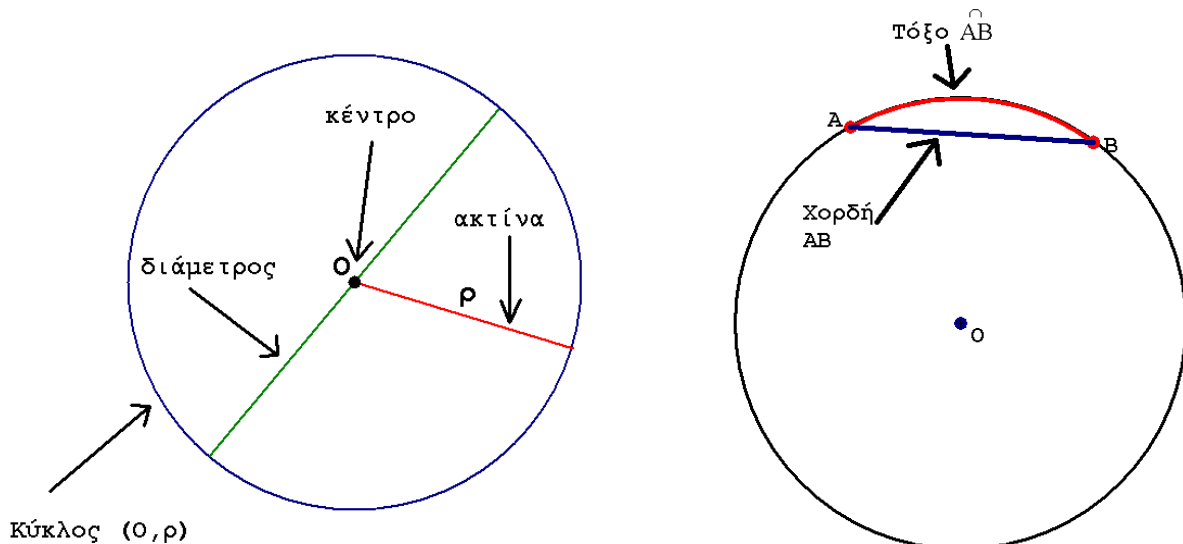
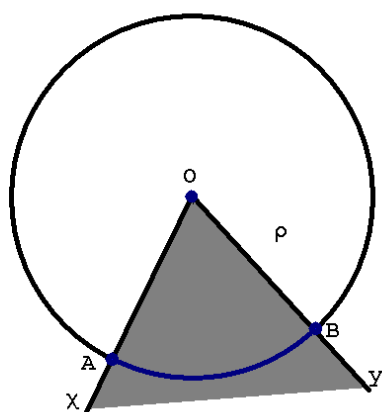
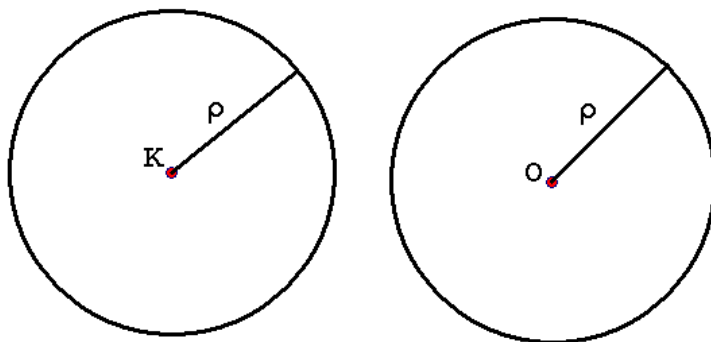


8.1 Επίκεντρες γωνίες.

Παρακάτω υπενθυμίζουμε κάποια στοιχεία ενός κύκλου.



Δύο κύκλοι που η ακτίνα του ενός είναι ίση με την ακτίνα του άλλου είναι ίσοι.



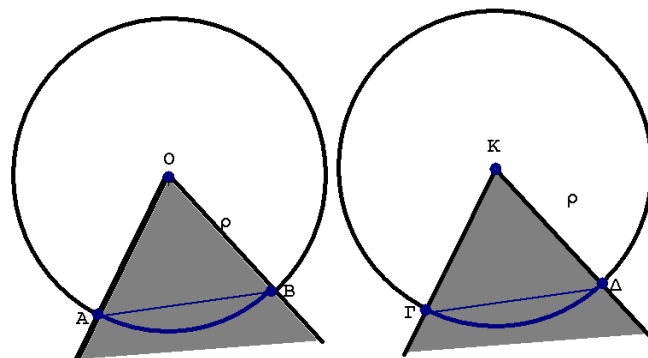
Μία γωνία που έχει την κορυφή της στο κέντρο ενός κύκλου (O, ρ) λέγεται **επίκεντρη γωνία** του κύκλου (O, ρ) .

