Β' Γυμνασίου

Μαθηματικά

Θεωρία

Αντωνάτος Γιώργος
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ
email: antonatos.geo@gmail.com

7.1 Θετικοί και Αρνητικοί αριθμοί (Ρητοί Αριθμοί)

Τα σύμβολα «+» (συν) και «-» (πλην) λέγονται πρόσημα και χωρίζουν τους αριθμούς σε θετικούς και αρνητικούς αντίστοιχα.

Το 0 δεν είναι ούτε θετικός ούτε αρνητικός και δεν έχει πρόσημο.

Στους θετικούς, το πρόσημο μπορούμε να το παραλείψουμε.

Ομόσημοι λέγονται οι αριθμοί που έχουν το ίδιο πρόσημο

Ετερόσημοι λέγονται οι αριθμοί με διαφορετικό πρόσημο

Φυσικοί αριθμοί είναι οι :

0, 1, 2, 3, 4, 5, …………

Ακέραιοι αριθμοί είναι οι φυσικοί με τους αντίστοιχους αρνητικούς τους:

………, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, ……..

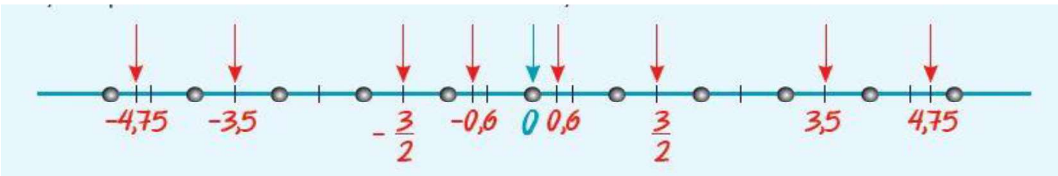
Ρητοί αριθμοί είναι όλοι οι γνωστοί μας αριθμοί έως τώρα, δηλαδή οι φυσικοί, τα κλάσματα και οι δεκαδικοί, μαζί με τους αντίστοιχους αρνητικούς τους.

7.2 Απόλυτη τιμή Ρητού αριθμού – Αντίθετοι Ρητοί – Σύγκριση ρητών

<u>**Ορισμός:** Απόλυτη τιμή ενός ρητού αριθμού α είναι η απόσταση του σημείου με τετμημένη α από την αρχή του άξονα, δηλαδή από το 0. Συμβολίζεται με $|\alpha|$</u>

Πχ |+2| = 2 |-4| = 4 |0| = 0

Δυο αριθμοί ονομάζονται **αντίθετοι**, όταν είναι ετερόσημοι και έχουν την ίδια απόλυτη τιμή. Ο αντίθετος του x είναι ο –x.



Μεγαλύτερος ρητός, είναι αυτός που βρίσκεται δεξιότερα στον άξονα.

Όλοι οι θετικοί ρητοί είναι μεγαλύτεροι από το μηδέν και τους αρνητικούς.

Μεγαλύτερος από δυο θετικούς ρητούς, είναι αυτός με την μεγαλύτερη απόλυτη τιμή.

Μεγαλύτερος από δυο αρνητικούς ρητούς, είναι αυτός με την μικρότερη απόλυτη τιμή.

Αν ο αριθμός x είναι θετικός, τότε είναι μεγαλύτερος του 0 και γράφουμε:

$$X > 0 \text{ ή } 0 < X$$

Αν ο αριθμός x είναι αρνητικός, τότε είναι μικρότερος του 0 και γράφουμε:

$$X < 0 \text{ ή } 0 > X$$

7.3 Πρόσθεση Ρητών Αριθμών

Για να προσθέσουμε δυο **ομόσημους** αριθμούς, προσθέτουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο άθροισμα τους βάζουμε το κοινό τους πρόσημο.

$$+7 + 5 = +12$$
$$-7 - 5 = -12$$

$$+5 - 7 = -2$$
$$-5 + 7 = +2$$

Για να προσθέσουμε δυο **ετερόσημους** αριθμούς, αφαιρούμε τη μικρότερη απόλυτη τιμή από την μεγαλύτερη και στην διαφορά τους βάζουμε το πρόσημου του ρητού που έχει τη μεγαλύτερη τιμή.

Ιδιότητες της Πρόσθεσης

- ✓ *Αντιμεταθετική Ιδιότητα* $\alpha + \beta = \beta + \alpha$
- ✓ *Προσεταιριστική Ιδιότητα* $\alpha + (\beta + \gamma) = (\alpha + \beta) + \gamma$
- ✓ *Ουδέτερο Στοιχείο* $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$
- ✓ *Άθροισμα Αντίθετων* $\alpha + (-\alpha) = (-\alpha) + \alpha = 0$

7.3 Αφαίρεση Ρητών Αριθμών

Για να **αφαιρέσουμε** από τον αριθμό α τον αριθμό β, προσθέτουμε στον α τον αντίθετο του β. Δηλαδή:

$$\boldsymbol{\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)}$$

$$(+8{,}5) - (+6{,}2) = (+8{,}5) + (-6{,}2) =$$
$$= 8{,}5 - 6{,}2 = 2{,}3$$

Απαλοιφή Παρενθέσεων

Σε ορισμένες αριθμητικές παραστάσεις εμφανίζονται παρενθέσεις, οι οποίες περιέχουν έναν ή και περισσότερους αριθμούς με τα πρόσημά τους. Μπροστά από τις παρενθέσεις αυτές μπορεί να υπάρχουν τα πρόσημα «+» ή «-». Για να τις απαλείψουμε, εργαζόμαστε ως εξής:

- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το «+» (ή δεν έχει πρόσημο), τότε βγάζουμε την παρένθεση, μαζί με το «+» (αν έχει), και γράφουμε τους όρους που περιέχει με τα πρόσημά τους όπως είναι.
- Όταν μια παρένθεση έχει μπροστά της το «-», τότε βγάζουμε την παρένθεση και γράφουμε τους όρους που περιέχει με αντίθετα πρόσημα.

Παράδειγμα:

$$\begin{aligned} A &= +(-5) - (-3) + (+6) - (-14) \\ &= -5 + 3 + 6 + 14 \\ &= -2 + 20 \\ &= 18 \end{aligned}$$

7.5 Πολλαπλασιασμός Ρητών Αριθμών

Το γινόμενο δυο **ομόσημων** (2 θετικοί ή 2 αρνητικοί) ρητών αριθμών, είναι **πάντα θετικός** αριθμός.

+ · + = + και - · - = +

Το γινόμενο δυο ετερόσημων ρητών αριθμών, είναι πάντα αρνητικός αριθμός.

+ · - = - ή - · + = -

Ιδιότητες του Πολλαπλασιασμού

- ✓ Αντιμεταθετική Ιδιότητα: α · β = β · α
- ✓ Προσεταιριστική Ιδιότητα: α · (β ·γ) = (α · β) · γ
- ✓ Ουδέτερο Στοιχείο: 1 · α = α · 1 = α
- ✓ Γινόμενο με το 0: 0 · α = α · 0 = 0
- ✓ Επιμεριστική Ιδιότητα:

α · (β + γ) = α · β + α · γ

α · (β - γ) = α · β - α · γ

Αντίστροφοι Αριθμοί

Δυο ρητοί αριθμοί α και β, διάφοροι του μηδενός, λέγονται αντίστροφοι όταν το γινόμενό τους είναι ίσο με την μονάδα, δηλαδή όταν ισχύει:

$$\alpha \cdot \beta = 1$$

- ✓ Ο καθένας από τους α και β είναι αντίστροφος του άλλου
- ✓ Ο αντίστροφος του κ είναι ο $\frac{1}{\kappa}$
- ✓ Ο αντίστροφος του $\frac{\kappa}{\lambda}$ είναι ο $\frac{\lambda}{\kappa}$
- ✓ Δύο αντίστροφοι αριθμοί έχουν το ίδιο πρόσημο

Γινόμενο πολλών παραγόντων

Για να υπολογίσουμε ένα γινόμενο πολλών παραγόντων (που είναι διάφοροι του μηδενός), πολλαπλασιάζουμε τις απόλυτες τιμές τους και στο γινόμενο βάζουμε:

- Το πρόσημο **«+»** αν το *πλήθος αρνητικών παραγόντων* είναι **άρτιο**.
- Το πρόσημο **«-»** αν το *πλήθος των αρνητικών παραγόντων* είναι **περιττό.**
- Αν τουλάχιστον ένας παράγοντας είναι μηδέν (0), τότε και το γινόμενο είναι ίσο με μηδέν

7.6 Διαίρεση Ρητών Αριθμών

- Για να διαιρέσουμε δυο **ομόσημους** ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «+»

+ : + = + και - : - = +

- Για να διαιρέσουμε δυο **ετερόσημους** ρητούς αριθμούς, διαιρούμε τις απόλυτες τιμές τους και στο πηλίκο βάζουμε το πρόσημο «-»

+ : - = - και - : + = -

Θυμάμαι:

Προτεραιότητα Πράξεων

Αριθμητική Παράσταση ονομάζεται μια παράσταση η οποία περιέχει πράξεις με αριθμούς.

