

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Β' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΚΕΦΑΛΑΙΟ 3^ο - ΜΕΤΡΗΣΗ ΚΥΚΛΟΥ

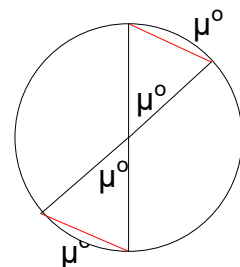
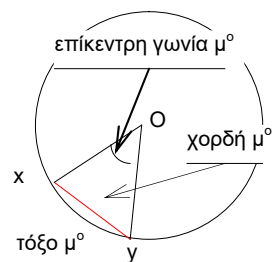
ΕΠΙΚΕΝΤΡΕΣ ΓΩΝΙΕΣ (Επανάληψη από την 1^η Τάξη)

1. Η γωνία $\hat{xOy}$ που έχει την κορυφή της στο κέντρο ενός κύκλου λέγεται **επίκεντρη γωνία**.

2. Το τόξο που περιέχεται στην γωνία $\hat{xOy}$ λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της επίκεντρης αυτής γωνίας.

3. **Θυμίζω ότι:**

- Σε ίσους κύκλους ή στον ίδιο κύκλο:
 - α. Ισες επίκεντρες γωνίες έχουν ίσα και τα αντίστοιχα τόξα τους.
 - β. Ισα τόξα έχουν ίσες και τις αντίστοιχες χορδές τους.
- Ενα τόξο έχει μέτρο τόσων μοιρών, όσων μοιρών είναι και η επίκεντρη γωνία στην οποία αντιστοιχεί.
- Για να είναι δύο τόξα ίσα πρέπει να ανήκουν στον ίδιο κύκλο ή σε ίσους κύκλους και να έχουν ίσα μέτρα σε μοίρες.



4. **Μαθαίνουμε ότι:**

- Ενας κύκλος είναι τόξο 360° , ενώ ένα ημικύκλιο είναι τόξο 180° .
- Τα τέσσερα τόξα που σχηματίζονται από δύο κάθετες διαμέτρους είναι 90° το καθένα και λέγονται **τεταρτοκύκλια**.

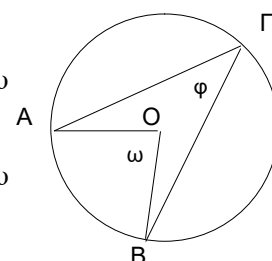
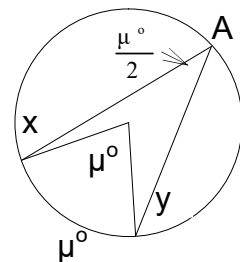
3.1 ΕΓΓΕΓΡΑΜΜΕΝΕΣ ΓΩΝΙΕΣ

1. Η γωνία $\hat{xAy}$ της οποίας η κορυφή είναι σημείο της περιφέρειας ενός κύκλου και οι πλευρές της Ax και Ay τέμνουν τον κύκλο αυτό, λέγεται **εγγεγραμμένη γωνία**.

2. Το τόξο του κύκλου που περιέχεται στην εγγεγραμμένη γωνία λέγεται **αντίστοιχο τόξο** της. Λέμε ότι μια εγγεγραμμένη γωνία βαίνει στο αντίστοιχο τόξο της.

3. **Μαθαίνουμε ότι:**

- Η εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι πάντα ορθή (90°).
- Η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό της επίκεντρης γωνίας που έχει το ίδιο αντίστοιχο τόξο.
- Η εγγεγραμμένη γωνία είναι ίση με το μισό του μέτρου σε μοίρες του αντιστοίχου τόξου της.
- Οι εγγεγραμμένες γωνίες που βαίνουν στο ίδιο τόξο ή σε ίσα τόξα είναι ίσες.



3.2 ΚΑΝΟΝΙΚΑ ΠΟΛΥΓΩΝΑ

1. Ενα πολύγωνο λέγεται **κανονικό**, όταν έχει όλες τις πλευρές του ίσες και όλες τις γωνίες του ίσες. Πχ το ισόπλευρο τρίγωνο, το τετράγωνο κλπ.