Αν οι πλευρές της επίκεντρης γωνίας τέμνουν τον κύκλο (O, ρ) στα σημεία A και B λέμε ότι το τόξο $\widehat{AB}$ είναι αντίστοιχο τόξο της επίκεντρης γωνίας. Λέμε ακόμη

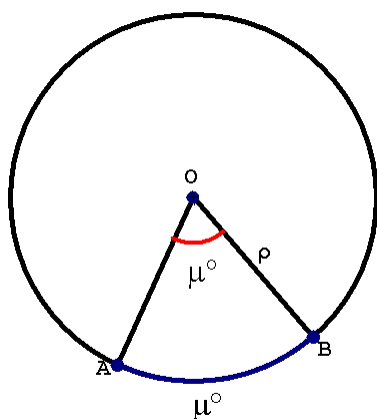
ότι η επίκεντρη γωνία βαίνει στο τόξο $\widehat{AB}$

Σε ίσους κύκλους ή στον ίδιο κύκλο

- Ίσες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα και τα αντίστοιχα τόξα τους.
- Ίσα τόξα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες χορδές τους.



Μονάδα μέτρησης τόξου.



Ως μονάδα μέτρησης των τόξων ενός κύκλου παίρνουμε το τόξο που αντιστοιχεί σε επίκεντρη γωνία 1° .

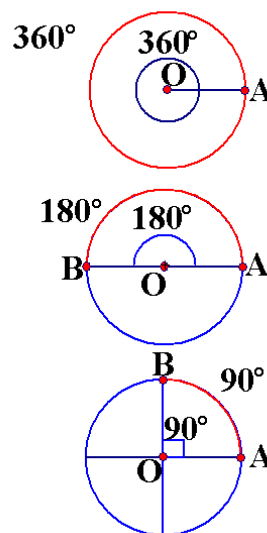
Το τόξο αυτό θα λέμε ότι είναι επίσης 1° .

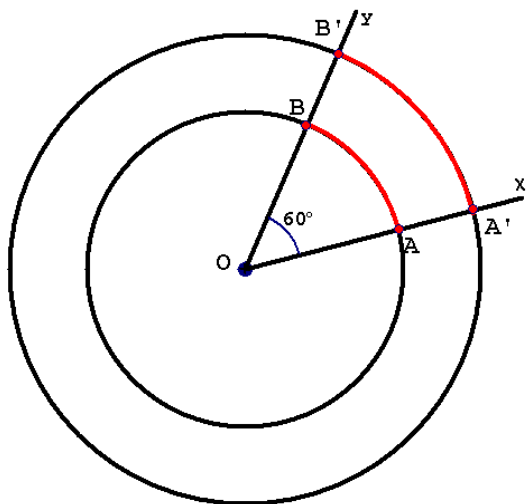
Άρα ένα τόξο θα είναι μ° , όταν η αντίστοιχη επίκεντρη γωνία του είναι μ° .

Άρα κάθε κύκλος είναι τόξο 360° , αφού αντιστοιχεί σε πλήρη επίκεντρη γωνία.

Επίσης κάθε ημικύκλιο είναι τόξο 180° γιατί αντιστοιχεί στην ευθεία επίκεντρη γωνία.

Τέλος δύο κάθετοι διάμετροι χωρίζουν τον κύκλο σε τέσσερα ίσα τόξα που τα λέμε τεταρτοκύκλια και είναι 90° το καθένα.

