

A.1.6 Παραγοντοποίηση αλγεβρικών παραστάσεων

ΒΑΣΙΚΟΙ ΚΑΝΟΝΕΣ ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗΣ

1. Μια παραγοντοποίηση σε γινόμενο πρώτων παραγόντων είναι ολοκληρωμένη όταν κανένας από τους παράγοντες δεν μπορεί να παραγοντοποιηθεί περαιτέρω.

Για παράδειγμα η παραγοντοποίηση: $2x^3 - 2x = 2x \cdot (x^2 - 1)$ δεν είναι ολοκληρωμένη, αφού ο παράγοντας $(x^2 - 1)$ μπορεί να παραγοντοποιηθεί περαιτέρω. Πρόκειται για διαφορά τετραγώνων: $x^2 - 1 = x^2 - 1^2 = (x - 1)(x + 1)$. Επομένως, σ' αυτήν την περίπτωση η σωστή παραγοντοποίηση είναι: $2x^3 - 2x = 2x \cdot (x^2 - 1) = 2x(x - 1)(x + 1)$.

2. Όταν η παράσταση που μας δίνεται για παραγοντοποίηση περιέχει παρενθέσεις, δεν κάνουμε απαλοιφή τους και προσπαθούμε να τις εκμεταλλευτούμε κατά την παραγοντοποίηση.

Πχ 1. $(x - 2)^2 + x \cdot (x - 2) + 2x - 4 =$ Παρατηρήστε την ύπαρξη της παρένθεσης $(x - 2)$ δύο φορές στην παράσταση. Δεν κάνουμε απαλοιφή των παρενθέσεων, αλλά εμφανίζουμε την παρένθεση και στο άθροισμα: $2x - 4 = 2(x - 2)$. Στη συνέχεια η παρένθεση $(x - 2)$ βγαίνει κοινός παράγοντας και συνεχίζουμε με πράξεις κλπ.

$$\begin{aligned} &= (x - 2)^2 + x \cdot (x - 2) + 2(x - 2) = \\ &= (x - 2) \cdot [(x - 2) + x + 2] = \\ &= (x - 2) \cdot (x - 2 + x + 2) = \\ &= (x - 2) \cdot 2x = \\ &= 2x \cdot (x - 2) \end{aligned}$$

Απαλοιφή παρενθέσεων κάνουμε μόνο όταν δεν μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τις παρενθέσεις που υπάρχουν στην παράσταση που θέλουμε να παραγοντοποιήσουμε.

Πχ 2. $(x + 2y)^2 + (2x - y)^2 + 5y(x - y) =$ Παρατηρήστε ότι στις 3 παρενθέσεις δεν υπάρχουν ίσες ή αντίθετες για να μπορέσουμε να τις εκμεταλλευτούμε. Κάνουμε απαλοιφή παρενθέσεων και συνεχίζουμε με πράξεις κλπ.

$$\begin{aligned} &= x^2 + 4xy + 4y^2 + 4x^2 - 4xy + y^2 + 5xy - 5y^2 = \\ &= 5x^2 + 5xy = \\ &= 5x(x + y) \end{aligned}$$

3. Όταν μας δίνεται μια παράσταση για παραγοντοποίηση η πρώτη σκέψη που κάνουμε είναι μήπως βγαίνει κοινός παράγοντας.

4. Κατόπιν μετράμε τα μονώνυμα ή τις παρενθέσεις που υπάρχουν στην παράστασή μας:

-Αν έχουμε **2** τότε πρόκειται για διαφορά τετραγώνων: $\alpha^2 - \beta^2 = (\alpha - \beta) \cdot (\alpha + \beta)$.

