

ΜΕΘΟΔΟΣ ΕΠΙΛΥΣΗΣ ΕΞΙΣΩΣΕΩΝ

1. ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ
2. ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ
3. ΧΩΡΙΖΟΥΜΕ ΓΝΩΣΤΟΥΣ ΑΠΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ
4. ΚΑΝΟΥΜΕ ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ
5. ΔΙΑΙΡΟΥΜΕ ΚΑΙ ΤΑ 2 ΜΕΛΗ ΜΕ ΤΟ ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ ΤΟΥ ΑΓΝΩΣΤΟΥ

ΒΗΜΑ 1 : ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΟΝΟΜΑΣΤΩΝ

Αυτό σημαίνει, απλά, ότι μας συμφέρει να "φύγουν" με κάποιον τρόπο τα κλάσματα (αν υπάρχουν, διαφορετικά προχωρούμε στο επόμενο βήμα). Για να το καταφέρουμε αυτό, ακολουθούμε την παρακάτω διαδικασία.

1. Βρίσκουμε το ΕΚΠ όλων των παρονομαστών.
2. Πολλαπλασιάζουμε **ΚΑΘΕ** όρο της εξίσωσης (ή ανίσωσης) με το ΕΚΠ.
3. Απλοποιούμε τους παρονομαστές με το ΕΚΠ και τους διαγράφουμε.

ΒΗΜΑ 2 : ΑΠΑΛΟΙΦΗ ΠΑΡΕΝΘΕΣΕΩΝ

Αυτό σημαίνει, όπως και πριν, ότι τώρα χρειάζεται να "φύγουν" οι παρενθέσεις (αν υπάρχουν, διαφορετικά προχωρούμε στο επόμενο βήμα). Πώς όμως "βγάζουμε" μια παρένθεση ; Θυμάται κανείς;

- Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει **θετικό πρόσημο**, τότε διαγράφουμε την παρένθεση και ξαναγράφουμε όλους τους όρους με το ίδιο πρόσημο.
- Αν μπροστά από την παρένθεση υπάρχει **αρνητικό πρόσημο**, τότε διαγράφουμε την παρένθεση και ξαναγράφουμε όλους τους όρους με αντίθετο πρόσημο.
- Αν έξω απ' την παρένθεση υπάρχει γινόμενο, τότε εφαρμόζουμε την **επιμεριστική ιδιότητα**.

ΒΗΜΑ 3 : ΧΩΡΙΖΟΥΜΕ ΓΝΩΣΤΟΥΣ ΑΠΟ ΑΓΝΩΣΤΟΥΣ

Στο βήμα αυτό, οι μόνες πράξεις που λογικά έχουν απομείνει είναι προσθέσεις και αφαιρέσεις. Γνωρίζουμε όμως, ήδη από το δημοτικό, ότι δε μπορούμε να προσθέτουμε ανόμοια πράγματα. Κι ένας γνωστός με έναν άγνωστο είναι ανόμοιοι, μεταξύ τους. Πώς θα γίνει όμως σωστά η δουλειά μας, όταν συνήθως σε μια

εξίσωση είναι όλοι ανακατεμένοι μεταξύ τους; Εδώ σας θέλω. Γι' αυτό χρειάζεται, πρώτα απ' όλα να τους χωρίσουμε, όπως τους ταιριάζει. Έτσι, λοιπόν:

- 1. Υπογραμμίζουμε τους άγνωστους όρους** (αν μας βοηθάει), ώστε να τους ξεχωρίζουμε καλύτερα.
- 2. Μεταφέρουμε τους άγνωστους στο 1ο μέλος** της εξίσωσης (ή ανίσωσης) και τους γνωστούς στο 2ο. Αν το κάνουμε αντίστροφα, δεν πειράζει καθόλου κι είναι ακριβώς το ίδιο πράγμα. Αλλά πρέπει να προσέχουμε πολύ μη μπερδευτούμε, καθώς σχεδόν όλα τα βιβλία και τα παραδείγματα, που θα διαβάσουμε, τηρούν παραδοσιακά τον ίδιο κανόνα: ο άγνωστος να βρίσκεται στο 1ο μέλος.

ΠΡΟΣΕΧΟΥΜΕ !!!

- Αλλάζουμε το πρόσημο σε όσους όρους μεταφέρουμε από το ένα μέλος στο άλλο.
- **ΔΕΝ** αλλάζουμε το πρόσημο στους υπόλοιπους όρους, δηλαδή σ' εκείνους που παραμένουν στο ίδιο μέλος.

