

Τετραγωνική Ρίζα Θετικού Αριθμού

1) Ορισμός : Τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού a ονομάζουμε τον επίσης θετικό αριθμό τον οποίο αν τον υψώσουμε εις το τετράγωνό του δίνει a . Η τετραγωνική ρίζα του a συμβολίζεται με $\sqrt{a}$.
Επειδή $0^2 = 0$, ορίζουμε $\sqrt{0} = 0$

2) Πώς Βρίσκουμε την τετραγωνική ενός θετικού ακεραίου;

Θέλω π.χ. να βρώ την $\sqrt{a}$, τότε κάνω την ερώτηση : // Ποιός αριθμός εαν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του μου κάνει a ; //

π.χ. $\sqrt{64}$, θα ρωτήσω ποιός αριθμός αν πολλαπλασιαστεί με τον εαυτό του μου κάνει 64;

Απ. Το 8

3) Γνωστές Τετραγωνικές Ρίζες

$$0^2 = 0 \cdot 0 = 0 \Rightarrow \sqrt{0} = 0$$

$$1^2 = 1 \cdot 1 = 1 \Rightarrow \sqrt{1} = 1$$

$$2^2 = 2 \cdot 2 = 4 \Rightarrow \sqrt{4} = 2$$

$$3^2 = 3 \cdot 3 = 9 \Rightarrow \sqrt{9} = 3$$

$$4^2 = 4 \cdot 4 = 16 \Rightarrow \sqrt{16} = 4$$

$$5^2 = 5 \cdot 5 = 25 \Rightarrow \sqrt{25} = 5$$

$$6^2 = 6 \cdot 6 = 36 \Rightarrow \sqrt{36} = 6$$

$$7^2 = 7 \cdot 7 = 49 \Rightarrow \sqrt{49} = 7$$

$$8^2 = 8 \cdot 8 = 64 \Rightarrow \sqrt{64} = 8$$

$$9^2 = 9 \cdot 9 = 81 \Rightarrow \sqrt{81} = 9$$

$$10^2 = 10 \cdot 10 = 100 \Rightarrow \sqrt{100} = 10$$

$$11^2 = 11 \cdot 11 = 121 \Rightarrow \sqrt{121} = 11$$

$$12^2 = 12 \cdot 12 = 144 \Rightarrow \sqrt{144} = 12$$

$$13^2 = 13 \cdot 13 = 169 \Rightarrow \sqrt{169} = 13$$

$$14^2 = 14 \cdot 14 = 196 \Rightarrow \sqrt{196} = 14$$

$$15^2 = 15 \cdot 15 = 225 \Rightarrow \sqrt{225} = 15$$

$$16^2 = 16 \cdot 16 = 256 \Rightarrow \sqrt{256} = 16$$

$$17^2 = 17 \cdot 17 = 289 \Rightarrow \sqrt{289} = 17$$

$$18^2 = 18 \cdot 18 = 324 \Rightarrow \sqrt{324} = 18$$

$$19^2 = 19 \cdot 19 = 361 \Rightarrow \sqrt{361} = 19$$

$$20^2 = 20 \cdot 20 = 400 \Rightarrow \sqrt{400} = 20$$

4) Οι περισσότερες τετραγωνικές ρίζες δεν υπολογίζονται ακριβώς και δίνουν δεκαδικούς αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία (τα οποία δε χρειαζόμαστε να υπολογίσουμε)

π.χ. $\sqrt{2} = 1,414213\dots$ άπειρα
δεκαδικά
ψηφία Δε μπορώ
να την
υπολογίσω
ακριβώς

$\sqrt{3} = 1,7320508\dots$ άπειρα
δεκαδικά
ψηφία Δε μπορώ
να την
υπολογίσω
ακριβώς

$\sqrt{4} = 2$ (τη $\sqrt{4}$ μπορώ να την υπολογίσω ακριβώς)

$\sqrt{5}$ δε μπορώ να το υπολογίσω ακριβώς

$\sqrt{6}$ δε μπορώ να το υπολογίσω ακριβώς

$\sqrt{7}$ δε μπορώ να το υπολογίσω ακριβώς

$\sqrt{8}$ δε μπορώ να το υπολογίσω ακριβώς

$\sqrt{9} = 3$ (τη $\sqrt{9}$ μπορώ να την υπολογίσω ακριβώς)

5) Οτιδήποτε βρίσκεται κάτω από το σύμβολο $\sqrt{\quad}$ της τετραγωνικής ρίζας λέγεται υπόριζη ποσότητα.

