7 \end{cases} \text{ και } \begin{cases} -x+4y=1 \\ 2x-3y=3 \end{cases}$$

έχουν κοινή λύση

- (11) Να βρείτε το σημείο τομής των ευθειών :

(α) $\varepsilon_1 : y = 2x - 1$ και $\varepsilon_2 : y = x + 2$

(β) $\varepsilon_1 : 2x - y = 3$ και $\varepsilon_2 : x + y = 1$

- (12) Αν το σύστημα $\begin{cases} 2ax - \beta y = -1 \\ \beta x - \alpha y = 1 \end{cases}$ έχει λύση την $x = -1$ και $y = 1$, να βρείτε τα α, β .

- (13) Αν το σύστημα $\begin{cases} (\alpha - 1)x + \beta y = \alpha + 3 \\ \alpha x + (2\beta - 1)y = 3\beta + 5 \end{cases}$ έχει λύση την $x = 3$ και $y = 2$, να βρείτε τα α, β .

- (14) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} (x-2y)(x+y-1) = 0 \\ x - y = 2 \end{cases}$

- (15) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{2}{y} = 3 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = -5 \end{cases}$

- (16) Να λύσετε το σύστημα $\begin{cases} \frac{1}{x} - \frac{3}{y} = 0 \\ x - 2y = -5 \end{cases}$

- (17) Ο Γιάννης έχει στο αγρόκτημα του κοτόπουλα και κουνέλια. Όταν τον ρώτησε κάποιος πόσα κουνέλια και πόσα κοτόπουλα έχει, ο Γιάννης του απάντησε: Αν μετρήσεις τα κεφάλια τους είναι 35, αν μετρήσεις τα πόδια τους είναι 100 πόσα κουνέλια και πόσα κοτόπουλα έχει ο Γιάννης;

- (18) Σ' ένα γκαράζ υπάρχουν συνολικά 50 οχήματα, αυτοκίνητα και ποδήλατα. Αν όλα τα οχήματα έχουν 164 ρόδες, πόσα αυτοκίνητα και πόσα ποδήλατα υπάρχουν στο γκαράζ;

- (19) Ο Γιώργος γράφει ένα διαγώνισμα, το οποίο αποτελείται από 18 θέματα. Για κάθε σωστό θέμα παίρνει 10 βαθμούς ενώ για κάθε λάθος χάνει 5 βαθμούς. Αν η τελική βαθμολογία είναι 135 βαθμοί, να βρείτε το πλήθος των σωστών και λανθασμένων θεμάτων.
- (20) Να επιλύσετε τα παρακάτω γραμμικά συστήματα δύο εξισώσεων με δύο αγνώστους:
- 1)
$$\begin{cases} x + y = 4 \\ x - y = 2 \end{cases}$$
 - 2)
$$\begin{cases} x + 2y = 7 \\ 3x + y = 6 \end{cases}$$
 - 3)
$$\begin{cases} 2x - y = 1 \\ 3x - 2y = 1 \end{cases}$$
 - 4)
$$\begin{cases} -x + y = 0 \\ x - 5y = 4 \end{cases}$$
 - 5)
$$\begin{cases} 4x - 3y = -1 \\ -7x + 3y = -5 \end{cases}$$
 - 6)
$$\begin{cases} 6x + y = 13 \\ x - y = 8 \end{cases}$$
 - 7)
$$\begin{cases} 3x - 5y = 1 \\ 3x - y = 3 \end{cases}$$
 - 8)
$$\begin{cases} 5x + 2y = 45 \\ 4x + y = 33 \end{cases}$$
 - 9)
$$\begin{cases} 4x + 6y = -1 \\ x + 2y = 0 \end{cases}$$
 - 10)
$$\begin{cases} 7x - 4y = 17 \\ 5x + 12y = 1 \end{cases}$$
 - 11)
$$\begin{cases} 10x + 9y = \frac{11}{3} \\ -9x + 3y = -7 \end{cases}$$
 - 12)
$$\begin{cases} 4x - 16y = -19 \\ 2x + 8y = \frac{21}{2} \end{cases}$$
 - 13)
$$\begin{cases} \frac{x}{2} - \frac{y}{3} = 0 \\ \frac{x}{2} + \frac{y}{12} = \frac{54}{54} \end{cases}$$
 - 14)
$$\begin{cases} \frac{x}{9} + y = -\frac{23}{54} \\ \frac{x}{4} + \frac{y}{3} = 0 \end{cases}$$

$$15) \begin{cases} \frac{3x}{4} + \frac{5y}{2} = 2 \\ \frac{x-5y}{2} = -\frac{1}{3} \end{cases}$$

$$16) \begin{cases} x + \frac{1}{7}y = 0 \\ \frac{2x}{5} - \frac{y}{2} = \frac{39}{70} \end{cases}$$

$$17) \begin{cases} \frac{x-y}{3} + \frac{x-y}{4} = \frac{7}{4} \\ \frac{4x+y}{5} - \frac{2x+y}{2} = -\frac{8}{5} \end{cases}$$

