

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

A2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

ΑΣ ΘΥΜΗΘΟΥΜΕ ΤΗΝ ΘΕΩΡΙΑ ΜΑΣ ΠΡΙΝ ΛΥΣΟΥΜΕ ΑΣΚΗΣΕΙΣ

1. Εξίσωση πρώτου βαθμού με έναν άγνωστο λέμε κάθε ισότητα της μορφής: $ax+b=0$. Ο x είναι ο άγνωστος της εξίσωσης, ενώ ο a λέγεται συντελεστής του αγνώστου και ο b σταθερός όρος. Τα a και b δεν εξαρτώνται από τον x .
2. Αν $a \neq 0$ τότε έχουμε μία λύση. Ρίζα ή λύση της εξίσωσης λέμε τον αριθμό που την επαληθεύει, δηλαδή αυτόν που αν αντικαταστήσει τον x στην εξίσωση, προκύπτει ισότητα που είναι αληθινή.
3. Μέθοδος επίλυσης εξισώσεων πρώτου βαθμού.
 - i. Κάνουμε απαλοιφή παρονομαστών, αν υπάρχουν.
 - ii. Πολλαπλασιασμοί και απαλοιφή παρενθέσεων.
 - iii. Χωρίζουμε γνωστούς από αγνώστους.
 - iv. Διαιρούμε με τον συντελεστή του αγνώστου.
4. Εξίσωση 2ου βαθμού ονομάζουμε κάθε εξίσωση που έχει την μορφή: $ax^2 + bx + \gamma = 0$, $a \neq 0$. Πολλές φορές οι εξισώσεις αυτές είναι ελλιπούς μορφής και λύνονται γρήγορα χωρίς να χρησιμοποιήσουμε τύπους. Συγκεκριμένα:
 - i. Αν λείπει ο σταθερός όρος ($\gamma=0$) η δευτεροβάθμια θα λύνεται με παραγοντοποίηση.
Π.χ. $2x^2-3x=0$ άρα $x(2x-3)=0$ άρα ή $x=0$ ή $2x-3=0$ κλπ.
 - ii. Αν λείπει ο πρωτοβάθμιος όρος ($\beta=0$) η δευτεροβάθμια θα λύνεται με δύο τρόπους:
 - α. με διαφορά τετραγώνων.
Π.χ. $16x^2-25=0$ άρα $(4x)^2-5^2=0$ άρα $(4x-5)(4x+5)=0$ άρα $4x-5=0$ ή $4x+5=0$ κλπ ή
 - β. με ρίζα. Π.χ. $x^2-2=0$ άρα $x^2=2$ άρα $x=\pm\sqrt{2}$.
5. Μέθοδος επίλυσης εξισώσεων δευτέρου βαθμού
 - i. Για να λύσω μια τέτοια εξίσωση, αρχικά τη φέρνω στη γενική μορφή $ax^2+bx+\gamma=0$ (με $a \neq 0$) και βρίσκω τους συντελεστές a , b και γ ,
 - ii. Μετά θα ελέγχουμε το πρόσημο της ποσότητας που ονομάζεται Διακρίνουσα (Δ) και που δίνεται από τον τύπο $\Delta=b^2-4a\gamma$
 - iii. Τελικά θα χρησιμοποιούμε τον κατάλληλο τύπο που ισχύει παρακάτω:
 - Αν $\Delta > 0$ τότε έχουμε δύο άνισες ρίζες x_1, x_2 που δίνονται από τον τύπο: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$.
 - Αν $\Delta = 0$ τότε έχουμε μία ρίζα διπλή που δίνεται από τον τύπο: $x = \frac{-b}{2a}$.
 - Αν $\Delta < 0$ δεν έχουμε ρίζες.

Παράδειγμα: Να λυθεί η εξίσωση $5x^2-5x-4 = 2x^2-6$

- i. Φέρνω την εξίσωση στη μορφή $ax^2 + bx + \gamma = 0$ μεταφέροντας όλους τους όρους στο 1^ο μέλος. Δηλαδή:
 $5x^2-5x-4-2x^2+6=0$ ή $3x^2-5x+2=0$, οπότε οι συντελεστές είναι: $a=3$ $b=-5$ $\gamma=2$
- ii. Υπολογίζω την Διακρίνουσα αντικαθιστώντας στον τύπο της: $\Delta=b^2-4a\gamma=(-5)^2-4\cdot 3\cdot 2=25-24=1$
- iii. Επειδή $\Delta=1>0$, θα έχουμε δύο άνισες λύσεις που βρίσκουμε από τον τύπο:
$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{1}}{2 \cdot 3} = \frac{5 \pm 1}{6}$$
. Άρα $x_1 = \frac{5+1}{6} = \frac{6}{6} = 1$ και $x_2 = \frac{5-1}{6} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο – ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