Δλδ αν έχω $\sqrt{x+1}$ $\rightarrow$ υπόριζη ποσότητα

αν έχω $\sqrt{0,031}$ $\rightarrow$ υπόριζη ποσότητα

αν έχω $\sqrt{a+b}$ $\rightarrow$ υπόριζη ποσότητα

ΠΡΕΠΕΙ ΟΠΩΣΔΗΠΟΤΕ Η ΥΠΟΡΙΖΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ
ΝΑ ΕΙΝΑΙ ΜΕΓΑΛΥΤΕΡΗ ή ΙΣΗ ΤΟΥ
ΜΗΔΕΝΟΣ

6) ΟΙ ΤΕΤΡΑΓΩΝΙΚΕΣ ΡΙΖΕΣ ΜΕ ΑΡΝΗΤΙΚΗ
ΥΠΟΡΙΖΗ ΠΟΣΟΤΗΤΑ ΔΕΝ ΟΡΙΖΟΝΤΑΙ

π.χ. $\sqrt{-9}$ (ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ)

$\sqrt{-1}$ (ΔΕΝ ΟΡΙΖΕΤΑΙ)

Κ.Ο.Κ.

7) Όχι μόνο η υπόριζη ποσότητα είναι
μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός, αλλά
και ολόκληρη η τετραγωνική ρίζα
είναι μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός

Διδ αν έχω: $\sqrt{a}$, τότε πρέπει

και $a \geq 0$

και $\sqrt{a} \geq 0$

Τετραγωνικές ρίζες (...συνέχεια)

- 8) Όταν είναι από πάνω το τετράγωνο και από κάτω η τετραγωνική ρίζα, τότε το τετράγωνο με τη ρίζα φεύγουν.

$$(\sqrt{a})^2 = a, \text{ όπου } a \geq 0$$

- 9) Όταν είναι από πάνω η τετραγωνική ρίζα και από κάτω το τετράγωνο, τότε φεύγει το τετράγωνο, φεύγει και η τετραγωνική ρίζα, αλλά αφήνουν πίσω τους απόλυτο.

$$\sqrt{a^2} = |a|, \text{ όπου } a \text{ οποιοσδήποτε αριθμός}$$

- 10) Μια ποσότητα η οποία είναι υψηλότερη εις το τετράγωνο, είναι οπωσδήποτε μεγαλύτερη ή ίση του μηδενός.

Δις οτιδήποτε είναι υψηλότερο εις το τετράγωνο είναι σίγουρα μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός.

- 11) Έχω το δικαίωμα να βάλω $\sqrt{\quad}$ και στα 2 μέλη μιας ισότητας, μόνο εάν και τα 2 μέλη της ισότητας είναι μεγαλύτερα ή ίσα του μηδενός

12) Επίλυση μιας ειδικής περίπτωσης δευτεροβάθμιας εξίσωσης $x^2 = a$

Πώς λύνεται η εξίσωση $x^2 = a$;

Εξαρτάται απ' το εάν το a , είναι θετικό, μηδέν ή αρνητικό

- Αν $a > 0$, τότε η εξίσωση λύνεται ως εξής:

$$x^2 = a \Rightarrow x = \pm \sqrt{a} \Rightarrow x = \sqrt{a} \text{ ή } x = -\sqrt{a}$$

- Αν $a = 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$x^2 = a \Rightarrow x^2 = 0 \Rightarrow x \cdot x = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ ή } x = 0 \\ \Rightarrow x = 0 \text{ (διπλή)}$$

- Αν $a < 0$, τότε η εξίσωση γράφεται:

$$x^2 = a \quad (\text{ΑΔΥΝΑΤΗ}) \quad \begin{array}{l} \text{δεν έχει καμία} \\ \text{πραγματική λύση} \end{array}$$

Είναι ΑΔΥΝΑΤΗ, διότι το x^2 απ' τη φύση του είναι μεγαλύτερο ή ίσο του μηδενός, δηλ $x^2 \geq 0$, άρα δεν είναι δυνατόν το x^2 να είναι ίσο με το $a < 0$ το οποίο είναι αρνητικό

13) Τι είναι το απόλυτο ενός αριθμού;