$$18) \begin{cases} \frac{x+y}{5} = \frac{x-y}{3} \\ \frac{x}{2} = y+2 \end{cases}$$

$$19) \begin{cases} \frac{x-2}{5} + \frac{y+2}{7} = 2 \\ \frac{3x-1}{4} - \frac{2y-5}{5} = 4 \end{cases}$$

$$20) \begin{cases} 6 - \frac{y-x}{5} = \frac{x+y}{3} \\ \frac{x}{2} - \frac{x-y}{5} = \frac{7}{2} \end{cases}$$

$$21) \begin{cases} x + 3y - \frac{x-1}{2} = 1 \\ x - \frac{x-3+y}{2} = \frac{1}{2}y \end{cases}$$

$$22) \begin{cases} \frac{3x+2}{4} + \frac{2y+3}{5} = \frac{11}{10} \\ \frac{3(x+1)+2(y+3)}{2} + \frac{x}{3} + \frac{y-2}{4} = 4 \end{cases}$$

$$23) \begin{cases} \frac{4}{15} - \frac{5y-3x}{3} = 2(x-y) \\ 2x+y - \frac{4}{5} = \frac{2x+y}{13} \end{cases}$$

$$24) \begin{cases} 2y - \frac{x-5}{3} = \frac{7}{2}(y-1) \\ \frac{y-3}{5} - \frac{2-5x}{2} = 2x \end{cases}$$

$$25) \begin{cases} \frac{3x+2y}{2} - \frac{5x-6y}{3} = x+2y \\ \frac{4(x-2y)}{9} + \frac{3y-2x}{6} = 3x-4y \end{cases}$$

$$26) \begin{cases} 15 - \frac{4}{5}(x+y) = \frac{2y-x}{2} \\ \frac{x+y}{12} - \frac{y-x}{2} = \frac{7}{4} \end{cases}$$

$$27) \begin{cases} \frac{x+y}{11} - \frac{4-x}{8} = \frac{25}{11} - \frac{y-4}{6} \\ \frac{x}{4} - 1 = \frac{y}{10} - \frac{y-x}{6} \end{cases}$$

$$28) \begin{cases} 4x-2y-5 - \frac{7x+11}{16} + \frac{15}{4} = \frac{x}{4} \\ 2\left(x + \frac{2+y}{3}\right) = 3y - \frac{y+2x}{5} \end{cases}$$

$$29) \begin{cases} \frac{3}{4}\left(\frac{2x-2y}{3} - \frac{x-2}{2}\right) = y-x \\ \frac{2}{5}\left(\frac{x+3}{2} - \frac{3x-2y-5}{3}\right) = 4y - \frac{3}{5} \end{cases}$$

$$30) \begin{cases} \frac{1}{3}\left(x-2 - \frac{3y}{4}\right) - \frac{2}{3}\left(\frac{y}{2} - \frac{1+x}{4}\right) = -1 \\ \frac{1}{2}\left(\frac{x-1}{2} - \frac{2y-3}{3}\right) = \frac{3}{4}\left(\frac{2x+2}{3} - y\right) \end{cases}$$

$$31) \begin{cases} \frac{1}{4}\left[\frac{2(x-y)}{3} - \frac{x-2}{2}\right] = \frac{y-x}{3} \\ \frac{2y}{5} - \frac{5+2y-3x}{9} = \frac{x+3}{3} - 2\left(3x + \frac{11}{15}\right) \end{cases}$$

$$32) \begin{cases} 4x - \frac{11+3x}{16} - 2(y+1) = \frac{x}{2} - \frac{3}{4} \\ 2\left(x + \frac{2+y}{3}\right) = \frac{1}{2}\left[6y - \frac{2(y+2x)}{5}\right] \end{cases}$$