Οι πράξεις γίνονται με την εξής προτεραιότητα

1) Εκτελούνται οι πράξεις μέσα στις παρενθέσεις (εφ' όσον υπάρχουν)
2) Δυνάμεις αριθμών
3) Πολλαπλασιασμοί και Διαιρέσεις
4) Προσθέσεις και Αφαιρέσεις

7.7 Δεκαδική μορφή ρητών αριθμών

*Όταν σε έναν δεκαδικό αριθμό, ένα μέρος των δεκαδικών του ψηφίων επαναλαμβάνεται, ο αριθμός αυτός ονομάζεται **περιοδικός δεκαδικός αριθμός** και το τμήμα των επαναλαμβανόμενων ψηφίων ονομάζεται **περίοδος**.*

Κάθε ρητός αριθμός, λοιπόν, μπορεί να γραφεί με την μορφή δεκαδικού ή περιοδικού δεκαδικού

Πχ.

$$\frac{5}{3} = 1{,}\overline{6} \quad \text{και} \quad \frac{1.000.000}{7} = 142857{,}\overline{142857}$$

7.8-7.9 Δυνάμεις αριθμών

Θυμάμαι:

Δύναμη ενός αριθμού α στην ν, ονομάζουμε το γινόμενο α·α·α……·α (ν φορές) και συμβολίζουμε $\boldsymbol{\alpha^\nu}$

$$\alpha^\nu = \underbrace{\alpha\cdot\alpha\cdot\alpha\cdot\ldots\cdot\alpha}_{\nu \text{ παράγοντες}}$$

Το α ονομάζεται βάση της δύναμης, ενώ το ν εκθέτης. Ουσιαστικά ο εκθέτης δείχνει πόσες φορές πολλαπλασιάζουμε τη βάση με τον εαυτό της.

- α^2 : α στην δευτέρα ή α στο τετράγωνο
- α^3 : α στην τρίτη ή α στον κύβο
- $\alpha^1 = \alpha$
- $1^\nu = 1$

Τις δυνάμεις του 10, δηλαδή το 10^ν, τις υπολογίζουμε ως εξής. Γράφουμε το 1 και συμπληρώνουμε ν μηδενικά. Για παράδειγμα $10^4 = 10000$

- Με εκθέτη φυσικό

Αν

1. α>0 τότε $\alpha^\nu>0$
2. α<0 και ν άρτιος, τότε $\alpha^\nu>0$ πχ $(-2)^2 = +4$ (γιατί το «2» είναι άρτιος)
3. α<0 και ν περιττός, τότε $\alpha^\nu<0$ πχ $(-2)^3 = -8$ (γιατί το «3» είναι περιττός)

- Με εκθέτη ακέραιο

1. $\alpha^{-\nu} = \left(\frac{1}{\alpha^\nu}\right) = \left(\frac{1}{\alpha}\right)^\nu$
2. $\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{-\nu} = \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^\nu$

Ιδιότητες Δυνάμεων

$\alpha^{\mu}\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu+\nu}$

$\left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^{\nu} = \frac{\alpha^{\nu}}{\beta^{\nu}}$

$\alpha^{\mu}:\alpha^{\nu} = \alpha^{\mu-\nu}$

$(\alpha\beta)^{\nu} = \alpha^{\nu}\cdot\beta^{\nu}$

$(\alpha^{\mu})^{\nu} = \alpha^{\mu\nu}$

7.10 Τυποποιημένη μορφή μικρών και μεγάλων δεκαδικών αριθμών

Όπως οι μεγάλοι αριθμοί, έτσι και οι πολύ μικροί μπορούν να γραφούν σε τυποποιημένη μορφή $\alpha \cdot 10^{\nu}$, όπου α είναι ένας δεκαδικός αριθμός με ακέραιο μέρος μεγαλύτερο ή ίσο του 1 και μικρότερο του 10 και ω φυσικό αριθμό.

Δηλαδή:

$$0,\underbrace{0000000000000000000002}_{23\ \theta\acute{\varepsilon}\sigma\varepsilon\iota\varsigma}9\ gr = 2,9 \cdot 10^{-23}$$

1.1 Η έννοια της μεταβλητής – Αλγεβρικές Παραστάσεις

Αλγεβρική παράσταση λέγεται μια παράσταση η οποία περιέχει πράξεις με *αριθμούς* και *μεταβλητές*, δηλαδή γράμματα που παριστάνουν έναν οποιοδήποτε αριθμό.

Θυμίζουμε την Επιμεριστική Ιδιότητα:

$$\alpha \cdot (\beta + \gamma) = \alpha \cdot \beta + \alpha \cdot \gamma$$

$$\alpha \cdot (\beta - \gamma) = \alpha \cdot \beta - \alpha \cdot \gamma$$

Παραδείγματα:

$3 \cdot (5+x) = 3 \cdot 5 + 3 \cdot x = 15 + 3x$

$-2 \cdot (x - y - 6) = -2x + 2y + 12$

✓ *Ισχύουν οι κανόνες απαλοιφής των παρενθέσεων που αναφέραμε στο προηγούμενο κεφάλαιο!!*

Όροι αλγεβρικής παράστασης – Αναγωγή όμοιων όρων

- Οι προσθετέοι μιας αλγεβρικής παράστασης, λέγονται **όροι** της παράστασης.
- Όσοι όροι περιέχουν την ίδια μεταβλητή, λέγονται **όμοιοι**
- Μπορούμε να γράψουμε σε απλούστερη μορφή μια αλγεβρική παράσταση, συγκεντρώνοντας τους όμοιους όρους, κάνοντας δηλαδή **αναγωγή ομοίων όρων**. Στην διαδικασία αυτή χρησιμοποιούμε την επιμεριστική ιδιότητα, η οποία μπορεί να γραφεί και στην μορφή:

$$\beta \cdot \alpha + \gamma \cdot \alpha = (\beta + \gamma) \cdot \alpha$$

Πολλαπλασιασμοί της μορφής (α + β) · (γ + δ)

Με την βοήθεια της επιμεριστικής μπορούμε να κάνουμε τον παραπάνω υπολογισμό.

Πιο σύντομα μπορούμε να θυμόμαστε ότι πολλαπλασιάζουμε κάθε αριθμό της πρώτης παρένθεσης με κάθε αριθμό της δεύτερης παρένθεσης, δηλαδή:

$$(\alpha + \beta) \cdot (\gamma + \delta) = \alpha \cdot \gamma + \alpha \cdot \delta + \beta \cdot \gamma + \beta \cdot \delta$$

1.2 Εξισώσεις α' βαθμού

Μια ισότητα δυο παραστάσεων που περιέχουν αριθμούς και μια μεταβλητή (για παράδειγμα x) ονομάζεται **εξίσωση** με έναν άγνωστο τον αριθμό x.

Έτσι λοιπόν η ισότητα

$$3x - 7 = x + 5$$

είναι μια εξίσωση. Η παράσταση 3x – 7 λέγεται πρώτο μέλος και η παράσταση x + 5 λέγεται δεύτερο μέλος.

Η διαδικασία κατά την οποία βρίσκουμε τον άγνωστο αριθμό x λέγεται επίλυση της εξίσωσης.