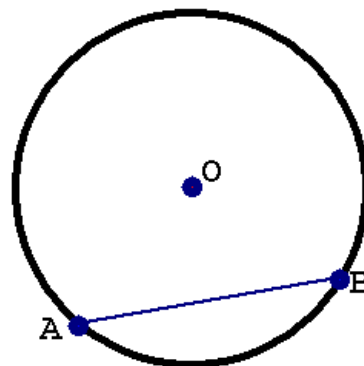




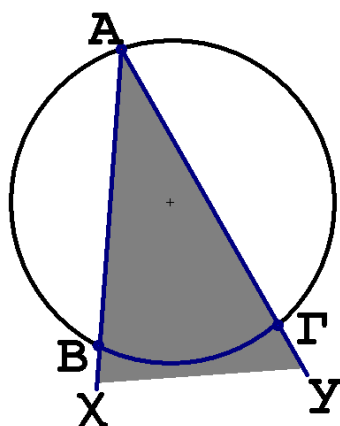
Στο διπλανό σχήμα η επίκεντρη γωνία $\hat{xOy}$ είναι 60° . Άρα θα είναι $\hat{AB} = 60^\circ$ και $\hat{A'B'} = 60^\circ$. Δηλαδή τα τόξα $\hat{AB}$, $\hat{A'B'}$ έχουν το ίδιο μέτρο σε μοίρες, όμως δεν είναι ίσα, διότι είναι τόξα άνισων κύκλων.

Άρα για να συγκρίνουμε δύο τόξα πρέπει να είναι στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους.

Προσοχή: Σε κάθε χορδή ενός κύκλου αντιστοιχούν δύο τόξα «ένα μικρό» και «ένα μεγάλο». Επομένως δεν μπορούμε να λέμε ότι σε ίσες χορδές αντιστοιχούν ίσα τόξα. Ισχύει όμως : Στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους ίσες χορδές έχουν και τα αντίστοιχα «μικρά» ή «μεγάλα» τόξα τους ίσα.



8.2 Εγγεγραμμένες γωνίες.



Μια γωνία λέγεται **εγγεγραμμένη σ' έναν κύκλο**, όταν η κορυφή της είναι σημείο του κύκλου και καθεμία από τις πλευρές της έχει με τον κύκλο ένα ακόμα κοινό σημείο.

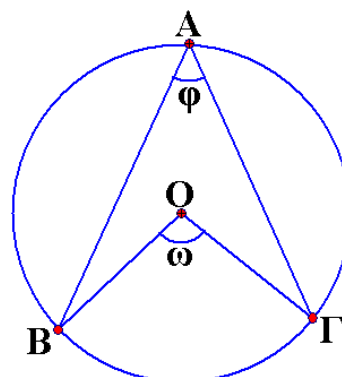
Αν οι πλευρές της εγγεγραμμένης γωνίας τέμνουν τον κύκλο (O, ρ) στα σημεία B και Γ, τότε το τόξο $\widehat{B\Gamma}$ του κύκλου (O, ρ) που

βρίσκεται μεταξύ των πλευρών της εγγεγραμμένης γωνίας $\widehat{B\Gamma}$ λέγεται αντίστοιχο τόξο αυτής και λέμε ότι η εγγεγραμμένη γωνία $\widehat{B\Gamma}$ **βαίνει** στο τόξο $\widehat{B\Gamma}$.

Κάθε εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που βαίνει στο ίδιο τόξο.

Άρα κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε τόξο μ° , είναι $\frac{1}{2}\mu^\circ$.

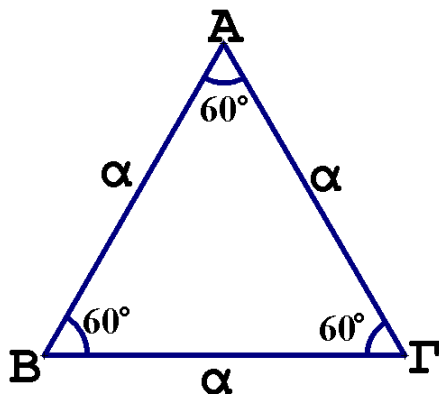
Άρα κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή.



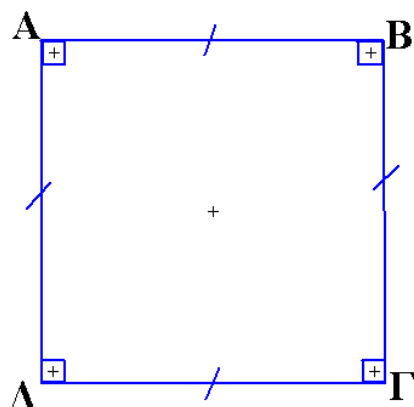
8.3 Κανονικά πολύγωνα.

Ένα πολύγωνο λέγεται κανονικό, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες.