$$33) \begin{cases} \frac{4}{5}\left[1 - \frac{3}{4}\left(\frac{2x-1}{3} - \frac{y}{6}\right)\right] = \frac{1}{3}\left[8 - 3\left(x + \frac{y-2}{2}\right)\right] - \frac{49}{15} \\ \frac{1}{2}\left[\frac{4x-y}{3} - \frac{3}{4}\left(\frac{6-x-2y}{3}\right)\right] = -\frac{1}{8} \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 34) \quad & \begin{cases} x + \frac{(x+y)^2}{3} - \frac{7(x+y)(y-x)}{6} = (1-y)(1+y) + \frac{5x^2 + (2x+y)^2}{6} \\ \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{5} - \frac{y(2-x)}{3} = \frac{x(3x^2+5y)}{15} - \frac{1}{5} \end{cases} \\
 35) \quad & \begin{cases} \frac{1}{4}(x-6)^2 + (2-y)^2 - \frac{x^2}{4} = 14 + y^2 \\ 4\left(2 + \frac{x}{2}\right) - 4\left(\frac{x}{4} - y\right) = y + 3(x-y) \end{cases} \\
 36) \quad & \begin{cases} 4y\left(1 - \frac{x}{4}\right) - \frac{3}{2}(1-2y)x = 9 + 2y(x+2) \\ \left(\frac{x}{2} + 2y\right)\left(\frac{x}{2} - 2y\right) + 4\left(y + \frac{1}{2}\right)\left(y - \frac{1}{2}\right) + \frac{1}{4}(2-x)(2+x) = 2(1+y) - \frac{x}{2} \end{cases} \\
 37) \quad & \begin{cases} \frac{3(x-1)(1+x) - 2y}{18} + \frac{2x - (1+y)(1-y)}{3} - \frac{xy}{2} = \frac{(3x-4y)^2 - x^2}{48} - \frac{4}{3} \\ \frac{(x-8)^2}{20} - \frac{9x-y}{45} - \frac{13}{3} = \frac{3x(x-2) - 8y}{60} \end{cases} \\
 38) \quad & \begin{cases} \frac{x^2-4}{3} - \frac{x-2y}{4} = 2 + \frac{(x-2)^2 - y}{3} \\ \frac{2-3x}{4} - \frac{xy + (y-3)^2}{3} = 2 - \frac{y(x+y)}{3} \end{cases} \\
 39) \quad & \begin{cases} 3(1-5y) - \frac{8x^2-9y^2}{2} = \frac{(3y-1)^2 + 10x}{2} - (1+2x)^2 \\ \frac{8x^2+27y^2-5}{6} - \frac{9y+(2x-1)(2x+1)}{3} = \frac{(3y+1)(3y-1)+4x}{2} \end{cases} \\
 40) \quad & \begin{cases} 5y + \frac{56+3(3y-10)^2}{16} = 16 + \frac{(x-2)^2}{12} + \frac{(2x+9y)(9y-2x)}{48} \\ xy + \frac{3y(4-x)^2}{8} - \frac{x(y-2)^2}{2} = 4 + \frac{xy(3x-4y)}{8} \end{cases} \\
 41) \quad & \begin{cases} \frac{3}{x} + \frac{4}{y} = \frac{1}{xy} \\ \frac{2}{y} + 5 = 3 \end{cases} \\
 42) \quad & \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = \frac{9}{2xy} \\ x + 2y = 3 \end{cases} \\
 43) \quad & \begin{cases} \frac{2(4+x)}{x+1} + 1 = \frac{6y-1}{2y-3} \\ \frac{x+2}{1-x} - \frac{1+4y}{2(2-y)} = 1 \end{cases} \\
 44) \quad & \begin{cases} \frac{5}{x-y} - \frac{2}{x-2} = \frac{3(y+3)}{(2-x)(x-y)} \\ \frac{4}{1-y} + \frac{5}{x+y} - \frac{2(x+3)}{(1-y)(x+y)} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 45) \quad & \begin{cases} \frac{x}{x+1} - \frac{5}{(x+1)(1-y)} = \frac{y}{y-1} \\ \frac{3x^2-1+2y^2}{xy} - \frac{2y-1}{x} = \frac{1+3x}{y} \end{cases} \\
 46) \quad & \begin{cases} \frac{x-y+1}{x^2+xy+y^2} + \frac{3(1-xy)}{y^3-x^3} = \frac{1}{x-y} \\ \frac{x+y}{x} - \frac{2x-3}{x-y} = \frac{7+y(5-2x)}{x^2-xy} - \frac{x-y}{x} \end{cases} \\
 47) \quad & \begin{cases} \frac{x+1}{y-1} - \frac{x-1}{y+1} = \frac{x+2y-5}{y^2-1} \\ \frac{2x-1}{y+1} - \frac{2y+1}{x-1} = \frac{(x-y)(2x+2y+1)}{(x-1)(y+1)} \end{cases} \\
 48) \quad & \begin{cases} \frac{x-y}{x+y} - \frac{x+y}{y-x} = \frac{2x^2+2y^2-x+8y-1}{x^2-y^2} \\ \frac{2x+y}{x+2y} - \frac{x+2y}{x-2y} = \frac{x^2+y^2-7y(x+y)-2(x-2y)-1}{x^2-4y^2} \end{cases} \\
 49) \quad & \begin{cases} \frac{x+y+1}{x+y-1} - \frac{x+y-1}{x+y+1} = \frac{5x+7y-6}{(x+y)^2-1} \\ \frac{x+2y}{2x-y} + \frac{2x-y}{x+y} = \frac{5x^2+3y^2-xy-x+2y-3}{(x+y)(2x-y)} \end{cases} \\
 50) \quad & \begin{cases} 2 - \frac{1}{x+y} - \frac{x+2y-3}{2(x-y)} = \frac{3x^2-3xy-6y^2+5x-4y-6}{2x^2-2y^2} \\ \frac{x+2y+3}{2x-3y} - \frac{2x+y-1}{3x-2y} + \frac{x^2-8xy+y^2-3x+5y-6}{6x^2-13xy+6y^2} = 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$