ΒΗΜΑ 4 : ΑΝΑΓΩΓΗ ΟΜΟΙΩΝ ΟΡΩΝ

Που σημαίνει απλά ότι κάνουμε τις προσθέσεις και τις αφαιρέσεις, που έχουν απομείνει. Προσθέτουμε όλους τους άγνωστους όρους στο 1ο μέλος της εξίσωσης (ή ανίσωσης) και όλους τους γνωστούς στο 2ο μέλος.

ΒΗΜΑ 5 : ΔΙΑΙΡΟΥΜΕ με το ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ του ΑΓΝΩΣΤΟΥ

Από εδώ και πέρα, θέλει μεγάλη προσοχή κι αυτοσυγκέντρωση, καθώς δε λύνονται πάντα και με τον ίδιο τρόπο όλες οι εξισώσεις (ή ανισώσεις).

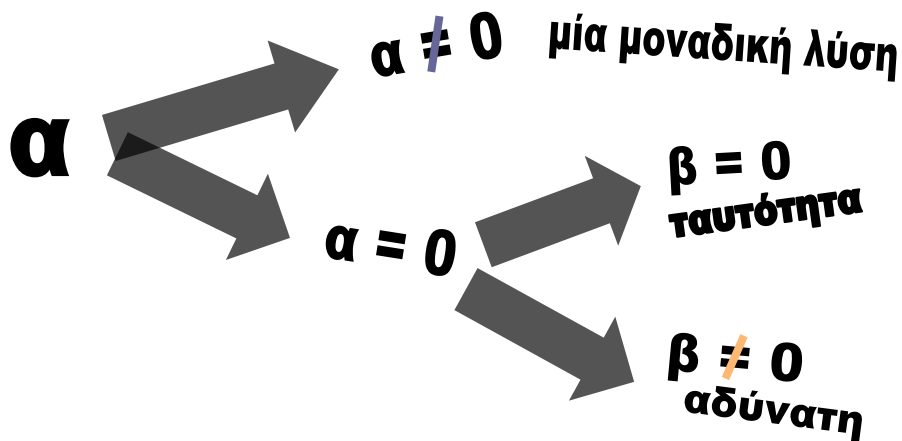
ΑΝ ΛΥΝΟΥΜΕ ΕΞΙΣΩΣΗ

Αν λύνουμε εξίσωση, τότε σε αυτό το τελευταίο βήμα, η εξίσωση θα έχει πια τη μορφή:

$$\alpha \cdot x = \beta$$

όπου το α και το β , θα είναι κάποιοι πραγματικοί αριθμοί. Πχ. $-4x = 12$.

Λοιπόν, δεν ξέρω πόσες φορές θα χρειαστεί να το διαβάσει κανείς για να το θυμάται, αλλά ο αριθμός α ονομάζεται **ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ του ΑΓΝΩΣΤΟΥ** και είναι ένας από τους πιο σημαντικούς αριθμούς, αυτή τη στιγμή! Από αυτόν εξαρτάται και η συνέχεια της εξίσωσης. Αν φτιάχναμε ένα περιληπτικό διάγραμμα, θα ήταν κάπως έτσι:



● ΕΞΙΣΩΣΗ με ΜΙΑ ΜΟΝΑΔΙΚΗ ΛΥΣΗ $\alpha \neq 0$

Αν ο συντελεστής του αγνώστου **ΔΕΝ ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ**, τότε όλα καλά! Διαιρούμε, κανονικά, και τα 2 μέλη της εξίσωσης με το συντελεστή του αγνώστου και καταλήγουμε σε μια ισότητα, η οποία στο 1ο μέλος έχει τον άγνωστο x και στο 2ο μέλος έναν γνωστό αριθμό. Ο αριθμός αυτός λέγεται **μοναδική λύση** ή **ρίζα της εξίσωσης**. Πχ. $x = 5$.

● ΕΞΙΣΩΣΗ ΑΔΥΝΑΤΗ $\alpha = 0$ και $\beta \neq 0$

Αν όμως ο συντελεστής του αγνώστου **ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ**, τότε δε μπορούμε να διαιρέσουμε με μηδέν (όπως όλοι γνωρίζουμε!) και δεν κάνουμε τίποτε άλλο! Σταματάμε εκεί! Αυτό, φυσικά, δε σημαίνει πως δεν πρέπει να δώσουμε μian απάντηση. Εξετάζουμε τον αριθμό που βρίσκεται στο 2ο μέλος (δηλαδή, τον γνωστό).