Τα πιο γνωστά μας πολύγωνα είναι τα παρακάτω



Ισόπλευρο τρίγωνο

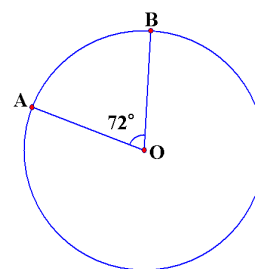


τετράγωνο

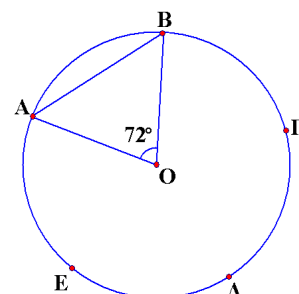
Κατασκευή κανονικού πολυγώνου με ν πλευρές.

Για παράδειγμα ένα κανονικό πεντάγωνο κατασκευάζεται ως εξής:

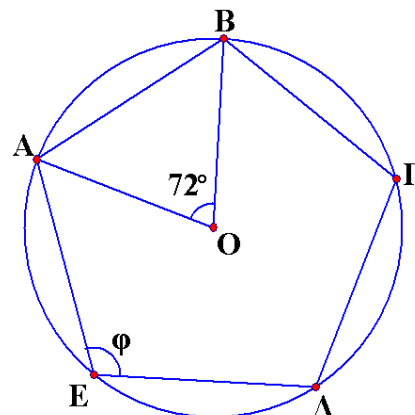
- Γράφουμε κύκλο (O, ρ) και σχηματίζουμε μια επίκεντρη γωνία του $\hat{AOB} = \frac{360^\circ}{n}$ (Για το πεντάγωνο έχουμε $\hat{AOB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$)



- Με έναν διαβήτη παίρνουμε διαδοχικά n τόξα ίσα με το $\hat{AB}$ (για το πεντάγωνο παίρνουμε 5 τόξα)



- Φέρνουμε τις χορδές των παραπάνω τόξων



Το πολύγωνο που σχηματίσαμε είναι κανονικό γιατί έχει

- i) Όλες τις πλευρές του ίσες ως χορδές ίσων τόξων και
- ii) Όλες τις γωνίες του φ ίσες ως εγγεγραμμένες, που η κάθε μία βαίνει σε τόξο ίσο με $(n - 2) \cdot \frac{360^\circ}{n}$ (για το πεντάγωνο έχουμε τόξο ίσο με $(5 - 2) \cdot \frac{360^\circ}{5} = 216^\circ$ άρα η κάθε γωνία του πενταγώνου είναι ίση με $\frac{216^\circ}{2} = 108^\circ$

Ο κύκλος (O, ρ) λέγεται **περιγεγραμμένος κύκλος** του πενταγώνου ABΓΔΕ ενώ το ABΓΔΕ λέμε ότι είναι **εγγεγραμμένο** στον κύκλο (O, ρ) .

Κάθε επίκεντρη γωνία ω που σχηματίζεται αν ενώσουμε το κέντρο ενός πολυγώνου με n πλευρές, με δύο διαδοχικές κορυφές του λέγεται **κεντρική γωνία** του πολυγώνου και είναι $\omega = \frac{360^\circ}{n}$.

Για το πεντάγωνο στο παράδειγμά μας είναι $\omega = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ$.

Πως συνδέεται η κεντρική γωνία του πολυγώνου με τη γωνία του πολυγώνου.

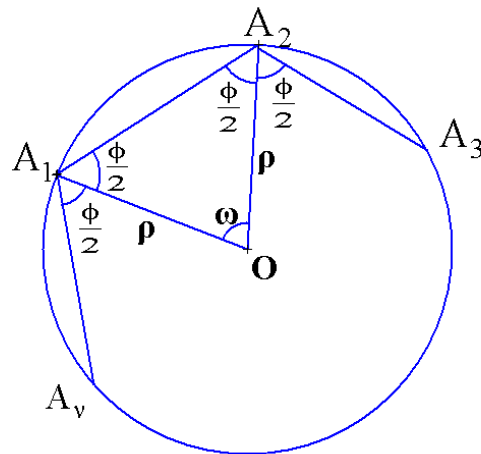
Αν ενώσουμε το κέντρο του κανονικού n -γώνου (πολύγωνο με n πλευρές) με τις κορυφές του, τότε σχηματίζονται n ισοσκελή τρίγωνα που είναι ίσα. Άρα κάθε μία από τις προσκείμενες γωνίες στη βάση είναι $\frac{\phi}{2}$.