Απόλυτο ενός αριθμού ονομάζουμε την απόσταση του αριθμού αυτού από το 0

Απόλυτο
του 3

$$|3| = 3, \quad |17| = 17, \quad |-6| = 6$$

Απόλυτο
του 0

$$|0| = 0, \quad |2| = 2, \quad |-2| = 2$$

Απόλυτο
του $-\frac{1}{8}$

$$|-\frac{1}{8}| = \frac{1}{8}, \quad |\frac{3}{7}| = \frac{3}{7}$$

14) Όταν έχουμε: $a \cdot b = 0$

$$\Rightarrow a = 0 \text{ ή } b = 0$$

$$15) \sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}, \quad \begin{matrix} a \geq 0 \\ b \geq 0 \end{matrix}$$

$$16) \sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$17) \sqrt{a-b} \neq \sqrt{a} - \sqrt{b}$$

$$18) \sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} \quad \begin{matrix} a \geq 0 \\ b > 0 \end{matrix}$$

19) Όταν θέλουμε να βρούμε την τετραγωνική ρίζα ενός θετικού ακεραίου που έχει ζυγό πλήθος μηδενικών στο τέλος π.χ. την $\sqrt{81.000.000}$, τότε κάνω τα εξής:

- Βγάζω τα μηδενικά απ' το τέλος του 81.000.000, οπότε μένει 81

- Βρίσκω την $\sqrt{81}$
 $\sqrt{81} = 9$

- Προσθέτω στο τέλος του αποτελέσματος που βρήκα τα μισά απ' τα μηδενικά που αφαίρεσα στην αρχή.

Στην αρχή είχα το 81.000.000, το οποίο έχει 6 μηδενικά. Το μισό του 6 είναι το 3. Άρα θα πάω στο 9 και θα του προσθέσω 3 μηδενικά, δηλ 9000

$$\text{Άρα } \sqrt{81.000.000} = 9000$$

20) Όταν θέλουμε να βρούμε την τετραγωνική ρίζα ενός δεκαδικού αριθμού που έχει ζυγό πλήθος δεκαδικών ψηφίων π.χ. τη $\sqrt{0,0025}$, τότε κάνω τα εξής:

- Γράφω τον δεκαδικό αριθμό, χωρίς την υποδιαστολή, δηλαδή 25

- Βρίσκω την τετραγωνική ρίζα του αριθμού που βρήκα στο προηγούμενο βήμα:

$$\sqrt{25} = 5$$

- Στο αποτέλεσμα που βρήκα (το 5 δηλαδή), μετακινώ την υποδιαστολή τόσες θέσεις αριστερά, όσα ήταν τα μισά δεκαδικά ψηφία που είχα στην αρχή. Δηλαδή

Το 0,0025 είχε 4 δεκαδικά ψηφία, το μισό του 4 είναι το 2. Άρα στο 5 θα μετακινήσω την υποδιαστολή 2 θέσεις αριστερά και θα γίνει 0,05. Άρα τελικά $\sqrt{0,0025} = 0,05$

Εσείς φυσικά όταν λύετε ασκήσεις δε χρειάζεται να τα εξηγείτε όλα αυτά, απλά απευθείας θα γράφετε το αποτέλεσμα

π.χ. $\sqrt{6,25} = 2,5$

$$\sqrt{44100} = 210$$

$$\sqrt{0,16} = 0,4 \quad \text{κλπ κλπ}$$

21) Κάθε υπόριζη ποσότητα εννοείται ότι περιβάλλεται από ένα ζεύγος Παρενθέσεων

22) Κάθε ρίζα εννοείται ότι περιβάλλεται από ένα ζεύγος Παρενθέσεων

23) Όταν έχω πολλές ρίζες ανεξάρτητες, τότε μπορώ να τις υπολογίσω ταυτόχρονα

$$\begin{aligned}\text{π.χ. } \sqrt{9} + \sqrt{625} - 2\sqrt{36} &= 3 + 25 - 2 \cdot 6 \\ &= 3 + 25 - 12 \\ &= 28 - 12 \\ &= 16\end{aligned}$$

24) Όταν πολλές ρίζες εμφωλευμένες, τότε ξεκινώ τους υπολογισμούς απ' την πιο εσωτερική ρίζα και εκτελώ τους υπολογισμούς από μέσα προς τα έξω

$$\text{π.χ. } \sqrt{13 + \sqrt{2 + \sqrt{41 + \sqrt{64}}}}$$

$$= \sqrt{13 + \sqrt{2 + \sqrt{41 + 8}}}$$

$$= \sqrt{13 + \sqrt{2 + \sqrt{49}}}$$

$$= \sqrt{13 + \sqrt{2 + 7}}$$

$$= \sqrt{13 + \sqrt{9}}$$

$$= \sqrt{13 + 3}$$

$$= \sqrt{16}$$

$$= 4$$