Αν ο ο αριθμός στο 2ο μέλος δεν είναι κι αυτός μηδέν (πχ. $0 \cdot x = 3$), τότε η εξίσωση λέγεται **ΑΔΥΝΑΤΗ**, που σημαίνει ότι δεν έχει **ΚΑΜΙΑ ΛΥΣΗ !!!**

● **ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ ή ΑΟΡΙΣΤΗ**

$\alpha = 0$ και $\beta = 0$

Αν ο ο αριθμός στο 2ο μέλος (ο γνωστός) είναι κι αυτός μηδέν (πχ. $0 \cdot x = 0$), τότε η εξίσωση λέγεται **ΤΑΥΤΟΤΗΤΑ** ή **ΑΟΡΙΣΤΗ**, που σημαίνει ότι λύσεις είναι **ΟΛΟΙ ΟΙ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΙ ΑΡΙΘΜΟΙ !!!**

ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ

Καμία φορά, λένε μερικοί μαθητές ότι η εξίσωση έχει άπειρες λύσεις. Αυτό δεν είναι εντελώς σωστό, καθώς αν πάρουμε τους αριθμούς που είναι π.χ. μεγαλύτεροι από το 10 είναι κι αυτοί άπειροι, αλλά καταλαβαίνουμε φυσικά ότι δεν είναι **ΟΛΟΙ** οι πραγματικοί αριθμοί !!! Όταν παίζουμε με το άπειρο, θέλει πολλή προσοχή, ώστε η απάντησή μας να έχει το σωστό νόημα.

ΑΝ ΛΥΝΟΥΜΕ ΑΝΙΣΩΣΗ

Αν λύνουμε ανίσωση, τότε σε αυτό το τελευταίο βήμα, η ανίσωση θα έχει πια μία από τις παρακάτω μορφές:

$$\alpha \cdot x > \beta, \alpha \cdot x \geq \beta, \alpha \cdot x < \beta, \alpha \cdot x \leq \beta$$

όπου το α και το β , είναι όπως και πριν κάποιοι πραγματικοί αριθμοί.

Δίνουμε πάλι όλη μας την προσοχή στο **ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗ του ΑΓΝΩΣΤΟΥ !!!** Στην περίπτωση, όμως, αυτή πρέπει να προσέξουμε λίγο περισσότερο: δε μας ενδιαφέρει μόνον αν ο συντελεστής του αγνώστου είναι ή δεν είναι μηδεν, αλλά παίζει καθοριστικό ρόλο και το **ΠΡΟΣΗΜΟ !!!** Για το λόγο αυτό, αν φτιάχναμε τώρα ένα αντίστοιχο διάγραμμα θα ήταν λίγο πιο πολύπλοκο, κι έτσι το προσπερνάμε (βλ. Παρατήρηση 5). Θα μιλήσουμε πολύ περιληπτικά:

● **ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΘΕΤΙΚΟΣ (> 0)**

$$\alpha > 0$$

Αν ο συντελεστής του αγνώστου **ΕΙΝΑΙ ΘΕΤΙΚΟΣ**, τότε λύνουμε την ανίσωση, όπως ακριβώς θα λύναμε μία εξίσωση. Δηλαδή, διαιρούμε και τα 2 μέλη με το συντελεστή του αγνώστου κ.τ.λ.

● **ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ (< 0)**

$$\alpha < 0$$

Αν ο συντελεστής του αγνώστου **ΕΙΝΑΙ ΑΡΝΗΤΙΚΟΣ**, τότε ΠΡΟΣΟΧΗ!!! Καθώς διαιρούμε και τα 2 μέλη με το συντελεστή του αγνώστου, πρέπει ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ να **ΑΝΤΙΣΤΡΕΨΟΥΜΕ ΤΗ ΦΟΡΑ** της ανίσωσης!!!

● **ΣΥΝΤΕΛΕΣΤΗΣ ΜΗΔΕΝ ($= 0$)**

$$\alpha = 0$$

Αν ο συντελεστής του αγνώστου **ΕΙΝΑΙ ΜΗΔΕΝ**, τότε (όπως συμβαίνει και σε μια εξίσωση) η ανίσωση που λύνουμε θα καταλήγει άλλοτε **αδύνατη** κι άλλοτε **αόριστη** (στις ανισώσεις είναι λάθος να χρησιμοποιούμε τη λέξη ταυτότητα).