Σε ένα από τα τρίγωνα π.χ. στο

$\triangle O A_1 A_2$ έχουμε $\frac{\phi}{2} + \frac{\phi}{2} + \omega = 180^\circ$ ή

$$\phi + \omega = 180^\circ$$

$$\text{ή } \phi = 180^\circ - \omega.$$



Έτσι για παράδειγμα αν ξέρουμε ότι η κεντρική γωνία ενός πολυγώνου

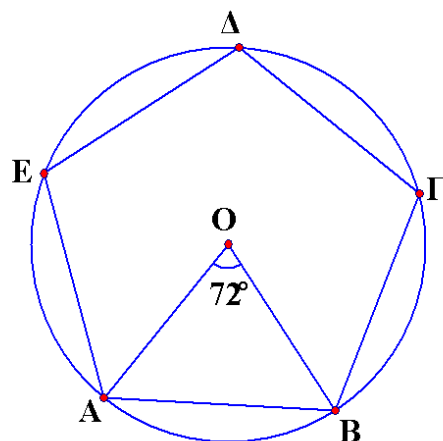
είναι 60° . Τότε η γωνία του πολυγώνου είναι $\phi = 180^\circ - 60^\circ = 120^\circ$

Από τον τύπο $\omega = \frac{360^\circ}{n}$ έχουμε $n = \frac{360^\circ}{\omega}$ οπότε αν γνωρίζουμε την

κεντρική γωνία ενός πολυγώνου μπορούμε να βρούμε τον αριθμό των πλευρών του. Έτσι αν η κεντρική γωνία είναι 60° . Τότε $n = \frac{360^\circ}{60^\circ} = 6$.

Άρα το πολύγωνο είναι κανονικό εξάγωνο.

8.4 Πλευρά κανονικού πολυγώνου.



Θέλουμε να υπολογίσουμε την πλευρά ενός κανονικού πενταγώνου που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο ακτίνας 3cm.

Όπως είδαμε στην προηγούμενη παράγραφο η κεντρική γωνία του πενταγώνου

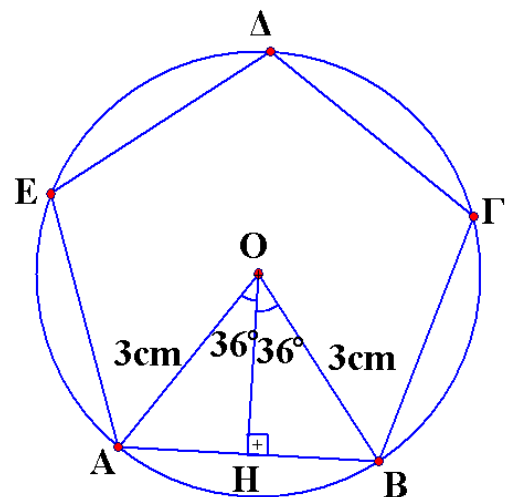
$$\hat{AOB} = \frac{360^\circ}{5} = 72^\circ.$$

Φέρνουμε το ύψος ΟΗ του ισοσκελούς τριγώνου

$\triangle OAB$.

Το ΟΗ λέγεται **απόστημα** του κανονικού πενταγώνου και είναι ακόμα διάμεσος και διχοτόμος του τριγώνου

$\triangle OAB$.



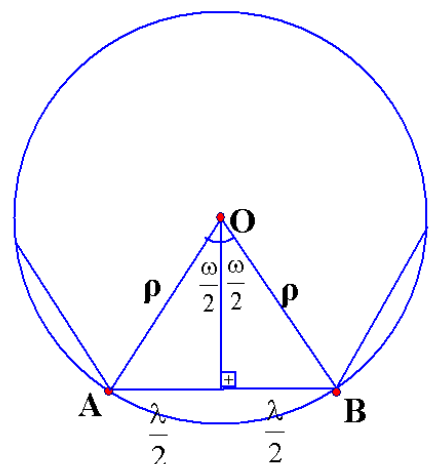
Γενικά :

Απόστημα ενός κανονικού πολυγώνου ονομάζουμε την απόσταση του κέντρου του από κάθε πλευρά του.

$$\text{Άρα } AH = \frac{1}{2} AB = \frac{\lambda}{2} \text{ και } \hat{AOH} = \frac{72^\circ}{2} = 36^\circ.$$

Από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle OAH$ έχουμε

$$\eta\mu 36^\circ = \frac{AH}{OA} = \frac{\frac{\lambda}{2}}{OA} = \frac{\lambda}{2 \cdot OA}.$$



Βρίσκουμε από τους τριγωνομετρικούς πίνακες ότι $\eta\mu 36^\circ \cong 0,588$. Και αφού

$OA = \rho = 3\text{cm}$, βρίσκουμε ότι $\lambda = 3,568\text{cm}$

Και αφού το πεντάγωνο είναι κανονικό η περίμετρός του είναι $T = 5\lambda = 17,64\text{cm}$.

Η

Το απόστημα $\alpha = OH$, το βρίσκουμε από το ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle OAH$

$\sigma\upsilon\nu 36^\circ = \frac{OH}{OA} = \frac{\alpha}{\rho}$. Βρίσκουμε από τους τριγωνομετρικούς πίνακες ότι

$\sigma\upsilon\nu 36^\circ \cong 0,809$. Και αφού $OA = \rho = 3\text{cm}$, βρίσκουμε ότι $\alpha = 3 \cdot 0,809$ ή $\alpha = 2,427\text{ cm}$.

Γενικά

Σε ένα κανονικό n -γωνο, αν είναι ω η κεντρική γωνία του και ρ η ακτίνα του κύκλου, στο ορθογώνιο τρίγωνο $\triangle OAH$ έχουμε:

Για να βρούμε την πλευρά λ του n -γώνου

$$\eta\mu \frac{\omega}{2} = \frac{AH}{OA} = \frac{\frac{\lambda}{2}}{\rho} \quad \text{οπότε}$$

$$\lambda = 2 \cdot \rho \cdot \eta\mu \frac{\omega}{2}$$

Και άρα η περίμετρος T είναι

$$T = n \cdot \lambda = 2 \cdot n \cdot \rho \cdot \eta\mu \frac{\omega}{2}$$

Και για να βρούμε το απόστημα α

$$\sigma\upsilon\nu \frac{\omega}{2} = \frac{OH}{OA} = \frac{\alpha}{\rho} \quad \text{οπότε}$$

$$\alpha = \rho \cdot \sigma\upsilon\nu \frac{\omega}{2}$$

Επειδή η διάμετρος δ του κύκλου είναι διπλάσια της ακτίνας ρ δηλαδή

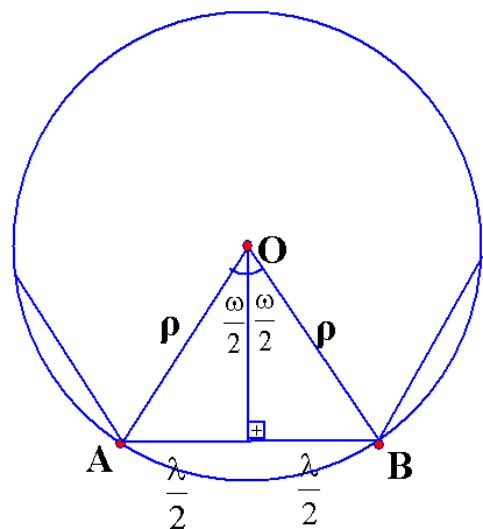
$\delta = 2\rho$ ή $\rho = \frac{\delta}{2}$, οι παραπάνω τύποι γίνονται

πλευρά n -γώνου

$$\lambda = \delta \cdot \eta\mu \frac{\omega}{2}$$

Κ.ΣΦΡΙΝΤΖΕΡΗΣ

$$T = n \cdot \lambda = n \cdot \delta \cdot \eta\mu \frac{\omega}{2}$$



περίμετρος n – γώνου

απόστημα

8.5 Μήκος κύκλου.

Έστω ότι έχουμε έναν κύκλο (O, ρ) φτιαγμένο από λεπτή κλωστή.

Αν κόψουμε τον κύκλο σε ένα σημείο του και το τεντώσουμε, τότε θα προκύψει ένα ευθύγραμμο τμήμα. Το μήκος αυτού του ευθύγραμμου τμήματος

AB θα το ονομάζουμε **μήκος του κύκλου** (O, ρ) ή **περίμετρος του κύκλου**.



