

ΔΙΑΓΩΝΙΣΜΑ ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΥ 2012

Ονοματεπώνυμο : Γ' Λυκείου Γεν. Παιδείας

Θέμα 1°Α. Έστω μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού το A .α. Πότε η f λέγεται συνεχής στο $x_0 \in A$;β. Πότε η f λέγεται παραγωγίσιμη στο $x_0 \in A$; (Μ 10)Β. Αποδείξτε ότι, αν $f(x)$ και $g(x)$ παραγωγίσιμες συναρτήσεις τότε :

$$(f(x) + g(x))' = f'(x) + g'(x) \quad (\text{Μ } 5)$$

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, ως **Σωστό** ή **Λάθος**α. Αν $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = l_1$ και $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = l_2$, τότε $\lim_{x \rightarrow x_0} (f(x) \cdot g(x)) = l_1 l_2$.β. Μια συνάρτηση f με πεδίο ορισμού A λέμε ότι παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x_1 \in A$, όταν $f(x) \geq f(x_1)$ για κάθε x σε μια περιοχή του x_1 .γ. Ισχύει $(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + g'(x) \cdot f(x)$, όπου f και g παραγωγίσιμες συναρτήσεις.δ. Ισχύει $(\sqrt{x})' = \frac{1}{\sqrt{x}}$ με $x > 0$.ε. Μια συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο x_0 του πεδίου ορισμού της, αν υπάρχει και είναι πραγματικός αριθμός το :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}, \quad h \in \mathbb{R}, \quad h \neq 0. \quad (\text{Μ}10)$$

Θέμα 2°Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο $f(x) = \frac{x+2}{e^x}$.

α. Να βρείτε τη μονοτονία και τα ακρότατα της συνάρτησης. (Μ 9)

β. Να αποδείξετε ότι $f(x) + f'(x) = \frac{1}{e^x}$. (Μ 8)γ. Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της f στο σημείο $A(0, f(0))$. (Μ 8)

Θέμα 3°

A. Να βρείτε την παράγωγο των συναρτήσεων :

α) $f(x)=(x^2+1)^3 \cdot \eta\mu^2(x^4+1)$ και β) $g(x)=\ln(\eta\mu^3(x^2+1))$, όπου αυτές ορίζονται. (M 10)

B. Έστω οι συναρτήσεις $f(x) = 4x - x^2$ και $g(x) = -a/x$.

Να βρεθεί ο $a \in \mathbb{R}^*$, ώστε η εφαπτομένη της C_f στο $A(-2, -12)$ να εφάπτεται και της C_g .

(M 8)

Γ. Σε ποιο σημείο της γραφικής παράστασης της συνάρτησης

$f(x) = e^{3x-2} - 9e^{x+8}$ η εφαπτομένη έχει το μικρότερο συντελεστή διεύθυνσης; (M 7)

Θέμα 4° (Προαιρετικό)

A. Έστω η συνάρτηση : $f(x) = x^2 - 2\ln x - 1$.

α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.

β) Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατα της f .

γ) Να δείξετε ότι, για κάθε $x > 0$, ισχύει : $x^2 \geq 1 + 2\ln x$.

δ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{xf'(x)}{x-1}$.