Ιδιότητες Πράξεων

- Αν και στα δυο μέλη μιας ισότητας **προσθέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει πάλι μια ισότητα

$$\text{Αν } \alpha=\beta \text{ τότε } \alpha + \gamma = \beta + \gamma$$

- Αν και στα δυο μέλη μιας ισότητας **αφαιρέσουμε** τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει πάλι μια ισότητα

$$\text{Αν } \alpha=\beta \text{ τότε } \alpha - \gamma = \beta - \gamma$$

- Αν και τα δυο μέλη μιας ισότητας τα **πολλαπλασιάσουμε** με τον ίδιο αριθμό, προκύπτει πάλι μια ισότητα

$$\text{Αν } \alpha=\beta \text{ τότε } \alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$$

- Αν και τα δυο μέλη μιας ισότητας τα **διαιρέσουμε** με τον ίδιο αριθμό, τότε προκύπτει πάλι μια ισότητα

$$\text{Αν } \alpha=\beta \text{ τότε } \frac{\alpha}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma}$$

- Σε μια εξίσωση μπορούμε να «*μεταφέρουμε*» όρους από το ένα μέλος στο άλλο αλλάζοντας το πρόσημό τους.
- **Αδύνατη** εξίσωση είναι κάθε εξίσωση της μορφής $\mathbf{0 \cdot x = \alpha}$, όπου $\alpha \neq 0$
- **Ταυτότητα** ονομάζεται κάθε εξίσωση της μορφής $\mathbf{0 \cdot x = 0}$

1.3 Επίλυση Τύπων

Πολλές φορές όταν έχουμε έναν τύπο με πολλές μεταβλητές, είναι χρήσιμο να απομονώσουμε στο ένα μέρος μια μεταβλητή. Η διαδικασία αυτή λέγεται επίλυση τύπου ως προς τη μεταβλητή αυτή.

Το εμβαδόν τραπεζίου δίνεται από τον τύπο:
$E=\left(\frac{\beta+B}{2}\right)\cdot u$, όπου, β: βάση μικρή,
Β: Βάση μεγάλη, υ: ύψος τραπεζίου.
Να λύσετε τον τύπο ως προς β.

Λύση

$E=\left(\frac{\beta+B}{2}\right)\cdot u$ ή $2E=(\beta+B)\cdot u$ ή $2E=\beta\cdot u+B\cdot u$ ή

$\beta\cdot u=2E-B\cdot u$ ή $\frac{\beta\cdot u}{u}=\frac{2E-B\cdot u}{u}$

Άρα, $\beta=\frac{2E-B\cdot u}{u}$.

1.4 Επίλυση Προβλημάτων με χρήση εξισώσεων

1. **Διαβάζουμε προσεκτικά το πρόβλημα** για να καταλάβουμε ποια είναι τα δεδομένα και ποια τα ζητούμενα.
2. **Επιλέγουμε** ποιο από τα ζητούμενα θα συμβολίσουμε με τον άγνωστο x.
3. **Εκφράζουμε με την βοήθεια του x** τα υπόλοιπα ζητούμενα που πιθανόν να υπάρχουν.
4. **Μετατρέπουμε** τις εκφράσεις του προβλήματος σε μαθηματικές σχέσεις.
5. **Σχηματίζουμε μια εξίσωση** την οποία κα λύνουμε.
6. **Ελέγχουμε** αν η λύση που βρήκαμε ικανοποιεί τις συνθήκες του προβλήματος. Αν δεν τις ικανοποιεί, την απορρίπτουμε.

2.1 Τετραγωνική Ρίζα Θετικού Αριθμού

- **Τετραγωνική Ρίζα** ή **ρίζα** ενός **θετικού αριθμού** α λέγεται ο **θετικός αριθμός** ο οποίος, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, δίνει τον αριθμό α. Η τετραγωνική ρίζα του α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$
- Επειδή $0^2 = 0$, ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$

- Προκύπτει επομένως ότι αν $\sqrt{\alpha} = x$, όπου $\alpha \geq 0$,τότε $x \geq 0$ και $x^2 = \alpha$
- Αν $\alpha \geq 0$,τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$

Επίσης ισχύει ότι $(-5)^2 = 25$. Ωστόσο είναι λάθος να γράψουμε $\sqrt{25} = -5$, διότι $-5 < 0$. Η $\sqrt{25}$ ισούται με τον θετικό αριθμό που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο, το αποτέλεσμα είναι 25.

Μερικές χρήσιμες τετραγωνικές ρίζες:

- $\sqrt{121} = 11$
- $\sqrt{144} = 12$
- $\sqrt{169} = 13$
- $\sqrt{196} = 14$
- $\sqrt{225} = 15$
- $\sqrt{256} = 16$
- $\sqrt{289} = 17$
- $\sqrt{324} = 18$
- $\sqrt{361} = 19$
- $\sqrt{400} = 20$

Ιδιότητα για τις $(\sqrt{\alpha})^2$ και $\sqrt{\alpha^2}$

- ✓ Αν $\alpha \geq 0$, τότε $(\sqrt{\alpha})^2 = \alpha$ και $\sqrt{\alpha^2} = \alpha$
- ✓ Αν $\alpha < 0$, τότε $\sqrt{\alpha^2} = -\alpha$

Γενικά $\boxed{\sqrt{\alpha^2} = |\alpha|}$

$\boxed{\text{και}}$

$$\boxed{\sqrt{\alpha}^2 = \alpha}$$

Γενικές Ιδιότητες

- ✓ Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε ισχύει

$$\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$$

- ✓ Αν $\alpha \geq 0$ και $\beta \geq 0$, τότε ισχύει

$$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}} = \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$$

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε $\sqrt{\boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta}} \neq \sqrt{\boldsymbol{\alpha}} + \sqrt{\boldsymbol{\beta}}$

Οι λύσεις της εξίσωσης $x^2 = \alpha$

Αν $\alpha > 0$, τότε η εξίσωση

$$x^2 = \alpha$$

έχει λύσεις τις:

$$x = \sqrt{\alpha} \text{ ή } x = -\sqrt{\alpha}$$

- Αν $\alpha > 0$, τότε η $\sqrt{\alpha}$ είναι η θετική λύση της εξίσωσης $x^2 = \alpha$
- Η εξίσωση $x^2 = 0$ έχει λύση την $x = 0$
- Αν $\alpha < 0$, τότε η εξίσωση $x^2 = \alpha$ είναι αδύνατη

❖ <u>Σε μια ρίζα, το **υπόριζο** πρέπει να είναι ΠΑΝΤΑ θετικός αριθμός.</u>

2.2Άρρητοι Αριθμοί – Πραγματικοί Αριθμοί

Άρρητοι Αριθμοί

Κάθε αριθμός που δεν είναι ρητός, δηλαδή δεν μπορεί να γραφεί με την μορφή κλάσματος $\frac{\kappa}{\nu}$ με κ,ν ακέραιους και ν≠0, ονομάζεται **άρρητος αριθμός.**

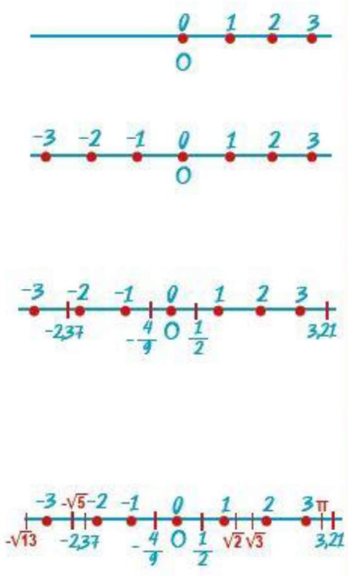
Έτσι λοιπόν τους άρρητους αριθμούς, όπως πχ x = $\sqrt{2}$, τους οποίους δεν μπορούμε να τους υπολογίσουμε με ακρίβεια, θα τους υπολογίσουμε προσεγγιστικά με κάποιον αριθμό που είναι περίπου ίσος (συμβολικά ≈)

Έχουμε:
με **προσέγγιση χιλιοστού**: $\sqrt{2}$ = 1,414
με **προσέγγιση δεκάκις χιλιοστού**: $\sqrt{2}$ = 1,4142
με **προσέγγιση εκατοντάκις χιλιοστού**: $\sqrt{2}$ = 1,41421 κ.ο.κ.
Οι αριθμοί αυτοί λέγονται **ρητές προσεγγίσεις του αριθμού $\sqrt{2}$**.

Αποδεικνύεται έτσι ότι και οι αριθμοί $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, …….. είναι **άρρητοι**.

*Αργότερα θα μάθουμε ότι υπάρχουν και άλλοι άρρητοι αριθμοί που δεν είναι ρίζες ρητών αριθμών, όπως για παράδειγμα ο γνωστός μας από τον κύκλο αριθμός **π**.*

Πραγματικοί Αριθμοί



Ας μελετήσουμε όλα τα σύνολα αριθμών που έχουμε συναντήσει.