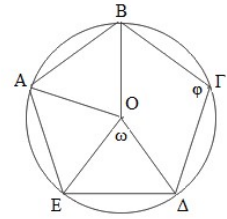
2. Ο κύκλος που περνά από τις κορυφές του κανονικού πολυγώνου λέγεται **περιγεγραμμένος** κύκλος του πολυγώνου. Τότε λέμε ότι το πολύγωνο είναι **εγγεγραμμένο** στον κύκλο αυτό.

3. **Κεντρική γωνία** ενός κανονικού πολυγώνου με ν γωνίες λέγεται κάθε μία από τις ίσες επίκεντρες γωνίες ω με τις οποίες χωρίζουμε τον κύκλο σε ν ίσα τόξα. Έχει μέτρο: $\omega = \frac{360^\circ}{\nu}$

4. Το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου του λέγεται και κέντρο του κανονικού πολυγώνου.

5. **Να γνωρίζετε ότι:**

- Σε ένα κανονικό ν-γωνο, αν είναι ω η κεντρική του γωνία και φ μία από τις ίσες γωνίες του, ισχύει ότι $\omega + \varphi = 180^\circ$, δηλαδή είναι παραπληρωματικές.
- Κάθε πλευρά του κανονικού εξαγώνου είναι ίση με την ακτίνα ρ του περιγεγραμμένου του κύκλου.



6. Απόστημα του κανονικού πολυγώνου πχ ABΓΔΕ... που είναι εγγεγραμμένο σε κύκλο (O,ρ) λέγεται το ύψος των ίσων και ισοσκελών τριγώνων OAB, OΒΓ, OΓΔ, ...κλπ που σχηματίζονται.

3.3 ΜΗΚΟΣ ΚΥΚΛΟΥ

1. Το μήκος των κύκλων και η αντίστοιχη διάμετρός τους είναι ποσά ανάλογα. Άρα θα έχουν σταθερό λόγο. Ο λόγος του μήκους του κύκλου προς την διάμετρό του είναι ίδιος για όλους τους κύκλους και συμβολίζεται διεθνώς με το γράμμα π . Δηλαδή: $\pi = \frac{\text{Μήκος κύκλου}}{\text{Διάμετρός του}} = \frac{L}{\delta}$

2. **Να γνωρίζετε ότι:**

- Αν είναι L το μήκος ενός κύκλου και ρ η ακτίνα του τότε ισχύουν ότι: $L = \pi \delta$ και $L = 2\pi \rho$
- Στις ασκήσεις θα αντικαθιστούμε το π με την ρητή του προσέγγιση $\pi \approx 3,14$.
- Δεν μπερδεύουμε το μέτρο ενός τόξου και το μήκος του. Το μήκος του εξαρτάται από την ακτίνα και μετριέται σε μονάδες μήκους και όχι σε μοίρες!
- Αν δύο τόξα έχουν το ίδιο μήκος αλλά ανήκουν σε διαφορετικούς κύκλους, δεν είναι ίσα.

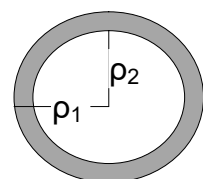
3. Μία επίκεντρη γωνία μ° ορίζει στον κύκλο τόξο μ° . Τότε το τόξο αυτό θα είναι τα κλάσμα $\frac{\mu^\circ}{360^\circ}$ όλου του κύκλου, άρα θα έχει μήκος τα $\frac{\mu^\circ}{360^\circ}$ του μήκους L ολόκληρου του κύκλου.

3.5 ΕΜΒΑΔΟ ΚΥΚΛΙΚΟΥ ΔΙΣΚΟΥ

1. Αν χωρίσουμε τον κυκλικό δίσκο σε πολλά ίσα μέρη και τα τοποθετήσουμε το ένα δίπλα στο άλλο θα παρατηρήσουμε ότι προκύπτει ένα σχήμα που προσεγγίζει ένα ορθογώνιο, με βάση το μισό του μήκους του κύκλου ($\frac{1}{2} L$) και ύψος την ακτίνα του ρ .
2. Να γνωρίζετε ότι το **Εμβαδόν κυκλικού δίσκου** ή συνηθέστερα το **Εμβαδόν κύκλου** με ακτίνα ρ δίνεται από τον τύπο: $E = \pi \rho^2$
3. Το κοινό μέρος ενός κυκλικού δίσκου και μιας επίκεντρης γωνίας ονομάζεται «κυκλικός τομέας».
4. Ξέρουμε ότι μία επίκεντρη γωνία μ° ορίζει στον κύκλο ένα κυκλικό τομέα μ° . Τότε ο κυκλικός τομέας θα είναι τα κλάσμα $\frac{\mu^\circ}{360^\circ}$ όλου του κύκλου και άρα θα έχει εμβαδό τα $\frac{\mu^\circ}{360^\circ}$ του εμβαδού E ολόκληρου του κύκλου.

Βασική Εφαρμογή

Αν «Κυκλικός δακτύλιος» είναι το γραμμοσκιασμένο μέρος ανάμεσα σε δύο ομόκεντρους κύκλους, τότε το εμβαδόν του θα δίνεται από τον τύπο: $E = \pi(\rho_1^2 - \rho_2^2)$ όπου ρ_1, ρ_2 οι ακτίνες των δύο κύκλων.



ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ

Α. Συμπληρώστε τις τελείες στις παρακάτω προτάσεις:

1. Τα ίσα τόξα του ίδιου κύκλου έχουν χορδές και σ' αυτά βαίνουν επίκεντρες γωνίες.
2. Η διχοτόμος μιάς επίκεντρης γωνίας διέρχεται απο το του αντιστοίχου τόξου.
3. Αν η εγγεγραμμένη γωνία ΑΓΒ είναι ορθή, η ΑΒ είναι του κύκλου.

Β. Δίνεται κύκλος ακτίνας 2cm . Συμβολίζουμε με ω τη κεντρική γωνία ενός κανονικού ν-γώνου εγγεγραμμένου σ' αυτόν και ϕ την γωνία του. Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

ν	ω	ϕ
4		
6		

Γ. Να συμπληρωθεί ο επόμενος πίνακας με τα μήκη των τόξων και τα εμβαδά των τομέων κάθε στήλης, όταν στη πρώτη στήλη δίνεται η ακτίνα του κύκλου σε cm.

Ακτίνα ρ	Μήκος κύκλου L	Μήκος τόξου 90°	Μήκος τόξου 180°	Εμβαδό Ε κυκλ. δίσκου	Εμβαδό κυκλ. τομέα 90°	Εμβαδό κυκλ. τομέα τόξου 180°
1						
2						

Δ. Να απαντήσετε στις επόμενες ερωτήσεις:

1. Αν διπλασιαστεί ένα τόξο διπλασιάζεται και η χορδή του. ☐
2. Σε άνισους κύκλους δύο τόξα 90° έχουν ίσες χορδές. ☐
3. Σε άνισους κύκλους σε δύο τόξα 90° βαίνουν ίσες επίκεντρες γωνίες. ☐
4. Μία επίκεντρη γωνία που βαίνει σε τόξο μ° είναι ίση με μιά εγγεγραμμένη που βαίνει σε τόξο $2\mu^\circ$. ☐
5. Το ορθογώνιο και ο ρόμβος είναι κανονικά πολύγωνα. ☐
6. Η χορδή ενός τόξου 22° είναι πλευρά κανονικού πολυγώνου. ☐
7. Υπάρχει κύκλος που έχει μήκος $\pi = 3,14\text{cm}$. ☐
8. Το μήκος κύκλου ακτίνας 2 cm και το εμβαδό του αντιστοίχου κυκλικού δίσκου εκφράζονται με τον ίδιο αριθμό. ☐