Αν κάποιος επιθυμεί να εξετάσει τις δυνατές περιπτώσεις αναλυτικά, ας κοιτάξει τα πινακάκια στην Παρατήρηση 5. Διαφορετικά, το καλύτερο εργαλείο μας (και το πιο ευχάριστο) για να εξετάζουμε κάθε φορά την ορθότητα του αποτελέσματος, είναι η απλή λογική μας. Αρκεί να θυμόμαστε ότι:

- Το 0 είναι πάντα μεγαλύτερο από οποιονδήποτε αρνητικό αριθμό.
- Το 0 είναι πάντα μικρότερο από οποιονδήποτε θετικό αριθμό.

- Αν η ανίσωση που λύσαμε περιγράφει κάτι αντίθετο από τα παραπάνω, τότε είναι αδύνατη.



ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΕΙΣ

1. Στο τέλος μιας εξίσωσης, αν θέλουμε να σιγουρευτούμε για το αποτέλεσμα ή αν μας το ζητάει η ίδια η εκφώνηση, κάνουμε αυτό που λέμε **επαλήθευση** της εξίσωσης. Αυτό σημαίνει ότι παίρνουμε τον αριθμό, που βρήκαμε ως λύση, και τον αντικαθιστούμε στην αρχική μας εξίσωση, στη θέση του αγνώστου. Αφού εκτελέσουμε όλες τις δυνατές πράξεις, ελέγχουμε αν ισχύει η αριθμητική ισότητα που προκύπτει. πχ. $5 = 5$ (σωστή λύση), $3 = -5$ (λάθος λύση).
2. Να θυμόμαστε ότι οι ανισώσεις γενικά, όταν τις λύνουμε στο σύνολο των πραγματικών αριθμών (και δεν είναι αδύνατες), δεν έχουν ποτέ μια μοναδική λύση όπως οι εξισώσεις, αλλά ένα ολόκληρο **σύνολο άπειρων λύσεων**.
3. Να θυμόμαστε ότι αφού λύσουμε μία ανίσωση, συνήθως, περιμένουν από εμάς να **σχεδιάσουμε** τις λύσεις με κατάλληλα βέλη, πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Αυτή η μέθοδος βοηθάει ιδιαίτερα όταν έχουμε να λύσουμε ένα **ΣΥΣΤΗΜΑ** ανισώσεων, δηλαδή 2 ή περισσότερες ανισώσεις, των οποίων αναζητούμε (αν υπάρχουν) τις **κοινές λύσεις**.
4. Όταν σχεδιάζουμε τις λύσεις μιας ανίσωσης, πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών, θυμόμαστε τον εξής συμβολισμό: ο άδειος κύκλος ○ αντιστοιχεί στις ανισώσεις της μορφής $<$ ή $>$, ενώ ο γεμάτος κύκλος ● στις ανισώσεις της μορφής $\leq$ ή $\geq$.
5. Στον παρακάτω πίνακα, συγκεντρώνονται όλες οι δυνατές περιπτώσεις κατά την επίλυση μια ανίσωσης (γενικά):

$$\alpha \cdot x > \beta$$

α	β	ΛΥΣΗ
$\alpha > 0$	–	$x > \beta/\alpha$
$\alpha < 0$	–	$x < \beta/\alpha$

$\alpha = 0$	$\beta > 0$	αδύνατη
$\alpha = 0$	$\beta < 0$	αόριστη
$\alpha = 0$	$\beta = 0$	αδύνατη

$$\alpha \cdot x \geq \beta$$

α	β	ΛΥΣΗ
$\alpha > 0$	–	$x \geq \beta/\alpha$
$\alpha < 0$	–	$x \leq \beta/\alpha$
$\alpha = 0$	$\beta > 0$	αδύνατη
$\alpha = 0$	$\beta < 0$	αόριστη
$\alpha = 0$	$\beta = 0$	αόριστη

Αναλόγως, σκεφτόμαστε και για τις ανισώσεις $\alpha x < \beta$ και $\alpha x \leq \beta$.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑΤΑ

Να λυθεί η εξίσωση $\frac{x-1}{2} - \frac{4-2x}{4} = 1 + \frac{x}{6}$

Απάντηση

ΒΗΜΑ 1

Βρίσκουμε το ΕΚΠ των παρονομαστών: ΕΚΠ (2, 4, 6) = **12**. Πολλαπλασιάζουμε κάθε όρο της εξίσωσης με το ΕΚΠ, δηλ. το 12.