-Αν έχουμε **3** τότε ελέγχουμε (με τη σειρά):

- i. για ταυτότητα: $\alpha^2 \pm 2\alpha\beta + \beta^2 = (\alpha \pm \beta)^2$ (τετράγωνο αθροίσματος ή διαφοράς)
- ii. για "εύκολο" τριώνυμο: $x^2 + (\alpha + \beta)x + \alpha \cdot \beta = (x + \alpha) \cdot (x + \beta)$.
- iii. για διάσπαση

$$\text{iv. για τριώνυμο: } \alpha x^2 + \beta x + \gamma = \begin{cases} \xrightarrow{\Delta > 0, 2 \text{ ρίζες: } \rho_1, \rho_2} & \alpha \cdot (x - \rho_1) \cdot (x - \rho_2) \\ \xrightarrow{\Delta = 0, 1 \text{ ρίζα: } \rho} & \alpha \cdot (x - \rho)^2 \\ \xrightarrow{\Delta < 0, \text{ δεν έχει ρίζες}} & \text{ΔΕΝ παραγοντοποιείται} \end{cases}.$$

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

-Αν έχουμε **4** τότε ελέγχουμε (με τη σειρά):

- i. για ομαδοποίηση
- ii. για 3 και 1

$$\text{Πχ 3. } \underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_3 - \underbrace{w^2}_1 = (x+y)^2 - w^2 = (x+y-w)(x+y+w)$$

- iii. για ταυτότητα: $\alpha^3 \pm 3\alpha^2\beta + 3\alpha\beta^2 \pm \beta^3 = (\alpha \pm \beta)^3$ (κύβος αθροίσματος ή διαφοράς)

-Αν έχουμε **5** τότε ελέγχουμε μήπως είναι ομαδοποίηση:

- i. με 3 και 2 όρους

$$\text{Πχ 4. } \underbrace{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}_3 - \underbrace{\alpha - \beta}_2 = (\alpha + \beta)^2 - 1 \cdot (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(\alpha + \beta - 1)$$

- ii. με 4 και 1 όρους

$$\text{Πχ 5. } \underbrace{\alpha x + \beta x + \alpha y + \beta y}_4 - \underbrace{(\alpha + \beta)}_1 = x \cdot (\alpha + \beta) + y \cdot (\alpha + \beta) - 1 \cdot (\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)(x + y - 1)$$

-Αν έχουμε **6** τότε ελέγχουμε (με τη σειρά) μήπως είναι ομαδοποίηση:

- i. με 3 και 3 όρους

$$\begin{aligned} \text{Πχ 6. } \underbrace{\alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2}_3 - \underbrace{x^2 + 2xy + y^2}_3 &= \alpha^2 + 2\alpha\beta + \beta^2 - (x^2 + 2xy + y^2) = \\ &= (\alpha + \beta)^2 - (x + y)^2 = [(\alpha + \beta) + (x + y)] \cdot [(\alpha + \beta) - (x + y)] = \\ &= (\alpha + \beta + x + y) \cdot (\alpha + \beta - x - y) \end{aligned}$$

- ii. με 4 και 2 όρους

$$\begin{aligned} \text{Πχ 7. } \underbrace{\alpha x + \beta x + \alpha y + \beta y}_4 + \underbrace{x^2 - y^2}_2 &= x \cdot (\alpha + \beta) + y \cdot (\alpha + \beta) + (x - y)(x + y) = \\ &= (\alpha + \beta)(x + y) + (x - y)(x + y) = (x + y)(\alpha + \beta + x - y) \end{aligned}$$

- iii. με 2, 2 και 2 όρους

$$\text{Πχ 8. } \underbrace{2x^3 - 2x^2}_2 + \underbrace{xy - y}_2 + \underbrace{3x - 3}_2 = 2x^2(x - 1) + y(x - 1) + 3(x - 1) = (x - 1)(2x^2 + y + 3)$$

-Με αντίστοιχο τρόπο συνεχίζουμε για περισσότερα μονώνυμα – παρενθέσεις.

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Οι απαντήσεις να γραφούν κάτω από τις αντίστοιχες ασκήσεις.

1. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $24x + 16$

β. $8x^2 - 12x^3$

γ. $6x^2y - 3xy^2$

δ. $12x^2y + 6xy^2 - 3xy$

ε. $5x(y - 5) + 3(y - 5)$

στ. $4\alpha^3\beta^2 + 2\alpha\beta^3 - \alpha\beta^2$

ζ. $4x(x - 2) - 2(2 - x)$

η. $4x(x + 3)^2 - 6x^2(x + 3)$

θ. $6x^3(x - y) - 3x^2(x - y)$

ι. $3x(2x - 1) - 2x + 1$

ια. $4x(2 - 3x) + 4 - 6x$

ιβ. $\alpha(7\delta - 5\gamma) + 2(5\gamma - 7\delta)$

ιγ. $9x^6 - 16y^8$

ιδ. $25(\omega + 1)^2 - 4$

ιε. $(7 - 2x)^2 - (3x - 2)^2$

ιστ. $(4x + 2\omega)^2 - (2x - 3\omega)^2$

ιζ. $25 + 10x^2 + x^4$

ιη. $9\alpha^2 - 12\alpha\beta + 4\beta^2$

ιθ. $x^4 - 6x^2y + 9y^2$

κ. $1 + 4y^2 + 4y^4$

κα. $x^2 + 4x + 3$

κβ. $x^2 - 7x + 12$

κγ. $4x^2 - 7xy + 3y^2$

κδ. $3\alpha^2 - \alpha\gamma - 2\gamma^2$

κε. $2x^4 - 2x^3 + 3x - 3$

κστ. $x^2 + 3\alpha x - 4\alpha^2$

κζ. $9\alpha^2 + 12\alpha x^2 + 4x^4$

κη. $\alpha^2x^4 + 2\alpha x^2y + y^2$

κθ. $x^2 - 4x - 5$

λ. $x^2 - 2x - 3$

λα. $(x + y)^2 - (x - y)^2$

λβ. $\alpha^2xy + \beta^2xy + \alpha\beta x^2 + \alpha\beta y^2$

λγ. $xy^2 + x - 1 - y^2$

Λύση της Άσκησης:

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ

2. Να παραγοντοποιήσετε τις παρακάτω παραστάσεις:

α. $2x(x-3)-3a(x-3)-4x+6a$

β. x^3-6x^2+9x

γ. $7x^2+5y^2+35+x^2y^2$

δ. $16x^2-(2x-3)^2$

ε. $(x+5)^2-(1-3x)^2$

στ. $x^4-\alpha^4$

ζ. x^4-1

η. $(x^2+1)^2-4x^2$

θ. $4(x-1)^2-64(x+1)^2$

ι. x^5y-xy^5

ια. $x^2-2xy+y^2-9$

ιβ. $(x-5)(x-2)^2-9(x-5)$

ιγ. $x^2-2xy+y^2-\alpha^2-2\alpha\beta-\beta^2$

ιδ. $2x^4(x-1)+8x^2(1-x)$

ιε. $4x^2(x-3)-x+3$

ιστ. $16(x-3)^2-4\alpha^2(3-x)^2$

ιζ. $x^2-2\alpha x+\alpha^2-16$

ιη. $x^2(\alpha+1)-4x(\alpha+1)+4(\alpha+1)$

ιθ. $x^2(x-2)+4x(2-x)+4x-8$

κ. $25x^4+10x^2+1-9x^6$

κα. $4x^2+12x+9-y^2+2y-1$

κβ. $x^2(2\alpha-3)^3-4x(2\alpha-3)+8\alpha-12$

κγ. $\alpha^4-2\alpha^2\beta^2+\beta^4$

κδ. $36y^2-9(y-2)^2$

κε. $4(2x-1)^2-9(x+2)^2$

κστ. $2(x-y)-x^2+y^2$

κζ. $8x^2+8x+2$

κη. $2x^2(\alpha-\beta)+x(\beta-\alpha)$

κθ. $8x^3-36x^2+54x-27$

λ. $4x^2+4x+1-4y^2+4y-1$

λα. $\alpha^2-\beta^2-\alpha+\beta-\alpha^2\beta+\alpha\beta^2$

λβ. x^3-3x+2

λγ. $\alpha^2-2\alpha+1-\beta^2$

Λύση της Άσκησης: