

Ε ξ ί σ ω σ η 2^{ο υ} β α θ μ ο ύ

Ορισμοί - παρατηρήσεις

1. Κάθε πολυώνυμο που μετά από αναγωγή ομοίων όρων και διάταξη κατά τις φθίνουσες δυνάμεις του x έχει πάρει την μορφή $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί και $\alpha \neq 0$ λέγεται **τριώνυμο 2^{ου} βαθμού**.

Παράδειγμα: $3x^2 + 5x - 12$, εδώ έχω $\alpha = 3$, $\beta = 5$ και $\gamma = -12$
(α συντελεστής του x^2 , β συντελεστής του x και γ ο σταθερός όρος)

2. Έστω $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ τριώνυμο, αν στη θέση της μεταβλητής x αντικαταστήσω κάποιο αριθμό ρ η παράσταση θα πάρει τη μορφή αριθμητικής παράστασης $P(\rho) = \alpha \rho^2 + \beta \rho + \gamma$ και αν εκτελέσω τις πράξεις ο αριθμός που θα βρω λέγεται αριθμητική τιμή.

Παράδειγμα:

$P(x) = 2x^2 - x - 6$ για $x = 1$ έχω $P(1) = 2 \cdot 1^2 - 1 - 6 = 2 - 1 - 6 = -5$, παρατηρώ όμως για $x = 2$ $P(2) = 2 \cdot 2^2 - 2 - 6 = 8 - 2 - 6 = 0$

Θα λέμε ρίζα του τριωνύμου $P(x)$ κάθε πραγματικό αριθμό ρ για τον οποίο ισχύει **$P(\rho) = 0$** . (δηλαδή δίνει τιμή μηδέν)

3. Θα λέμε εξίσωση 2^{ου} βαθμού κάθε παράσταση της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma = 0$ όπου α, β, γ πραγματικοί αριθμοί με $\alpha \neq 0$ και **ρίζα ή λύση** κάθε πραγματικό αριθμό ρ που αληθεύει την ισότητα **$\alpha \rho^2 + \beta \rho + \gamma = 0$** (σωστή).

Παράδειγμα: $2x^2 - x - 6 = 0$ είναι μία εξίσωση β' βαθμού

για $x = 1$ έχω $1^2 - 1 - 6 = 2 - 1 - 6 = -5$ Λάθος

για $x = 2$ έχω $2 \cdot 2^2 - 2 - 6 = 8 - 2 - 6 = 0$ Σωστή

άρα το 2 είναι μία ρίζα της εξίσωσης.

4. Στην εξίσωση 2^{ου} βαθμού οι συντελεστές β, γ σαν πραγματικοί αριθμοί δεν αποκλείεται να είναι και μηδέν και προκύπτουν εξισώσεις με **ελλιπή μορφή**.

για $\beta = 0$ $\alpha x^2 + \gamma = 0$

για $\gamma = 0$ $\alpha x^2 + \beta x = 0$

για $\beta = 0$ & $\gamma = 0$ $\alpha x^2 = 0$

Λύση της 2ο/βάθμιας εξίσωσης

1. Μορφή $ax^2 + \gamma = 0$

$$ax^2 + \gamma = 0 \Leftrightarrow ax^2 = -\gamma \Leftrightarrow x^2 = \frac{-\gamma}{a}$$

α) αν το κλάσμα $\frac{-\gamma}{a}$ **θετικό** η εξίσωση έχει δύο λύσεις τις $+\sqrt{\frac{-\gamma}{a}}$ και $-\sqrt{\frac{-\gamma}{a}}$

β) αν το κλάσμα $\frac{-\gamma}{a}$ **αρνητικό** η εξίσωση δεν έχει δύο λύσεις (**Αδύνατη**).

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $2x^2 - 18 = 0$ ii) $3x^2 + 6 = 0$

ΛΥΣΗ

i) έχουμε $2x^2 = 18 \Leftrightarrow x^2 = \frac{18}{2} \Leftrightarrow x^2 = 9 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{9} = \pm 3$ δύο αντίθετες λύσεις

ii) όμοια $3x^2 = -6 \Leftrightarrow x^2 = \frac{-6}{3} = -2 < 0$ **ΑΔΥΝΑΤΗ**

2. Μορφή $ax^2 + \beta x = 0$ έχει πάντα λύση την:

$$ax^2 + \beta x = 0 \Leftrightarrow x(ax + \beta) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } ax + \beta = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -\frac{\beta}{a}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

2. Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $2x^2 + 18x = 0$ ii) $3x^2 - 6x = 0$

ΛΥΣΗ

i) έχουμε $x \cdot (2x + 18) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 2x + 18 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 2x = -18 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = -9$

ii) όμοια $x \cdot (3x - 6) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 3x - 6 = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } 3x = 6 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ή } x = 2$

πάντα δύο λύσεις με σίγουρη το 0 (μηδέν)

3. Μορφή $ax^2 = 0$ έχει πάντα λύση την $x = 0$

4. Γενική μορφή $ax^2 + \beta x + \gamma = 0$, $a \neq 0$

Βήμα 1^ο Βρίσκω την τιμή της παράτασης $\Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma$ που ονομάζεται **διακρίνουσα** της εξίσωσης.

Βήμα 2^ο Συγκρίνω την διακρίνουσα Δ με το μηδέν:

i. αν $\Delta < 0$ (**αρνητική**) η εξίσωση δεν έχει πραγματικές ρίζες – **Αδύνατη**

ii. αν $\Delta = 0$ η εξίσωση έχει **μία** διπλή ρίζα την $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$

iii. αν $\Delta > 0$ (Θετική) η εξίσωση έχει **δύο διαφορετικές πραγματικές ρίζες** που δίνονται από τον τύπο $\rho_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha}$, όπου Δ η διακρίνουσα

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Να λυθούν οι εξισώσεις: i) $2x^2 - 10x + 12 = 0$

ii) $3x^2 - x + 1 = 0$

ΛΥΣΗ

$$\text{i) έχουμε: } \begin{cases} \alpha = 2 \\ \beta = -10 \\ \gamma = 12 \end{cases} \text{ Έτσι } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-10)^2 - 4 \cdot 2 \cdot 12 = 100 - 96 = 4 > 0$$

Άρα οι ρίζες της εξίσωσης είναι:

$$x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{10 \pm \sqrt{4}}{2 \cdot 2} = \frac{10 \pm 2}{4} \begin{cases} \rightarrow 12/4 = 3 \\ \rightarrow 8/4 = 2 \end{cases}$$

$$\text{ii) έχουμε: } \begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -1 \\ \gamma = 1 \end{cases} \text{ Έτσι } \Delta = \beta^2 - 4\alpha\gamma = (-1)^2 - 4 \cdot 3 \cdot 1 = -11 < 0$$

Άρα η εξίσωση είναι **αδύνατη**.

5. Παραγοντοποίηση του τριωνύμου $ax^2 + bx + \gamma$, $a \neq 0$

Εργάζομαι όπως παραπάνω και βρίσκω τις ρίζες του τριωνύμου:

- αν $\Delta < 0$ δεν έχει ρίζες - **Δεν παραγοντοποιείται**.
- αν $\Delta = 0$ έχει **μία** διπλή ρίζα την $\rho = \frac{-\beta}{2\alpha}$, το τριώνυμο είναι τέλειο τετράγωνο και ισχύει: $ax^2 + bx + \gamma = a \cdot (x - \rho)^2$.
- αν $\Delta > 0$ έχει **δύο ρίζες διαφορετικές** και ισχύει: $ax^2 + bx + \gamma = a(x - \rho_1)(x - \rho_2)$.

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Να παραγοντοποιηθεί η παράσταση $2x^2 - 3x + 1$.

ΛΥΣΗ

$$\text{Έχουμε } \Delta = (-3)^2 - 4 \cdot 2 = 1 > 0 \text{ άρα οι ρίζες είναι } x_{1,2} = \frac{-\beta \pm \sqrt{\Delta}}{2\alpha} = \frac{-(-3) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 2} = \frac{3 \pm 1}{4} = \begin{cases} \rightarrow 1 \\ \rightarrow \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\text{Άρα } 2x^2 - 3x + 1 = 2 \left(x - \frac{1}{2} \right) (x - 1) = (2x - 1)(x - 1).$$