- Οι φυσικοί αριθμοί: 0, 1, 2, 3, ... παριστάνονται στη διπλανή ευθεία με σημεία.
  Στην αρχή Ο έχουμε τοποθετήσει το μηδέν (0).
- Οι ακέραιοι αριθμοί: ... –3, –2, –1, 0, 1, 2, 3 ... παριστάνονται πάλι με σημεία.
  Τοποθετούμε στα δεξιά της αρχής Ο τους θετικούς ακέραιους αριθμούς και στα αριστερά τους αρνητικούς.
- Το σύνολο των ρητών αριθμών, δηλαδή των αριθμών που μπορούν να γραφούν στη μορφή $\frac{\mu}{\nu}$, όπου μ ακέραιος και ν φυσικός αριθμός.
  Οι ρητοί αριθμοί έχουν γνωστή δεκαδική μορφή και γεμίζουν την ευθεία, αλλά όχι πλήρως.
- Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται όχι μόνο από τους ρητούς αλλά και όλους τους άρρητους. Οι πραγματικοί αριθμοί καλύπτουν πλήρως την ευθεία, δηλαδή κάθε σημείο της ευθείας αντιστοιχεί σε έναν πραγματικό αριθμό και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός αντιστοιχεί σε μοναδικό σημείο της ευθείας. Για τον λόγο αυτό, την ευθεία αυτή την ονομάζουμε **ευθεία** ή **άξονα των πραγματικών αριθμών**.

Ρητοποίηση Παρονομαστή

Για να μετατρέψουμε ένα κλάσμα της μορφής $\frac{\beta}{\sqrt{\alpha}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή, πολλαπλασιάζουμε με $\sqrt{\alpha}$ αριθμητή και παρονομαστή. Δηλαδή:

Έστω

$$\frac{3}{\sqrt{2}} = \frac{3\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \frac{3\sqrt{2}}{(\sqrt{2})^2} = \frac{3\sqrt{2}}{2}$$

3.1 Η έννοια της Συνάρτησης

Ορισμός της Συνάρτησης

Έστω δυο μεταβλητές x και y οι οποίες παίρνουν πραγματικές τιμές.

Μια ισότητα που συνδέει τις μεταβλητές x και y έτσι, ώστε κάθε τιμή της μεταβλητής x να αντιστοιχίζεται σε μία μόνο τιμή της μεταβλητής y ονομάζεται συνάρτηση.

Μπορούμε επίσης να λέμε ότι: «η μεταβλητή y εκφράζεται ως συνάρτηση της μεταβλητής x».

Τιμές συνάρτησης – Πίνακας τιμών

- Όταν γνωρίζουμε τη συνάρτηση που συνδέει δυο μεταβλητές x και y, τότε για μια τιμή του x μπορούμε να βρούμε ποια τιμή παίρνει η μεταβλητή y.
- Η αντιστοιχία μεταξύ των τιμών των μεταβλητών x και y σε μια συνάρτηση παρουσιάζεται καλύτερα με τη βοήθεια ενός πίνακα τιμών.

Ο πίνακας τιμών παρουσιάζει συγκεντρωμένα τα ζεύγη των αντίστοιχων τιμών των μεταβλητών x και y.

Παράδειγμα

Δίνεται η συνάρτηση y = 7 – 2x

a) Ποια η τιμή του y για x=2;
b) Για ποια τιμή του x είναι y=9;

a) Για x = 2 η τιμή της y είναι:

$$y = 7 - 2\cdot 2 = 7 - 4 = 3$$

b) Αν η συνάρτησηy = 7 – 2x βάλουμε στη θέση του y τον αριθμό 9 έχουμε:

$$9 = 7 - 2x \quad ή \quad 2x = 7 - 9 \quad ή \quad 2x = -2 \quad ή \quad \frac{2x}{2} = \frac{-2}{2} \quad ή \quad x = -1$$

3.2 Καρτεσιανές Συντεταγμένες – Γραφική Παράσταση Συνάρτησης

Σχεδιάζουμε δυο κάθετους άξονες x’x και y’y με κοινή αρχή Ο. Οι δυο άξονες αυτοί αποτελούν ένα **σύστημα ορθογωνίων αξόνων ή απλά ένα σύστημα αξόνων**. Το σημείο **Ο** ονομάζεται **αρχή των αξόνων**.

Αν οι **μονάδες μέτρησης** και στους δυο άξονες είναι **ίδιες**, τότε λέμε ότι αποτελούν ένα **ορθοκανονικό σύστημα αξόνων**.

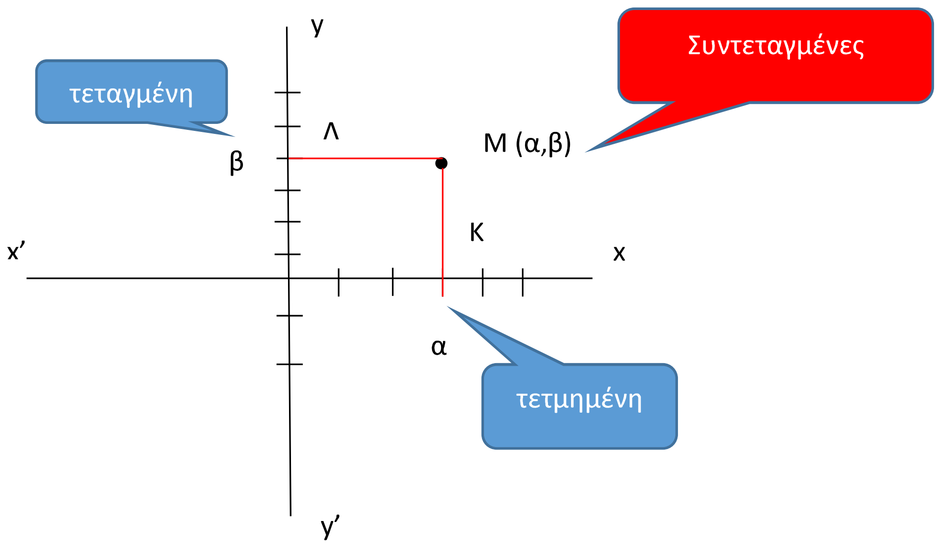
Συντεταγμένες σημείου

Έστω ένα τυχαίο σημείο Μ σε ένα σύστημα ορθογώνιων συντεταγμένων xOy. Για να προσδιορίσουμε τη θέση του, εργαζόμαστε ως εξής:

- Από το Μ φέρνουμε παράλληλη στο άξονα y’y, η οποία τέμνει τον άξονα x’x στο σημείο Κ, που αντιστοιχεί σε έναν αριθμό α του άξονα x’x.
- Από το Μ φέρνουμε παράλληλη στο άξονα x’x, η οποία τέμνει τον άξονα y’y στο σημείο Λ, που αντιστοιχεί σε έναν αριθμό β του άξονα y’y.

Έτσι σχηματίζεται το ζεύγος αριθμών α και β του σημείου Μ, και συμβολίζουμε με Μ(α,β).

- Ο πρώτος αριθμός (το α) λέγεται τετμημένη του σημείου Μ.
- Ο δεύτερος αριθμός (το β) λέγεται τεταγμένη του σημείου Μ.
- Η τετμημένη και η τεταγμένη του σημείου Μ λέγονται συντεταγμένες του σημείου Μ.



- ✓ Κάθε σημείο του x’x άξονα έχει **τεταγμένη** 0, δηλαδή είναι της μορφής Κ(α,0).
- ✓ Κάθε σημείο του y’y άξονα έχει **τετμημένη** 0, δηλαδή είναι της μορφής Λ(0,β).
- ✓ Η αρχή των αξόνων έχει **συντεταγμένες** Ο(0,0).

Τεταρτημόρια

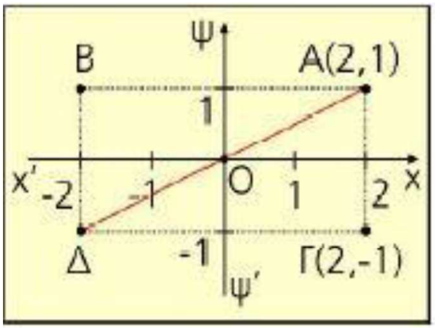
- Ένα σύστημα αξόνων χωρίζει το επίπεδο σε 4 «μέρη», τα οποία λέγονται **τεταρτημόρια**.
- Τα τεταρτημόρια αριθμούνται (1^o,2^o,3^o,4^o) όπως φαίνεται στο σχήμα.
- Στο σχήμα φαίνονται επίσης τα πρόσημα των συντεταγμένων των σημείων ανάλογα με το τεταρτημόριο που βρίσκονται.

