

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΣΤΑ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ

Καθηγητής : Χρήστος Μουρατίδης

1. Δίνονται τα σημεία A, B, Γ, Δ και E τέτοια ώστε: $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{\Gamma E} = \overrightarrow{\Delta \Gamma} - \overrightarrow{AE}$.
Να αποδείξετε ότι τα σημεία A, B συμπίπτουν.
2. Δίνονται τα μη συνευθειακά σημεία A, B και Γ .
α) Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = 2\overrightarrow{MA} + 3\overrightarrow{MB} - 5\overrightarrow{M\Gamma}$ είναι σταθερό (δηλαδή ανεξάρτητο του M).
β) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει σημείο K τέτοιο ώστε:
$$2\overrightarrow{KA} + 3\overrightarrow{KB} = 5\overrightarrow{K\Gamma}.$$
3. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, τα οποία ανά δύο δεν είναι συγγραμμικά. Αν $\vec{\alpha} // (\vec{\beta} + 2\vec{\gamma})$ και $\vec{\beta} // (\vec{\gamma} + 2\vec{\alpha})$, να αποδείξετε ότι
$$\vec{\beta} = -4\vec{\alpha} - 2\vec{\gamma}.$$
4. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και Δ, E τα μέσα των πλευρών του $AB, A\Gamma$ αντίστοιχα. Αν $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{A\Delta} + y\overrightarrow{AE}$ με $x+y=2$, να αποδείξετε ότι:
α) $\overrightarrow{DE} // \overrightarrow{B\Gamma}$ και β) τα M, B, Γ είναι συνευθειακά.
5. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\overrightarrow{\Gamma M} = -\lambda\overrightarrow{AB} + (\lambda - 1)\overrightarrow{A\Gamma}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$ (μεταβλητός), να αποδείξετε ότι για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$, το M ανήκει σε μια ευθεία και μάλιστα παράλληλη στο $B\Gamma$.
6. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$. Αν $\overrightarrow{AM} = \lambda\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{A\Gamma}$, όπου $\lambda \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι το M ανήκει σε μια ευθεία.
7. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (1,2)$ και $\vec{\beta} = (2,3)$.
α) Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\vec{u} = -10\vec{\alpha} + 6\vec{\beta}$ και τη γωνία που σχηματίζει με τον άξονα $x'x$.
β) Να εκφράσετε το διάνυσμα $\vec{v} = (8,13)$ ως γραμμικό συνδυασμό των $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$. Στη συνέχεια να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη στο $\vec{\alpha}$ και η άλλη στο $\vec{\beta}$.
8. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(1,5), B(-6,3)$ και $\Gamma(2,1)$.
α) Να υπολογίσετε το μήκος της διαμέσου AM .
β) Να αποδείξετε ότι το διάνυσμα $\vec{u} = (\lambda, \lambda)$ με $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι παράλληλο με το $\overrightarrow{AM}$ για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
γ) Να υπολογίσετε το λ , έτσι ώστε $\overrightarrow{AM} \uparrow \uparrow \vec{u}$.