A2.2 Εξισώσεις δευτέρου βαθμού

ΑΣΚΗΣΕΙΣ ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ

1. Να λυθούν οι εξισώσεις πρώτου βαθμού:

i) $3x - 4(x - 7) = 5(20 - 3x) - (15x + 14)$

ii) $5x - \frac{15(x+1)}{4} = \frac{10x-5}{3}$

Απαντήσεις: i) $x = 2$ ii) $x = -1$

2. Να λυθούν οι εξισώσεις 2^{ου} βαθμού:

i) $x^2 + 6x = 0$

ii) $2x^2 - 16x = 0$

iii) $5x^2 + 9x = 0$

iv) $x^2 - 49 = 0$

v) $4x^2 - 9 = 0$

vi) $4x^2 - 24 = 0$

vii) $5x^2 + 3 = 0$

Απαντήσεις: i) $x = 0$ ή $x = -6$ ii) $x = 0$ ή $x = 8$ iii) $x = 0$ ή $x = -\frac{9}{5}$ iv) $x = 7$ ή $x = -7$

v) $x = \frac{3}{2}$ ή $x = -\frac{3}{2}$ vi) $x = \sqrt{6}$ ή $x = -\sqrt{6}$ vii) αδύνατη

3. Να λυθούν οι εξισώσεις 2^{ου} βαθμού:

i) $x^2 - 7x + 12 = 0$

ii) $3x^2 + 4x - 7 = 0$

iii) $x^2 - 7x - 18 = 0$

iv) $3x^2 - 15x + 12 = 0$

Απαντήσεις: i) $x = 4$ ή $x = 3$ ii) $x = -\frac{7}{3}$ ή $x = 1$ iii) $x = 9$ ή $x = -2$ iv) $x = 4$ ή $x = 1$

4. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $5(x^2 - 2x) = 4(x^2 - 1) - 5$ ii) $(x + 5)(5x - 20) = 7(x - 4) - 8(x + 5)$

iii) $(2x + 3)^2 = 48 + (x - 1)^2$

Απαντήσεις: i) $x = 9$ ή $x = 1$ ii) $x = -3,2$ ή $x = 2$ iii) $x = 2$ ή $x = -\frac{20}{3}$

5. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i) $(x + 5)(x^2 - 10x + 9) = 0$

ii) $(x^2 - 3x)(3x^2 - 5x + 2) = 0$

iii) $(4x^2 - 25)(x^2 - 8x + 7) = 0$

iv) $(20x^2 - 7x - 6)(x^2 - 4x - 32) = 0$

Απαντήσεις: i) $x = -5$ ή $x = 9$ ή $x = 1$ ii) $x = 0$ ή $x = 3$ ή $x = 1$ ή $x = \frac{2}{3}$
iii) $x = -\frac{5}{2}$ ή $x = \frac{5}{2}$ ή $x = 7$ ή $x = 1$ iv) $x = 8$ ή $x = -4$ ή $x = \frac{3}{4}$ ή $x = -\frac{2}{5}$

6. Να λυθούν οι εξισώσεις:

i. $(1-5x)^2 + x(1-2x) - 6 = 3(4x^2 - 1)$

Απάντηση: 1, -2/11

ii. $x^3 - 4x = 0$

Απάντηση: 0, 2, -2

iii. $(x^2 - 2x - 3) - (5x^2 + 2x - 3) = 0$

Απάντηση: 0, -1

iv. $(x-1)^2 - 5(1-x^2) = 0$

Απάντηση: 1, 2/3

v. $3x^2 - \frac{1}{2} \cdot (x+1) = 6 - \frac{(x-2)^2}{3}$

Απάντηση: $\frac{31}{20}, -1$

vi. $\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 2 = 3 \cdot \left(x + \frac{1}{2}\right)$

Απάντηση: $\frac{3}{2}, \frac{1}{2}$

ΑΛΓΕΒΡΑ Γ' ΓΥΜΝΑΣΙΟΥ
ΚΕΦΑΛΑΙΟ 2^ο – ΕΙΣΩΣΕΙΣ – ΑΝΙΣΩΣΕΙΣ

ΠΡΟΑΙΡΕΤΙΚΑ ΜΠΟΡΕΙΤΕ ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ ΚΑΠΟΙΑ ΑΠΟ ΤΑ ΠΑΡΑΚΑΤΩ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

1. Οι διαστάσεις ορθογωνίου παραλληλογράμμου διαφέρουν κατά 3m. Αν το εμβαδό του είναι $E=108m^2$, βρείτε τις διαστάσεις του.

Απ: 9m, 12m.

2. Αν οι κάθετες πλευρές ορθογωνίου έχουν μήκη x , $2x-8$ και $3x-16$ m, βρείτε τα μήκη αυτά.

Απ: 12m, 16m, 20m.

3. Βρείτε δύο αριθμούς με διαφορά 5 και γινόμενο 104.

Απ: 8 και 13 ή -8 και -13 .

4. Βρείτε δύο διαδοχικούς αριθμούς με άθροισμα τετραγώνων 85.

Απ: 6 και 7 ή -7 και -6 .

5. Το ύψος τριγώνου είναι κατά 4 cm μικρότερο από τη βάση του. Αν το εμβαδό είναι $30cm^2$, βρείτε τη βάση και το ύψος.

Απ: Βάση 10cm, ύψος 6cm.

6. Οι όγκοι δύο κύβων διαφέρουν κατά $387cm^3$. Αν οι πλευρές τους διαφέρουν κατά 3cm, βρείτε τις πλευρές τους.

Απ: 5 cm, 8 cm.

7. Να βρεθεί ο αριθμός που όταν προστεθεί στον αντίστροφό του δίνει άθροισμα $\frac{37}{6}$.

Απ: 6 ή $\frac{1}{6}$