2^o Τεταρτημόριο (- , +)	1^o Τεταρτημόριο (+ , +)
3^o Τεταρτημόριο (- , -)	4^o Τεταρτημόριο (+ , -)

Παραδείγματα:

1. Το σημείο Α(2,4) έχει θετική τετμημένη και θετική τεταγμένη, άρα βρίσκεται στο 1^o τεταρτημόριο.
2. Το σημείο Β(-3,2) έχει αρνητική τετμημένη και θετική τεταγμένη, άρα βρίσκεται στο 2^o τεταρτημόριο.
3. Το σημείο Γ(-2,-3) έχει αρνητική τετμημένη και αρνητική τεταγμένη, άρα βρίσκεται στο 3^o τεταρτημόριο.
4. Το σημείο Δ(3,-2) έχει θετική τετμημένη και αρνητική τεταγμένη, άρα βρίσκεται στο 4^o τεταρτημόριο.

Συμμετρικά σημεία



- Δυο σημεία είναι συμμετρικά ως προς άξονα x'x όταν έχουν την ίδια τετμημένη και αντίθετες τεταγμένες. Έτσι το συμμετρικό του σημείου Α(α, β) ως προς τον άξονα x'x είναι το Γ(α, -β).
- Δυο σημεία είναι συμμετρικά ως προς άξονα y'y όταν έχουν ίδια τεταγμένη και αντίθετες τετμημένες. Έτσι το συμμετρικό του σημείου Α(α, β) ως προς τον άξονα y'y είναι το Β(-α, β).
- Δυο σημεία είναι συμμετρικά ως προς την αρχή των αξόνων Ο(0, 0) όταν έχουν αντίθετες τετμημένες και αντίθετες τεταγμένες. Έτσι το συμμετρικό του Κ(α, β) ως προς την αρχή των αξόνων είναι το Δ(-α, -β).

Απόσταση δύο σημείων

Έστω σημεία $A(x_1, y_1)$ και $B(x_2, y_2)$ δύο σημεία σε ένα σύστημα αξόνων. Τότε η απόσταση ΑΒ των δύο σημείων είναι ίση με:

$$AB = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

3.3 Η Συνάρτηση y = α · x

- ✓ Δύο ποσά λέγονται **ανάλογα** όταν πολλαπλασιάζοντας με έναν αριθμό τις τιμές του ενός ποσού, τότε πολλαπλασιάζονται με τον ίδιο αριθμό και οι τιμές του άλλου ποσού.
- ✓ *Όταν δύο ποσά x και y είναι ανάλογα, τότε ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντα σταθερός.*
- ✓ Αν α είναι ο σταθερός λόγος των ποσών x και y, τότε ισχύει:

$$\frac{y}{x} = \alpha \quad ή \quad y = \alpha \cdot x$$

- ✓ Με την σχέση y = α · x έχουμε εκφράσει το y ως συνάρτηση του x.

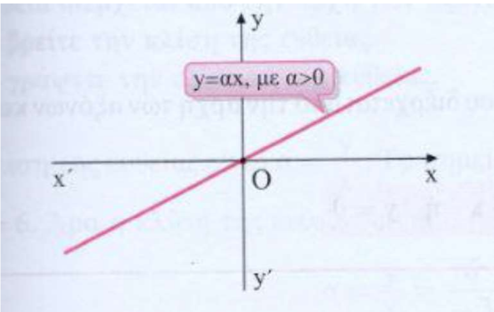
- ✓ Λέμε ότι **<u>ένα σημείο ανήκει σε μια ευθεία</u>** ή ότι **<u>μια ευθεία διέρχεται από ένα σημείο</u>**, **όταν οι συντεταγμένες του την επαληθεύουν**.
  Παράδειγμα: Το σημείο Μ(1,3) ανήκει στην ευθεία y = 2x +1 γιατί για x = 1 και y =3 =>

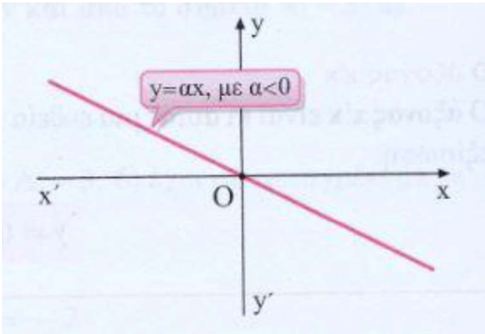
$$3 = 2 \cdot 1 + 1 \Rightarrow$$
$$3 = 2 + 1 \Rightarrow$$
$$3 = 3 \text{ το οποίο ισχύει!!}$$

- ➢ Η **γραφική παράσταση** της συνάρτησης y = αx είναι μια ευθεία που <u>διέρχεται από την αρχή Ο των αξόνων.</u>

Η ευθεία y = αx βρίσκεται:

- ❖ Στο 1^{ο} και στο 3^{ο} τεταρτημόριο όταν α>0
- ❖ Στο 2^{ο} και στο 4^{ο} τεταρτημόριο όταν α<0



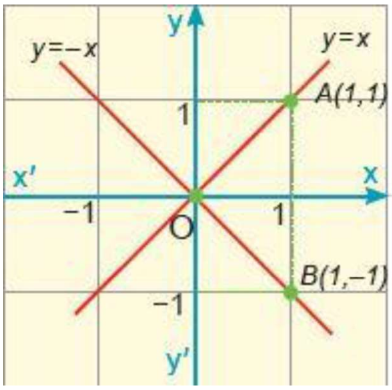


- ➢ Σε μια ευθεία y = αx ο λόγος $\frac{y}{x}$ είναι πάντα σταθερός και ίσος με α. Δηλαδή:

$$y = \alpha x \quad ή \quad \frac{y}{x} = \alpha \quad \text{για } x \neq 0$$

*Ο λόγος αυτός, δηλαδή ο αριθμός α, λέγεται **<u>κλίση</u>** της ευθείας y = αx.*

Οι ευθείες y = x και y = -x

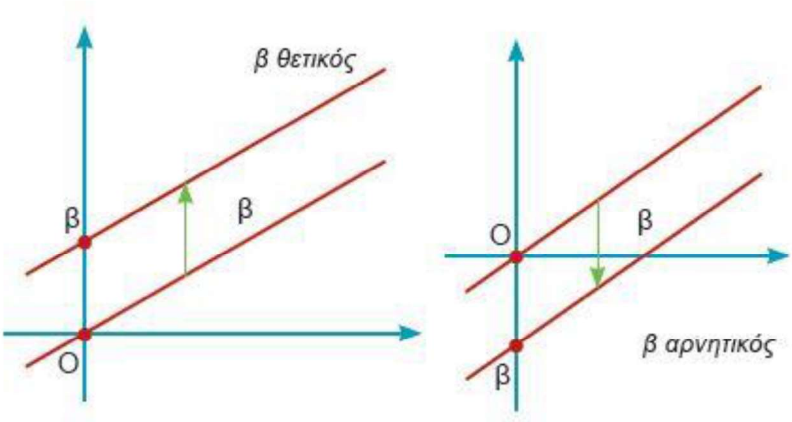


- Η ευθεία **y = x** είναι η <u>διχοτόμος</u> της 1ης και 3ης γωνίας των αξόνων.
- Η ευθεία **y = -x** είναι η <u>διχοτόμος</u> της 2ης και 4ης γωνίας των αξόνων.
- Ο άξονας x'x είναι και αυτός μια ευθεία που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και έχει εξίσωση:

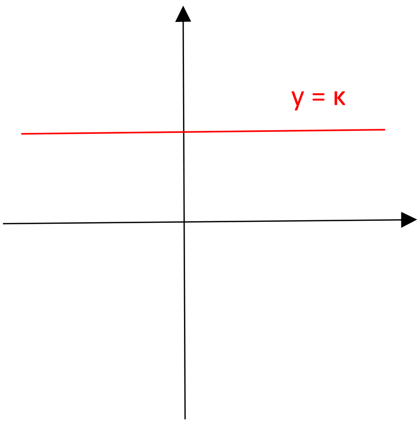
$$y = 0 \cdot x \quad ή \quad y = 0$$

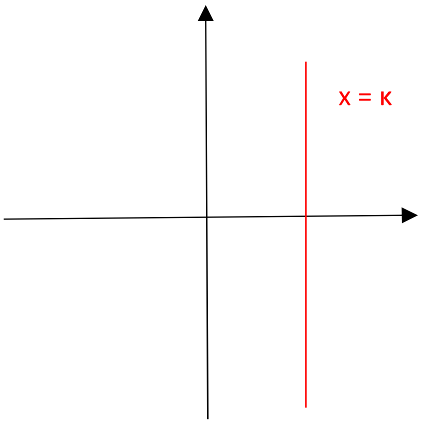
3.4 Η συνάρτηση y = αx + β

- Η γραφική παράσταση της συνάρτησης **y = αx + β**, με β ≠ 0, είναι μια ευθεία παράλληλη στην ευθεία y = αx, η οποία διέρχεται από το σημείο του άξονα y'y με τεταγμένη β.
- Η ευθεία y = αx + β έχει **κλίση** ίση με τον αριθμό **α**.