9. Δίνονται τα σημεία $A(1, -3/2)$, $B(2, -1)$ και $M\left(\alpha, \frac{\alpha-4}{2}\right)$, όπου $\alpha \in \mathbb{R}$.
- α) Να αποδείξετε ότι τα A , B , M είναι συνευθειακά για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$.
- β) Αν $\overrightarrow{BM} = \frac{1}{3} \overrightarrow{AB}$, να υπολογίσετε τον α .
- γ) Να δείξετε ότι δεν υπάρχει τιμή του α , έτσι ώστε $|\overrightarrow{OM}| < \frac{4\sqrt{5}}{5}$.
10. Δίνονται τα σημεία $A(\alpha, \alpha+1)$, $B(\beta-1)$, όπου $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq \beta$. Αν $(OA) = (OB)$, να αποδείξετε ότι τα σημεία A , B συμπίπτουν.
11. Έστω τα σημεία $A(x-y, y)$, $B(2x+y, 2y)$, όπου $x, y \in \mathbb{R}$.
Να βρείτε τα x, y έτσι ώστε το $\overrightarrow{AB}$ σχηματίζει γωνία 45° με τον άξονα $x'x$ και $|\overrightarrow{AB}| = 2$.
12. Δίνονται τα σημεία $A(x, y)$ και $B(-y, x)$ όπου $x, y \in \mathbb{R}$. Να υπολογίσετε τα $x, y \in \mathbb{R}$ έτσι ώστε $|\overrightarrow{AB}| = 8\sqrt{2}$ και το $\overrightarrow{OA}$ να σχηματίζει γωνία 60° με τον άξονα $x'x$.
13. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (2, -3)$ και $\vec{\beta} = (1, 4)$. Θεωρούμε τα σημεία A , B , Γ ώστε $\overrightarrow{AB} = 2\vec{\alpha} + 3\vec{\beta}$ και $\overrightarrow{A\Gamma} = 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta}$. Να υπολογίσετε το μέτρο του διανύσματος $\overrightarrow{B\Gamma}$.
14. Θεωρούμε το ισόπλευρο τρίγωνο $AB\Gamma$, πλευράς a και το ύψος $A\Delta$. Να υπολογίσετε τα παρακάτω γινόμενα.
- i) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{A\Gamma}$ ii) $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{B\Gamma}$ iii) $\overrightarrow{A\Delta} \cdot \overrightarrow{BA}$
15. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}$, τέτοια ώστε $|\vec{\alpha}| = 1, |\vec{\beta}| = 2$ και $(\vec{\alpha}, \vec{\beta}) = \frac{\pi}{3}$.
Να υπολογίσετε: α) το γινόμενο $(\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})(2\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.
β) το μέτρο του διανύσματος $3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}$.
γ) το συνημίτονο της γωνίας $(3\vec{\alpha} - 2\vec{\beta}, 3\vec{\alpha} + 2\vec{\beta})$.
16. Έστω τα διανύσματα $\vec{\alpha}, \vec{\beta}, \vec{\gamma}$, ώστε: $|\vec{\alpha}| = |\vec{\beta}| = 1, |\vec{\gamma}| = \sqrt{2}$ και $\vec{\alpha} + \vec{\beta} = \vec{\gamma}$.
- α) Να αποδείξετε ότι: $\vec{\alpha} \perp \vec{\beta}$.
- β) Να υπολογίσετε τη γωνία $(\vec{\alpha}, \vec{\gamma})$.

17. Έστω τα $\vec{\alpha}, \vec{\beta} \neq \vec{0}$ με $4|\vec{\alpha}| = 3\sqrt{3}|\vec{\beta}|$. Αν $\vec{\alpha} \perp (2\vec{\alpha} - 3\vec{\beta})$ να αποδείξετε ότι $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})} = \frac{\pi}{6}$.
18. Δίνεται το τρίγωνο $AB\Gamma$ και το μέσο Δ της $B\Gamma$. Να αποδείξετε ότι τα σημεία M , που είναι τέτοια ώστε, $\overrightarrow{\Delta M} \cdot \overrightarrow{B\Gamma} + 2\overrightarrow{\Delta M} \cdot \overrightarrow{BA} = 0$ ανήκουν σε μια ευθεία.
19. Έστω $\vec{\alpha} = (-3, 4)$ και $\vec{\beta} = (1, 2)$. Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\text{προβ}_{\vec{\alpha}}(\vec{\alpha} + \vec{\beta})$.
20. Δίνεται το σταθερό σημείο A . Αν τα σημεία O, M είναι τέτοια ώστε : $\overrightarrow{OM}^2 + \overrightarrow{OA}^2 = 4 + 2\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OM}$ να αποδείξετε ότι το M ανήκει σε έναν κύκλο.
21. Δίνονται τα διανύσματα $\vec{\alpha} = (3, 4)$ και $\vec{v} = (-1, -2)$.
- α) Να υπολογίσετε το διάνυσμα $\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{v}$.
- β) Να αναλύσετε το $\vec{v}$ σε δύο κάθετες συνιστώσες από τις οποίες η μία να είναι παράλληλη και η άλλη κάθετη στο $\vec{\alpha}$.
22. Έστω το διάνυσμα $\vec{\alpha} \neq \vec{0}$ και το διάνυσμα $\vec{\beta}$ με $|\vec{\beta}| = 1$ και $|\text{προβ}_{\vec{\alpha}} \vec{\beta}| = \frac{1}{2}$.
- Να υπολογίσετε τη γωνία $\widehat{(\vec{\alpha}, \vec{\beta})}$.