



ΟΡΙΣΜΟΙ

- **Αλγεβρική Παράσταση**
Αλγεβρική παράσταση ονομάζεται μια μαθηματική έκφραση (παράσταση) η οποία περιέχει μεταβλητές.
- **Ακέραια Αλγεβρική Παράσταση**
Ακέραια αλγεβρική παράσταση ονομάζεται μια αλγεβρική παράσταση, όταν μεταξύ των μεταβλητών σημειώνονται μόνο οι πράξεις της πρόσθεσης και του πολλαπλασιασμού και οι εκθέτες των μεταβλητών της είναι φυσικοί αριθμοί.
- **Αριθμητική Τιμή**
Αριθμητική τιμή μιας αλγεβρικής παράστασης ονομάζεται το αποτέλεσμα που προκύπτει αν στη θέση των μεταβλητών θέσουμε κάποιον αριθμό και κάνουμε τις πράξεις.
- **Μονώνυμο**
Μονώνυμο ονομάζεται μια ακέραια αλγεβρική παράσταση στην οποία υπάρχει μόνον η πράξη του πολλαπλασιασμού.
 - ▶ Ένα μονώνυμο αποτελείται από το **συντελεστή**, δηλαδή το κομμάτι εκείνο που περιέχει τον αριθμό και το **κύριο μέρος**, το κομμάτι εκείνο που περιέχει τις μεταβλητές.
- **Βαθμός Μονώνυμου**
Βαθμός ενός μονώνυμου, ως προς μια μεταβλήτη, ονομάζεται ο εκθέτης της μεταβλητής αυτής. Βαθμός ως προς όλες τις μεταβλητές ονομάζεται το άθροισμα όλων των εκθετών.

- **Όμοια Μονώνυμα**
Όμοια ονομάζονται τα μονώνυμα εκείνα που έχουν το ίδιο κύριο μέρος.
- **Ίσα Μονώνυμα**
Ίσα ονομάζονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν τον ίδιο συντελεστή.
- **Αντίθετα Μονώνυμα**
Αντίθετα ονομάζονται τα όμοια μονώνυμα που έχουν αντίθετους συντελεστές.

- **Σταθερό Μονώνυμο**
Κάθε πραγματικός αριθμός θεωρείται μονώνυμο μηδενικού βαθμού. Ειδικότερα, για τον αριθμό μηδέν, λέγεται μηδενικό μονώνυμο και δεν ορίζεται βαθμός.
- **Πολυώνυμο**
Πολυώνυμο ονομάζεται η αλγεβρική παράσταση που προκύπτει εάν προσθέσουμε μονώνυμα που δεν είναι μεταξύ τους όμοια.
- **Βαθμός Πολυώνυμου**
Βαθμός ενός πολυωνύμου ως προς μια ή περισσότερες μεταβλητές του είναι ο μεγαλύτερος από τους βαθμούς των όρων του, ως προς τις μεταβλητές αυτές.
- **Ίσα Πολυώνυμα**
Δυο πολυώνυμα λέγονται ίσα όταν οι όροι τους είναι ίσα μονώνυμα.
- **Σταθερό Μονώνυμο**
Κάθε πραγματικός αριθμός θεωρείται μονώνυμο μηδενικού βαθμού. Ειδικότερα, για τον αριθμό μηδέν, τον ονομάζουμε μηδενικό μονώνυμο και δεν ορίζεται βαθμός.

- **Ταυτότητα**
Ταυτότητα ονομάζεται μια ισότητα που περιέχει μεταβλητές και επαληθεύεται για όλες τις τιμές των μεταβλητών αυτών.

- **Παραγοντοποίηση**
Παραγοντοποίηση ονομάζεται η διαδικασία με την οποία μετατρέπουμε μια παράσταση από άθροισμα σε γινόμενο.
- **Ρητή Αλγεβρική Παράσταση**
Ρητή ονομάζεται μια αλγεβρική παράσταση που είναι κλάσμα και οι όροι της είναι πολυώνυμα.

ΑΞΙΟΣΗΜΕΙΩΤΕΣ ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ

1. Τετράγωνο Αθροίσματος

$$(\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

2. Τετράγωνο Διαφοράς

$$(\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

3. Διαφορά Τετραγώνων

$$(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

4. Κύβος Αθροίσματος

$$(\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

5. Κύβος Διαφοράς

$$(\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

6. Άθροισμα Κύβων

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)(\alpha^2 - \alpha\beta + \beta^2)$$

7. Διαφορά Κύβων

$$\alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

8. Τριώνυμο

$$x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

Αποδείξεις Ταυτοτήτων

Για να αποδείξουμε τις πέντε γνωστές ταυτότητες ξεκινάμε από το ένα μέλος της εξίσωσης και εκτελούμε τις πράξεις μέχρι να καταλήξουμε στο άλλο μέλος.

$$1. \quad (\alpha + \beta)^2 = \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^2 &= \\ (\alpha + \beta)(\alpha + \beta) &= \\ \alpha^2 + \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 &= \\ \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 & \end{aligned}$$

(Επιμεριστική ιδιότητα)
(Αναγωγή ομοίων όρων)

$$2. \quad (\alpha - \beta)^2 = \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2$$

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^2 &= \\ (\alpha - \beta)(\alpha - \beta) &= \\ \alpha^2 - \alpha\beta - \beta\alpha + \beta^2 &= \\ \alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2 & \end{aligned}$$

(Επιμεριστική)
(Αναγωγή)

$$3. \quad (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) = \alpha^2 - \beta^2$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(\alpha - \beta) &= \\ \alpha^2 - \alpha\beta + \beta\alpha + \beta^2 &= \\ \alpha^2 - \beta^2 & \end{aligned}$$

(Επιμεριστική)
(Αναγωγή)

$$4. \quad (\alpha + \beta)^3 = \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3$$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)^3 &= \\ (\alpha + \beta)(\alpha + \beta)^2 &= \\ (\alpha + \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) &= \\ \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 + \beta^3 &= \\ \alpha^3 + 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 + \beta^3 & \end{aligned}$$

(Ταυτότητα)
(Επιμεριστική)
(Αναγωγή)

$$5. \quad (\alpha - \beta)^3 = \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3$$

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)^3 &= \\ (\alpha - \beta)(\alpha - \beta)^2 &= \\ (\alpha - \beta)(\alpha^2 - 2\alpha\beta + \beta^2) &= \\ \alpha^3 - 2\alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 + 2\alpha\beta^2 - \beta^3 &= \\ \alpha^3 - 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 - \beta^3 & \end{aligned}$$

(Ταυτότητα)
(Επιμεριστική)
(Αναγωγή)

$$6. \quad \alpha^3 + \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= \\ \alpha^3 - \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 + \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 + \beta^3 &= \\ \alpha^3 + \beta^3 & \end{aligned}$$

(Επιμεριστική)
(Αναγωγή)

$$7. \quad \alpha^3 - \beta^3 = (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2)$$

$$\begin{aligned} (\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) &= \\ \alpha^3 + \alpha^2\beta + \alpha\beta^2 - \beta\alpha^2 - \alpha\beta^2 - \beta^3 &= \\ \alpha^3 - \beta^3 & \end{aligned}$$

(Επιμεριστική)
(Αναγωγή)

$$8. \quad x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha\beta = (x + \alpha)(x + \beta)$$

$$x^2 + \alpha x + \beta x + \alpha\beta = x^2 + x\beta + \alpha x + \alpha\beta$$

(Πράξεις & στα 2 μέλη)