$$12 \cdot \frac{x-1}{2} - 12 \cdot \frac{4-2x}{4} = 12 \cdot 1 + 12 \cdot \frac{x}{6}$$

Απλοποιούμε τους παρονομαστές με το ΕΚΠ.

$$\cancel{12}^6 \cdot \frac{x-1}{\cancel{2}} - \cancel{12}^3 \cdot \frac{4-2x}{\cancel{4}} = 12 \cdot 1 + \cancel{12}^2 \cdot \frac{x}{\cancel{6}}$$

Καθαρογράφουμε, χρησιμοποιώντας παρενθέσεις, όπου χρειάζεται:

$$6 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (4 - 2x) = 12 + 2 \cdot x$$

ΒΗΜΑ 2

Εκτελούμε τις επιμεριστικές ιδιότητες (με προσοχή στα πρόσημα):

$$\begin{aligned} 6 \cdot (x - 1) - 3 \cdot (4 - 2x) &= 12 + 2x \\ 6x - 6 - 12 + 6x &= 12 + 2x \end{aligned}$$

ΒΗΜΑ 3

Υπογραμμίζουμε τους άγνωστους όρους κι έπειτα χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους:

$$6x - 6 - 12 + 6x = 12 + 2x$$

$$6x + 6x - 2x = 12 + 6 + 12$$

ΒΗΜΑ 4

Εκτελούμε όλες τις δυνατές προσθέσεις / αφαιρέσεις:

$$10x = 30$$

ΒΗΜΑ 5

Επειδή ο συντελεστής του αγνώστου (το 10) δεν είναι μηδέν, τότε μπορούμε να διαιρέσουμε και τα 2 μέλη μαζί του:

$$\frac{10 \cdot x}{10} = \frac{30}{10}$$

$$x = 3$$

Επαλήθευση

Επιστρέφουμε στην αρχική εξίσωση και θέτουμε όπου x τον αριθμό **3**.

$$\frac{x-1}{2} - \frac{4-2x}{4} = 1 + \frac{x}{6} \quad x=3 \Leftrightarrow$$

$$\frac{3-1}{2} - \frac{4-2 \cdot 3}{4} = 1 + \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{2}{2} - \frac{4-6}{4} = 1 + \frac{3}{6} \Leftrightarrow 1 - \frac{-2}{4} = 1 + \frac{3}{6} \Leftrightarrow 1 + \frac{2}{4} = 1 + \frac{3}{6} \Leftrightarrow$$

$$1 + \frac{2}{4} = 1 + \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{4}{4} + \frac{2}{4} = \frac{6}{6} + \frac{3}{6} \Leftrightarrow \frac{6}{4} = \frac{9}{6} \xrightarrow{\text{χιαστί}} \Leftrightarrow \mathbf{36 = 36}$$

Άρα η λύση που βρήκαμε είναι σωστή.

Να λυθεί η ανίσωση: $\frac{x}{2} + 2 \cdot (5 - x) \leq \frac{x}{3}$

Απάντηση

ΒΗΜΑ 1

Απαλοιφή παρονομαστών. ΕΚΠ (2, 3) = 6

$$6 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot 2 \cdot (5 - x) \leq 6 \cdot \frac{x}{3} \Leftrightarrow 3 \cdot x + 12 \cdot (5 - x) \leq 2 \cdot x$$

ΒΗΜΑ 2

Απαλοιφή παρενθέσεων με επιμεριστική ιδιότητα.

$$3 \cdot x + 12 \cdot (5 - x) \leq 2 \cdot x \Leftrightarrow 3x + 60 - 12x \leq 2x$$

ΒΗΜΑ 3

Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.

$$3x - 12x - 2x \leq -60$$

ΒΗΜΑ 4

Αναγωγή ομοίων όρων.

$$-11x \leq -60$$

ΒΗΜΑ 5

Διαιρούμε και τα 2 μέλη με το συντελεστή του αγνώστου, δηλαδή το -11 . Επειδή είναι αρνητικός αριθμός, δεν ξεχνάμε να αντιστρέψουμε τη φορά της ανίσωσης.

$$\frac{-11 \cdot x}{-11} \geq \frac{-60}{-11}$$

$$x \geq \frac{60}{11}$$

Γραφική απεικόνιση

Σχεδιάζουμε τη λύση που βρήκαμε, πάνω στο άξονα των πραγματικών αριθμών.