- Μια ευθεία της μορφής y = κ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα x'x που τέμνει τον άξονα y'y στο σημείο με τεταγμένη κ.
- Μια ευθεία της μορφής x = κ παριστάνει ευθεία παράλληλη στον άξονα y'y που τέμνει τον άξονα x'x στο σημείο με τετμημένη κ.





*Δυο ευθείες είναι **παράλληλες** όταν έχουν **ίδια κλίση** και αντίστροφα.*

Σημεία τομής της ευθείας με τους άξονες

Η ευθεία **y = αx + β**, δεν διέρχεται από την αρχή των αξόνων, επόμενως **τέμνει τους άξονες** x'x και y'y στα εξής σημεία:

- Τον **x'x** στο σημείο με συντεταγμένες **A(x,0)**. Για να το βρω, πηγαίνω στην εξίσωση της ευθείας και βάζω y = 0.
- Τον **y'y** στο σημείο με συντεγμένες **B(0,y)** *[Πιο συγκεκριμένα στο (0,β)]*. Για να το βρω, πηγαίνω στην εξίσωση της ευθείας και βάζω x = 0.

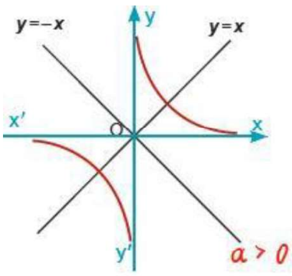
3.5 Η συνάρτηση της μορφής $y = \frac{\alpha}{x}$ – Η Υπερβολή

Δύο ποσά είναι **αντιστρόφως ανάλογα** αν κάθε φορά που πολλαπλασιάζουμε μια τιμή του ενός ποσού με έναν αριθμό, η αντίστοιχη τιμή του άλλου ποσού διαιρείται με τον ίδιο αριθμό.

Όταν δύο ποσά είναι αντιστρόφως ανάλογα, **το γινόμενο των αντίστοιχων τιμών** τους παραμένει **σταθερό**.

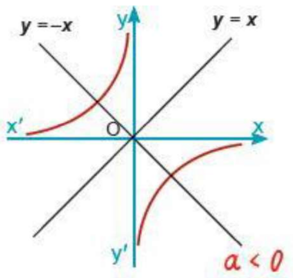
Αν α ≠ 0 είναι σταθερό γινόμενο των ποσών x και y, τότε ισχύει:

$$\mathbf{x \cdot y = \alpha} \quad \text{ή} \quad \mathbf{y = \frac{\alpha}{x}}$$



Η γραφική παράσταση της συνάρτησης $y = \frac{\alpha}{x}$, όπου α ≠ 0 λέγεται **υπερβολή** και αποτελείται **από δύο κλάδους** που βρίσκονται:
– Στο **1ο** και στο **3ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν **α > 0**.
– Στο **2ο** και στο **4ο** τεταρτημόριο των αξόνων, όταν **α < 0**.

Και στις δύο περιπτώσεις η γραφική παράσταση μιας υπερβολής έχει:
– **Κέντρο συμμετρίας την αρχή Ο των αξόνων.**
– **Άξονες συμμετρίας τις διχοτόμους των γωνιών των αξόνων, δηλαδή τις ευθείες με εξισώσεις y = x και y = –x.**



4.1 Βασικές έννοιες της Στατιστικής: Πληθυσμός – Δείγμα

Το ποσοστό α% είναι ένα κλάσμα με αριθμητή α και παρονομαστή 100. Δηλαδή:

$$\alpha\% = \frac{\alpha}{100}$$

1) Ένα σύνολο του οποίου τα στοιχεία θέλουμε να μελετήσουμε ως προς κάποιο χαρακτηριστικό λέγεται **πληθυσμός** και το χαρακτηριστικό ως προς το οποίο μελετάμε τον πληθυσμό ονομάζεται **μεταβλητή**.
2) Η διαδικασία με την οποία, μελετώντας έναν πληθυσμό, εξετάζουμε ένα προς ένα όλα τα άτομα του πληθυσμού, λέγεται **απογραφή**.
3) Πολλές φορές, αντί να μελετήσουμε ολόκληρο τον πληθυσμό, μελετούμε μια μικρή ομάδα αυτού. Η ομάδα αυτή λέγεται δείγμα. Το πλήθος των ατόμων που αποτελούν το δείγμα ονομάζεται μέγεθος του δείγματος. Για να είναι ακριβή τα συμπεράσματα ενός δείγματος, θα πρέπει η επιλογή του να γίνει με σωστό τρόπο, δηλαδή το δείγμα να είναι **αντιπροσωπευτικό**.
4) Η επιλογή του δείγματος και η μελέτη του, λέγεται **δειγματοληψία**.

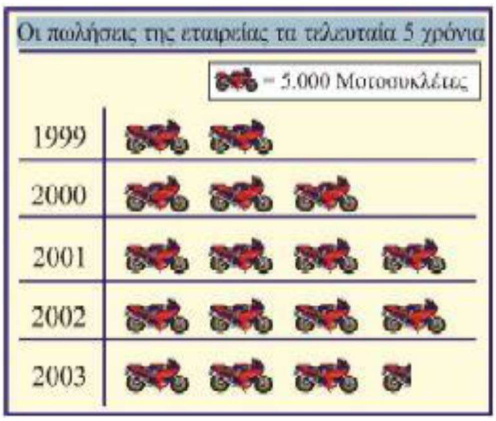
4.2 Γραφικές Παραστάσεις

Στατιστική είναι ο κλάδος των Μαθηματικών που ασχολείται με τη συγκέντρωση στοιχείων, την ταξινόμησή τους και την παρουσίαση τους με κατάλληλη μορφή έτσι ώστε να μπορούν να αναλυθούν και να ερμηνευτούν για να εξαγάγουμε χρήσιμα συμπεράσματα τα οποία μας εξυπηρετούν σε διάφορους σκοπούς.

Διαγράμματα λέγονται οι εικόνες που παρουσιάζουν με σύντομο και παραστατικό τρόπο ένα σύνολο αριθμητικών πληροφοριών.
Οι πληροφορίες παρουσιάζονται από τα διαγράμματα κατά τέτοιο τρόπο ώστε να μας βοηθήσουν να αντιληφθούμε σύντομα ένα θέμα χωρίς να μπούμε σε λεπτομέρειες.
Βασικές μορφές διαγραμμάτων είναι:

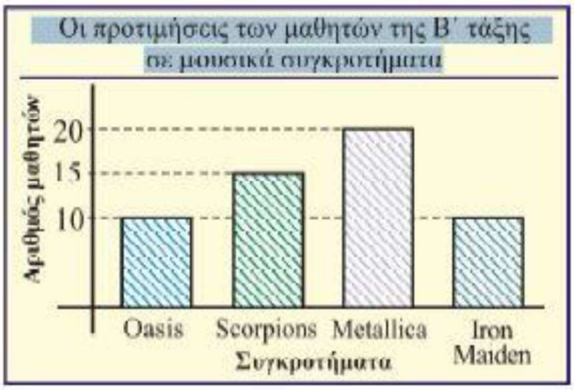
- Τα εικονογράμματα
- Τα ραβδογράμματα
- Τα κυκλικά διαγράμματα
- Τα χρονογράμματα

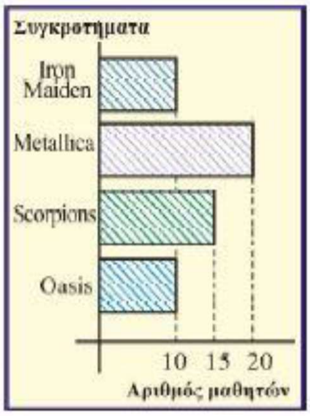
Εικονογράμματα είναι τα διαγράμματα όπου οι πληροφορίες δίνονται με την επανάληψη μιας εικόνας που χρησιμοποιείται σαν κλίμακα. Μειονέκτημα τους είναι ότι χρειάζονται αρκετό χρόνο και δεξιοτεχνία για να σχεδιαστούν και κυρίως όταν θέλουμε να παραστήσουμε ένα μέρος της κλίμακας (εικόνας).