Συγκρίνοντας τα μήκη διαφόρων κύκλων διαπιστώνουμε ότι όσο μεγαλύτερη είναι η διάμετρος τόσο μεγαλύτερο είναι το μήκος τους. Συγκεκριμένα διαπιστώνουμε ότι

Το μήκος των κύκλων και η διάμετρός τους είναι ποσά ανάλογα.

Αυτό σημαίνει ότι ο λόγος $\frac{\text{μήκος κύκλου}}{\text{διάμετρος}}$ είναι ο ίδιος για όλους τους κύκλους.

Ο σταθερός αυτός λόγος είναι ένας άρρητος αριθμός που συμβολίζεται διεθνώς με το ελληνικό γράμμα π και είναι περίπου ίσος με 3,14. Αν λοιπόν συμβολίσουμε με Γ την περίμετρο του κύκλου έχουμε

$$\frac{\Gamma}{\delta} = \pi \quad \text{ή} \quad \Gamma = \pi \cdot \delta$$

Και αφού $\delta = 2\rho$ τότε

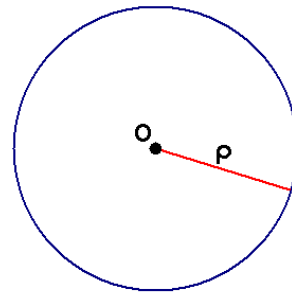
$$\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot \rho$$

8.6 Εμβαδόν κυκλικού δίσκου.

Το εμβαδόν ενός κυκλικού δίσκου ακτίνας ρ δίνεται από τον τύπο:

$$E = \pi \cdot \rho^2$$

όπου ρ η ακτίνα του κύκλου.



Έχει επικρατήσει από παράδοση το εμβαδόν του κυκλικού δίσκου να λέγεται και εμβαδόν του κύκλου αν και η έκφραση αυτή δεν είναι σωστή.

Κυκλικός δακτύλιος είναι το μέρος που περικλείεται από δύο ομόκεντρους κύκλους διαφορετικής ακτίνας.

Δηλαδή το χρωματισμένο μέρος του σχήματος.

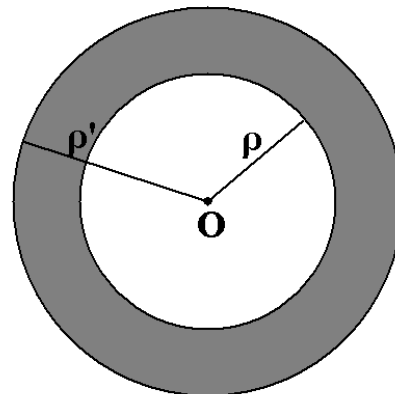
Πως θα το υπολογίσουμε;

Για να βρούμε το εμβαδόν του κυκλικού δακτυλίου εργαζόμαστε ως εξής:

Αν ρ και ρ' οι ακτίνες των δύο κύκλων.

Τότε $E_1 = \pi \cdot \rho^2$ και $E_2 = \pi \cdot \rho'^2$. Από το εμβαδόν E_1 του μεγάλου κυκλικού δίσκου θα αφαιρέσουμε το εμβαδόν του μικρού κυκλικού δίσκου E_2 .

Δηλαδή $E_1 - E_2 = \pi \cdot \rho'^2 - \pi \cdot \rho^2$. Εφαρμόζοντας την επιμεριστική ιδιότητα βρίσκουμε



$$E_1 - E_2 = \pi \cdot (\rho'^2 - \rho^2)$$

8.7 ΜΗΚΟΣ ΤΟΞΟΥ.

Σε έναν κύκλο (O, ρ) παίρνουμε ένα τόξο

$\widehat{AB} = \mu^\circ$. Για να βρούμε το μήκος S του τόξου αυτού εργαζόμαστε ως εξής:

Γνωρίζουμε ότι το μήκος του κύκλου είναι

$\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot \rho$ και είναι 360° .

