ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ 20

Όνομα Μαθητή :…………..……………………………………… Ημ/νία :…………………….

Μαγικά Τετράγωνα

Με τον όρο μαγικό τετράγωνο, ονομάζουμε ένα τετράγωνο στο οποίο οι αριθμοί που γράφονται μέσα του να είναι τέτοιοι, ώστε το άθροισμα κάθε οριζόντιας γραμμής, κάθε κάθετης στήλης και κάθε διαγωνίου να είναι το ίδιο.

Έτσι οι 9 πρώτοι αριθμοί σχηματίζουν το παρακάτω μαγικό τετράγωνο, που το άθροισμα κάθε γραμμής, κάθε στήλης και κάθε διαγωνίου είναι 15.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Μαγικά τετράγωνα περιττής τάξεως

Υπάρχουν πολλές μέθοδοι σχηματισμού τέτοιων τετραγώνων, αλλά εδώ περιοριζόμαστε να υποδείξουμε τη μέθοδο του Claude-Gaspard Bachet.

Έτσι για <u>τετράγωνο πλευράς 3 αριθμών</u> σχηματίζουμε έναν πίνακα (1) των πρώτων 9 αριθμών και μετά συμπληρώνουμε το τετράγωνο ΑΒΓΔ μεταφέροντας στα κενά τετραγωνάκια τους αριθμούς, που βρίσκονται απέναντι εξωτερικά πάνω στην ίδια γραμμή ή στήλη, ώστε κάθε αριθμός να γεμίζει το τετραγωνάκι που είναι πιο απομακρυσμένο απ΄ αυτόν. Με τον τρόπο αυτό προκύπτει το μαγικό τετράγωνο (2).

Α		**1**		**Β**
	4		**2**	
7		**5**		**3**
	8		**6**	
Δ		**9**		**Γ**

(1)

Α				**Β**
	4	**9**	**2**	
	3	**5**	**7**	
	8	**1**	**6**	
Δ				**Γ**

(2)

Για τετράγωνο πλευράς 5 αριθμών, καθώς και γενικά περιττής τάξεως, δουλεύουμε με ανάλογο τρόπο με τον προηγούμενο, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα:

				1				
	Α		6		2		Β	
		11		7		3		
	16		12		8		4	
21		17		13		9		5
	22		18		14		10	
		23		19		15		
	Δ		24		20		Γ	
				25				

	Α						Β	
		11	24	7	20	3		
		4	12	25	8	16		
		17	5	13	21	9		
		10	18	1	14	22		
		23	6	19	2	15		
	Δ						Γ	

Αν παρατηρήσουμε, θα προσέξουμε ότι το πρόβλημα επιδέχεται μεγάλο αριθμό λύσεων και συνεπώς μπορούμε να κατασκευάσουμε χιλιάδες μαγικά τετράγωνα της τάξεως του 5.

Σ΄ ένα μαγικό τετράγωνο της τάξεως του ν, που σχηματίσθηκε με τη σειρά των ακέραιων αριθμών, υπάρχουν νΧν=ν^2 αριθμοί, που το άθροισμά τους ισούται με $\frac{\nu^2\left(\nu^2+1\right)}{2}$. Συνεπώς το άθροισμα κάθε στήλης ή γραμμής είναι: $\frac{\nu^2\left(\nu^2+1\right)}{2\nu}=\frac{\nu\left(\nu^2+1\right)}{2}$.

Έτσι για ν=3 το άθροισμα είναι : $\frac{3\left(3^2+1\right)}{2}=\frac{30}{2}=15$

Αντίστοιχα για ν=5 έχουμε: $\frac{5\left(5^2+1\right)}{2}=\frac{130}{2}=65$.

Μαγικά τετράγωνα άρτιας τάξεως

Αυτά σχηματίζονται με διαφορετικούς τρόπους. Ας προσπαθήσουμε να σχηματίσουμε ένα μαγικό τετράγωνο της τάξεως του 4 με τους πρώτους 16 αριθμούς.
Στην αρχή γράφουμε τους αριθμούς, όπως φαίνεται στο σχήμα (1).
Το ολικό άθροισμα των αριθμών είναι : $\frac{4^2\left(4^2+1\right)}{2}=\frac{272}{2}=136$ και συνεπώς το άθροισμα των αριθμών κάθε στήλης, ή γραμμής, ή διαγωνίου θα είναι : $\frac{136}{4}=34$, που μας το έχουν ήδη δώσει οι διαγώνιες.

1	2	3	**4**
5	**6**	**7**	8
9	**10**	**11**	12
13	14	15	**16**

(1)

1	14	15	**4**
9	**6**	**7**	12
5	**10**	**11**	8
13	2	3	**16**

(2)

1	15	14	**4**
12	**6**	**7**	9
8	**10**	**11**	5
13	3	2	**16**

(3)

Στη συνέχεια και χωρίς να πειράξουμε τους αριθμούς που βρίσκονται στις διαγώνιες, εναλλάσσουμε την 1η και 4η γραμμή, καθώς και την 2η με την 3η. (Πίνακας 2)
Κατόπιν κάνουμε το ίδιο για τις στήλες και βρίσκουμε τον πίνακα (3) που αποτελεί το ζητούμενο μαγικό τετράγωνο.

Αυτό το μαγικό τετράγωνο είναι εκείνο, που ο διάσημος ζωγράφος και χαράκτης Αλβέρτος Durer από τη Νυρεμβέργη (1471-1528) χάραξε πάνω σε μια ξύλινη πινακίδα κατά το έτος 1500 με τον τίτλο: «Μελαγχολία».

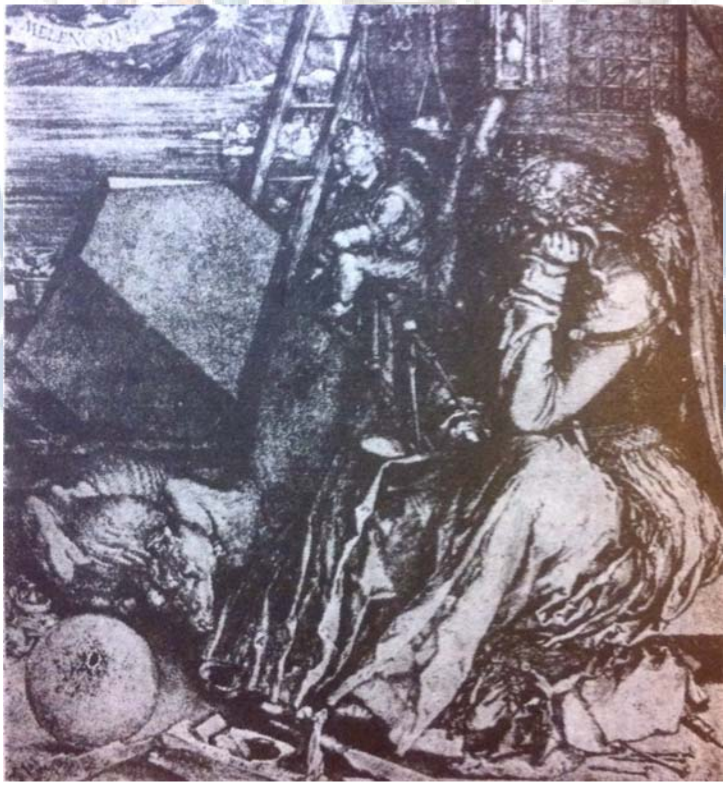
<u>Σημείωση:</u> Τα μαγικά τετράγωνα ήταν γνωστά στους Κινέζους, στους Ινδούς και τον 9ο μ.Χ. αιώνα στους Άραβες. Όμως ο πρώτος κανόνας σχηματισμού τους δόθηκε στον 14ο αιώνα από τον Έλληνα μοναχό Εμμανουήλ Μοσχόπουλο. Στη συνέχεια πολλοί ασχολήθηκαν με αυτά, μεταξύ των οποίων και διάσημοι μαθηματικοί, όπως οι Stifel, Bachet, Fermat, de la Hire, Euler κ.α.

Ιδιότητες των μαγικών τετραγώνων

1. Αν ένα μαγικό τετράγωνο της τάξεως του αριθμού α περιλαμβάνει όλους τους αριθμούς από 1 έως α^2, το αντίστοιχο σταθερό άθροισμα κάθε στήλης, ή γραμμής, ή διαγωνίου ισούται με : $\frac{a\left(a^2+1\right)}{2}$. Έτσι για ένα μαγικό τετράγωνο της τάξεως του 4 θα έχει σταθερό άθροισμα : $\frac{4\left(4^2+1\right)}{2}=\frac{68}{2}=34$.
2. Μπορούμε να προσθέσουμε ή να αφαιρέσουμε τον ίδιο αριθμό σε όλους τους όρους ενός μαγικού τετραγώνου και το τετράγωνο να παραμείνει μαγικό. (Με άλλο σταθερό άθροισμα).

3. Ομοίως μπορούμε να πολλαπλασιάσουμε όλους τους όρους ενός μαγικού τετραγώνου με τον ίδιο αριθμό και το τετράγωνο θα παραμείνει μαγικό.

Έτσι αν πάρουμε το μαγικό τετράγωνο τάξεως 3, που περιλαμβάνει τους 9 πρώτους φυσικούς αριθμούς, μπορούμε να παράγουμε απ᾽ αυτό μια απειρία μαγικών τετραγώνων 9 αριθμών, που αποτελούν αριθμητική πρόοδο.



«Μελαγχολία» του Dürer
(Στην πάνω δεξιά γωνία διακρίνεται το μαγικό τετράγωνο)