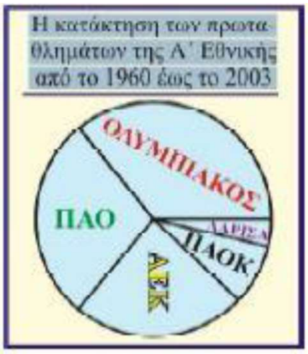


Χρονογράμματα είναι τα διαγράμματα που χρησιμοποιούμε για να παραστήσουμε την εξέλιξη ενός φαινομένου σε διάφορες χρονικές στιγμές (που συνήθως ισαπέχουν).

Ραβδογράμματα είναι τα διαγράμματα που οι πληροφορίες δίνονται με κατακόρυφα (ή οριζόντια) ορθογώνια. Γενικά σχεδιάζονται εύκολα και είναι πιο ακριβή από τα εικονογράμματα.







Κυκλικά διαγράμματα είναι τα διαγράμματα που οι πληροφορίες για τα διάφορα μέρη ενός μεγέθους ή ποσού δίνονται με «κομμάτια μιας ολόκληρης πίτας» η οποία συμβολίζει ολόκληρο το μέγεθος.

4.5 Μέση Τιμή - Διάμεσος

Μέσος όρος ή μέση τιμή

Για να βρούμε τον **μέσο όρο** ή **μέση τιμή** ενός συνόλου παρατηρήσεων, προσθέτουμε όλες τις παρατηρήσεις και διαιρούμε με το πλήθος των παρατηρήσεων αυτών. Δηλαδή:

$$\text{Μέση τιμή} = \frac{\text{άθροισμα των παρατηρήσεων}}{\text{πλήθος των παρατηρήσεων}}$$

Διάμεσος

Για να βρούμε τη **διάμεσο** ν παρατηρήσεων, εργαζόμαστε ως εξής:

- Πρώτα διατάσσουμε τις παρατηρήσεις κατά σειρά μεγέθους.
- Στη συνέχεια παρατηρούμε ότι:
  - Αν το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι περιττό, τότε υπάρχει μία «μεσαία» παρατήρηση η οποία θα χωρίζει όλες τις άλλες σε δύο ισοπληθείς ομάδες. Η «μεσαία» αυτή παρατήρηση είναι η διάμεσος των ν παρατηρήσεων.
  - Αν το πλήθος ν των παρατηρήσεων είναι άρτιο, τότε θα υπάρχουν δύο παρατηρήσεις που θα χωρίζουν όλες τις άλλες σε δύο ισοπληθείς ομάδες. Το ημιάθροισμα των δύο αυτών παρατηρήσεων είναι ή διάμεσος των ν παρατηρήσεων.

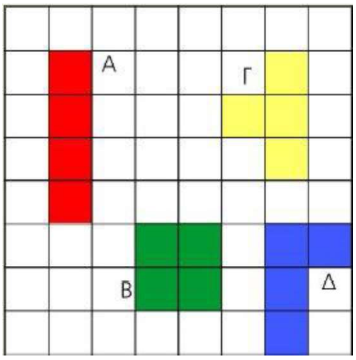
Μέση τιμή από πίνακα κατανομής συχνοτήτων

Όταν τα δεδομένα μας παρουσιάζονται σε έναν πίνακα κατανομής συχνοτήτων, για να βρούμε τη μέση τιμή τους, εργαζόμαστε ως εξής:

- Πολλαπλασιάζουμε κάθε τιμή με τη συχνότητά της.
- Προσθέτουμε όλα τα γινόμενα που βρήκαμε.
- Διαιρούμε το παραπάνω άθροισμα με το άθροισμα των συχνοτήτων.

1.1 Εμβαδόν επίπεδης επιφάνειας

Το **εμβαδόν** μιας επίπεδης επιφάνειας είναι ένας θετικός αριθμός, ο οποίος εκφράζει την «έκταση» που καταλαμβάνει η επιφάνεια στο επίπεδο.
Ο αριθμός αυτός **εξαρτάται από τη μονάδα μέτρησης επιφανειών που χρησιμοποιούμε** και προκύπτει συγκρίνοντας την επιφάνεια την οποία θέλουμε να μετρήσουμε με την επιφάνεια που επιλέξαμε ως μονάδα μέτρησης.



1.2 Μονάδες μέτρησης επιφανειών

Έστω ένα τετράγωνο με πλευρά 1m. Το εμβαδόν του τετραγώνου αυτού λέγεται τετραγωνικό μέτρο και συμβολίζουμε 1 m^2. Το τετραγωνικό μέτρο είναι η βασική μονάδα μέτρησης εμβαδού.

<u>Υποδιαιρέσεις του τετραγωνικού μέτρου</u>

<u>Τετραγωνικό δεκατόμετρο</u> *<u>Τετραγωνικό εκατοστόμετρο</u>* *<u>Τετραγωνικό χιλιοστόμετρο</u>*

$$(dm^2): 1dm^2 = \frac{1}{100}m^2 \qquad (cm^2): 1cm^2 = \frac{1}{10.000}m^2 \qquad (mm^2): 1mm^2 = \frac{1}{1.000.000}m^2$$

1 m^2 =	100 dm^2 =	10.000 cm^2 =	1.000.000 mm^2
	1 dm^2 =	100 cm^2 =	10.000 mm^2
		1 cm^2 =	100 mm^2

1 mm^2 =	0,01 cm^2 =	0,0001 dm^2 =	0,000001 m^2
	1 cm^2 =	0,01 dm^2 =	0,0001 m^2
		1 dm^2 =	0,01 m^2

<u>Πολλαπλάσια του τετραγωνικού μέτρου</u>

<u>Τετραγωνικό χιλιόμετρο</u>

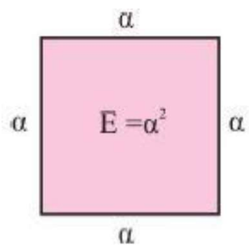
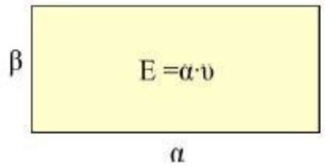
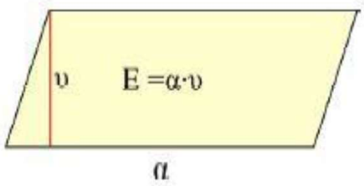
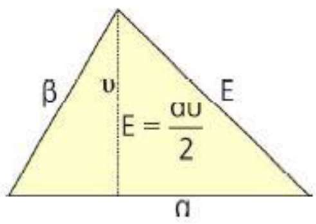
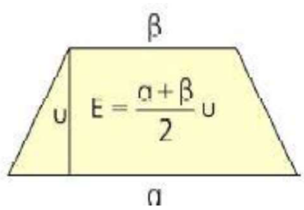
1 Km^2 = 1.000.000 m^2 ή 1 $m^2 = \frac{1}{1.000.000}$ Km^2

<u>Το στρέμμα</u>

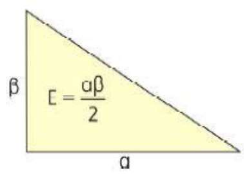
1 στρέμμα = 1.000 m^2

1.3 Εμβαδά επίπεδων σχημάτων

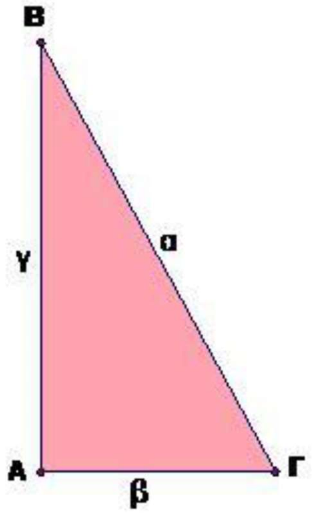
Για να συμβολίσουμε το **εμβαδόν** ενός επίπεδου σχήματος, μπορούμε να το γράφουμε μέσα σε μια παρένθεση. Για παράδειγμα, <u>το εμβαδόν του τετράπλευρου ΑΒΓΔ συμβολίζεται με (ΑΒΓΔ).</u>

Επίπεδο σχήμα	Τύπος Εμβαδού	Σχήμα
Τετράγωνο *(με πλευρά α)*	$E = \alpha^2$	
Ορθογώνιο *(με πλευρές α & β)*	$E = \alpha \cdot \beta$	
Παραλληλόγραμμο *(με βάση β και ύψος υ)*	$E = \beta \cdot \upsilon$	
Τρίγωνο *(με βάση β μια πλευρά του και ύψος υ το αντίστοιχο στην πλευρά ύψος)*	$E = \dfrac{\beta \cdot \upsilon}{2}$	
Τραπέζιο *(με βάσεις Β & β και ύψος υ)*	$E = \dfrac{(B+\beta)\cdot\upsilon}{2}$	

- Η διάμεσος ενός τριγώνου χωρίζει το τρίγωνο σε δύο τρίγωνα που έχουν ίσα εμβαδά.
- Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο, το εμβαδόν ισούται με το μισό του γινομένου των δυο καθέτων πλευρών.