Άρα λέμε

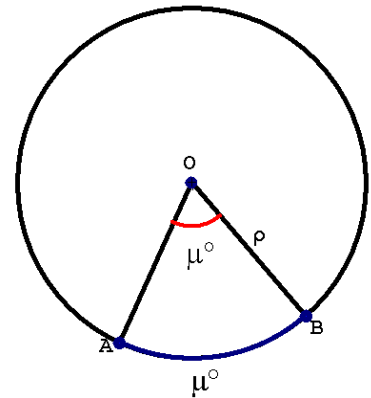
Τόξο 360° έχει μήκος $2 \cdot \pi \cdot \rho$

Τόξο 1° έχει μήκος x

Άρα $360^\circ \cdot x = 2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot 1^\circ$ ή $x = \frac{2 \cdot \pi \cdot \rho}{360^\circ}$

Άρα τόξο μ° έχει μήκος $S = \frac{2 \cdot \pi \cdot \rho \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$ ή

$$S = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^\circ}{180^\circ}$$



Πολλές φορές ως μονάδα μέτρησης τόξων ενός κύκλου (O, ρ) χρησιμοποιούμε εκείνο το τόξο που έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ του κύκλου. Τη μονάδα αυτή την λέμε **ακτίνιο** ή **rad**.

Αν λοιπόν έχουμε ένα τόξο α rad, τότε, αφού το 1 rad έχει μήκος ίσο με την ακτίνα ρ , τότε τα α rad θα έχουν μήκος

$$S = \alpha \cdot \rho$$

Για παράδειγμα στον κύκλο $(O, 2\text{cm})$ ένα τόξο 4rad έχει μήκος $S = 2 \cdot 4 = 8\text{cm}$.

Επειδή το μήκος του κύκλου δίνεται από τον τύπο $\Gamma = 2 \cdot \pi \cdot \rho$.

Αν μετρηθεί ο κύκλος σε rad, τότε είναι $2 \cdot \pi$ rad

Άρα το ημικύκλιο είναι π rad

Και το τεταρτοκύκλιο είναι $\frac{\pi}{2}$ rad.

Αν ένα τόξο είναι μ° και συγχρόνως α rad,

επειδή 2π rad είναι 360°

$$1 \text{ rad} \quad \text{είναι} \quad \frac{360^\circ}{2\pi} = \frac{180^\circ}{\pi}$$

$$\text{Άρα τα } \alpha \text{ rad είναι } \frac{180^\circ}{\pi} \cdot \alpha .$$

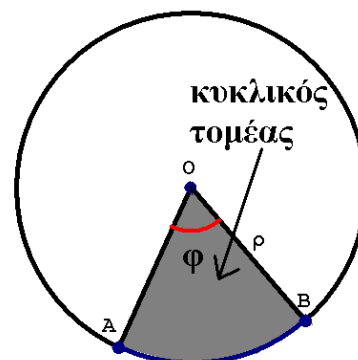
$$\text{Αφού όμως είναι τόξο } \mu^\circ, \text{ τότε } \mu^\circ = \frac{\alpha \cdot 180^\circ}{\pi} .$$

Άρα

$$\boxed{\frac{\mu}{180} = \frac{\alpha}{\pi}}$$

8.8 Εμβαδόν κυκλικού τομέα.

Κυκλικός τομέας είναι το μέρος ενός κυκλικού δίσκου που περικλείεται από ένα τόξο $\widehat{AB}$ και τις ακτίνες OA, OB που καταλήγουν στα άκρα του τόξου.



Για να βρούμε το εμβαδόν ενός κυκλικού τομέα γωνίας $\varphi = \mu^\circ$ εργαζόμαστε ως εξής: Ο κυκλικός δίσκος είναι κυκλικός τομέας 360° . Άρα

Κυκλικός τομέας 360° έχει εμβαδόν $\pi \cdot \rho^2$

Κυκλικός τομέας 1° έχει εμβαδόν $\frac{\pi \cdot \rho^2}{360^\circ}$

Άρα κυκλικός τομέας μ° έχει εμβαδόν $\mu^\circ \cdot \frac{\pi \cdot \rho^2}{360^\circ}$.

Άρα το εμβαδόν E ενός κυκλικού τομέα γωνίας μ° κύκλου ακτίνας ρ είναι

$$E = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot \mu^\circ}{360^\circ}$$

Ο παραπάνω τύπος μπορεί να γραφτεί $E = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^\circ}{180^\circ} \cdot \rho$.

Όμως $S = \frac{\pi \cdot \rho \cdot \mu^\circ}{180^\circ}$ είναι το μήκος του αντίστοιχου τόξου. Έτσι η σχέση γίνεται

$$E = \frac{1}{2} \cdot S \cdot \rho$$