1.4 Πυθαγόρειο Θεώρημα



Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο, το τετράγωνο της υποτείνουσας, ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο καθέτων πλευρών.

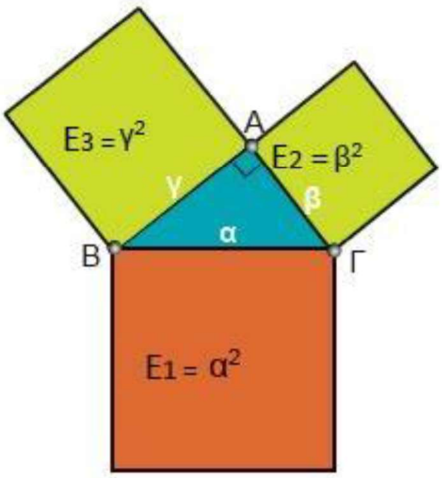
Δηλαδή σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ (Α = 90°), ισχύει:

$\boxed{ΒΓ^2 = ΑΓ^2 + ΑΒ^2}$ ή $\boxed{α^2 = β^2 + γ^2}$

Γεωμετρική ερμηνεία του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Το τρίγωνο ΑΒΓ του διπλανού σχήματος είναι ορθογώνιο. Εξωτερικά του τριγώνου έχουμε σχεδιάσει τρία τετράγωνα. Ισχύει ότι $E_1 = α^2$, $E_2 = β^2$ και $E_3 = γ^2$. Σύμφωνα με το Πυθαγόρειο Θεώρημα είναι:

$\boxed{α^2 = β^2 + γ^2}$ ή $\boxed{E_1 = E_2 + E_3}$



Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος

Αν σε ένα τρίγωνο, το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με το άθροισμα των τετραγώνων των δύο άλλων πλευρών, τότε η γωνία που βρίσκεται απέναντι από τη μεγαλύτερη πλευρά είναι ορθή.

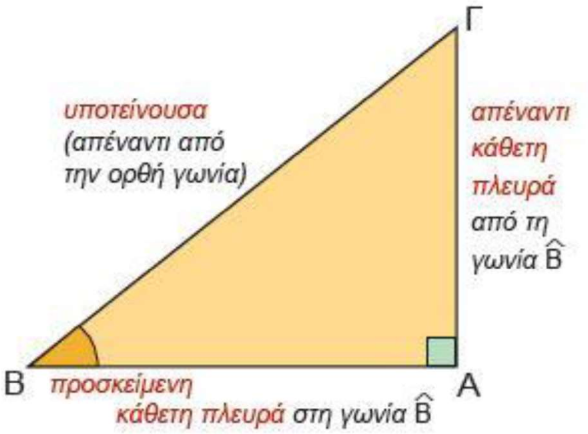
2.1 Εφαπτομένη οξείας γωνίας

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με:

$\hat{A} = 90^o$

Λέμε ότι:

- Η κάθετη πλευρά ΑΓ ονομάζεται «απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{B}$»
- Η κάθετη πλευρά ΑΒ ονομάζεται «προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{B}$»



Επίσης:

- Η πλευρά ΑΒ ονομάζεται «απέναντι κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{Γ}$»
- Η πλευρά ΑΓ ονομάζεται «προσκείμενη κάθετη πλευρά της γωνίας $\hat{Γ}$»

Εφαπτομένη οξείας γωνίας ορθογωνίου τριγώνου

Ονομάζουμε **εφαπτομένη** της οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου, και τη συμβολίζουμε **εφω**, τον λόγο της απέναντι κάθετης πλευράς προς την προσκείμενη κάθετη πλευρά.

$$εφω = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}$$

Άρα στο παραπάνω σχήμα έχουμε:

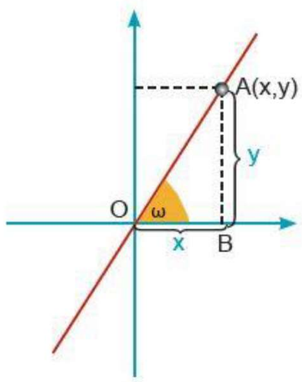
$$εφ\hat{B} = \frac{AΓ}{AB} = \frac{β}{γ} \qquad εφ\hat{Γ} = \frac{AB}{AΓ} = \frac{γ}{β}$$

Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ, με Α = 90^o , οι εφαπτομένες των οξειών γωνιών του Β και Γ είναι αντίστροφοι αριθμοί, δηλαδή:

$$εφB \cdot εφΓ = 1$$

- *__Η **κλίση** της ευθείας y = αx είναι ίση με την εφαπτομένη της γωνίας ω που σχηματίζει η ευθεία με τον άξονα x΄x.__*

$$εφω = \frac{AB}{OB} = \frac{y}{x} = α$$



2.2 Ημίτονο και Συνημίτονο οξείας γωνίας

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την απέναντι κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **ημίτονο της γωνίας ω.**

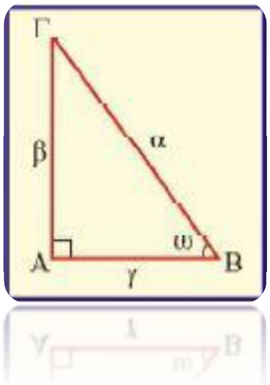
$$\text{ημω} = \frac{\text{απέναντι κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

Ο λόγος που σχηματίζεται, αν διαιρέσουμε την προσκείμενη κάθετη πλευρά μίας οξείας γωνίας ω ενός ορθογωνίου τριγώνου με την υποτείνουσα, είναι πάντοτε σταθερός και λέγεται **συνημίτονο της γωνίας ω.**

$$\text{συνω} = \frac{\text{προσκείμενη κάθετη πλευρά}}{\text{υποτείνουσα}}$$

$$\text{ημω} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{β}{α} \quad \left(\frac{\text{απέναντι κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$

$$\text{συνω} = \frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}} = \frac{γ}{α} \quad \left(\frac{\text{προσκείμενη κάθετη}}{\text{υποτείνουσα}}\right)$$



Σχέση ημιτόνου-συνημίτονου-εφαπτομένης γωνίας

Αν διαιρέσουμε το ημω της γωνίας ω, με το συνω της ω παρατηρούμε ότι:

$$\frac{\text{ημω}}{\text{συνω}} = \frac{\frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΒΓ}}}{\frac{\text{ΑΒ}}{\text{ΒΓ}}} = \frac{\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}} = \text{εφω}$$

Επομένως προκύπτει ότι:

$$\text{εφω} = \frac{\text{ημω}}{\text{συνω}}$$

❖ *Γενικά για μια οξεία γωνία ω ισχύει ότι:*

$$0 < \text{ημω} < 1 \quad \text{και} \quad 0 < \text{συνω} < 1$$

2.4 Οι τριγωνομετρικοί αριθμοί των γωνιών 30^o, 45^o και 60^o

ω	30°	45°	60°
ημω	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$
συνω	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$
εφω	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	1	$\sqrt{3}$

Οι υπολογισμοί των τριγωνομετρικών αριθμών βρίσκονται στο τετράδιο θεωρίας!!

Ύψος και εμβαδόν ισόπλευρου τριγώνου

Το **ύψος υ** και το **εμβαδόν Ε** ενός **ισόπλευρου τριγώνου πλευράς α** δίνονται αντίστοιχα από τους τύπους:

$$\upsilon = \frac{\alpha\sqrt{3}}{2} \quad \text{και} \quad E = \frac{\alpha^2\sqrt{3}}{4}$$