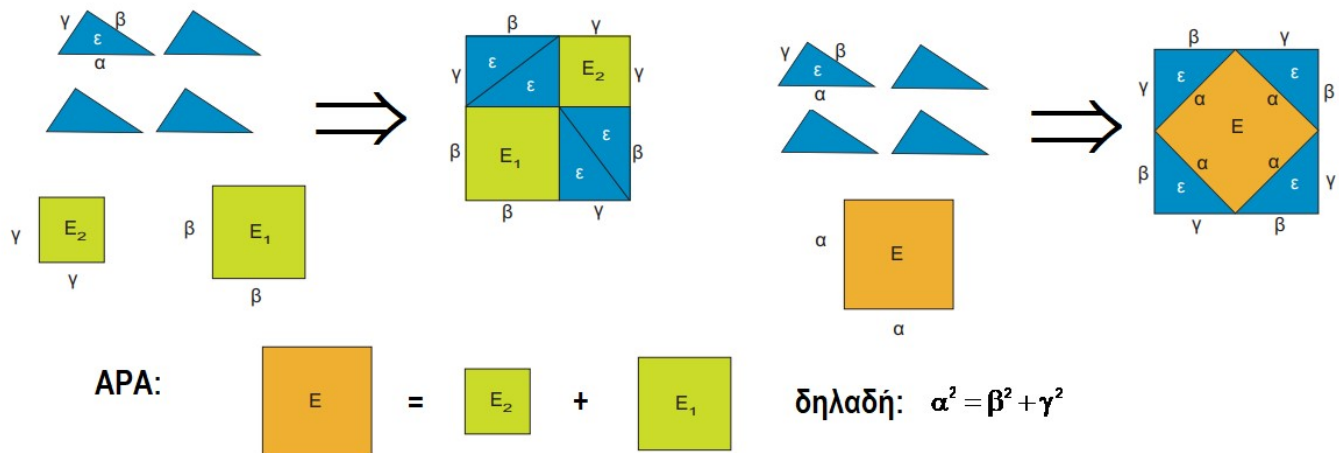


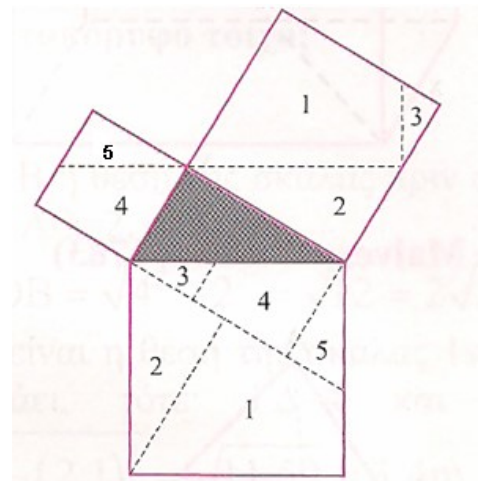


ΜΕΡΙΚΕΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΚΕΣ ΑΠΟΔΕΙΞΕΙΣ ΤΟΥ ΠΥΘΑΓΟΡΕΙΟΥ ΘΕΩΡΗΜΑΤΟΣ

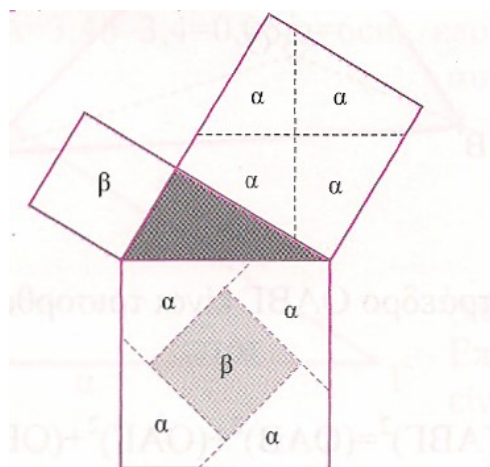
1.



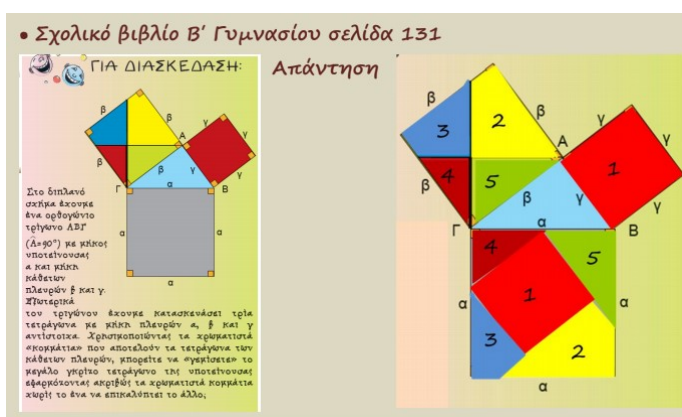
2. ΑΠΟΔΕΙΞΗ (S. de. La Campa – 1902)



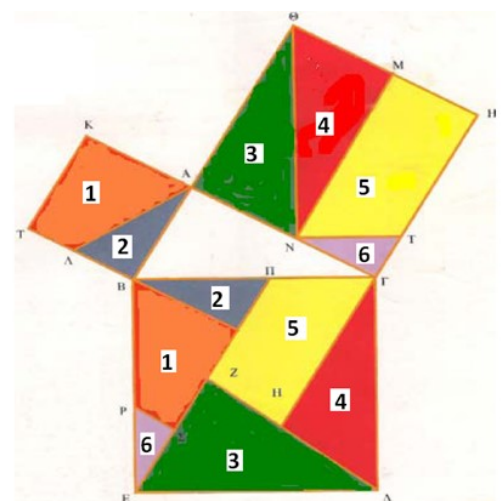
3. ΑΠΟΔΕΙΞΗ (G. Lehr)



4.



5.





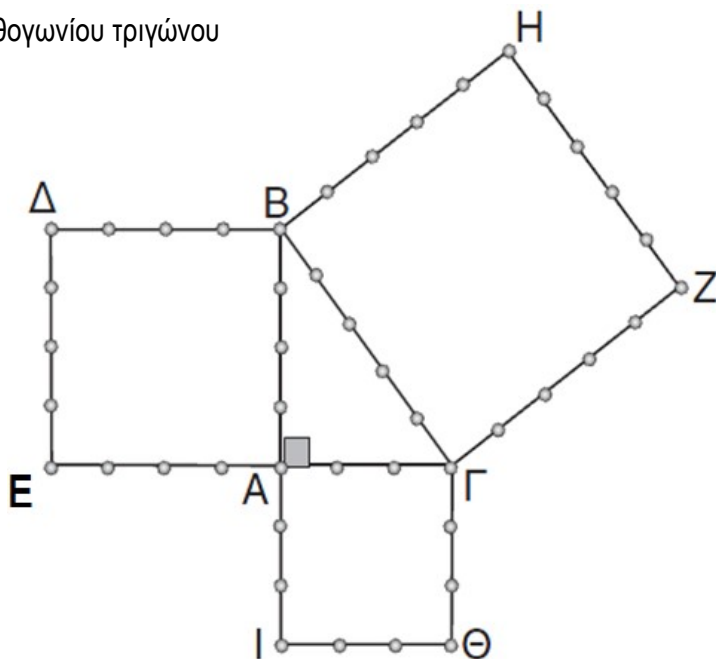
Φύλλο Εργασίας 1^ο

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Ορθογώνιο τρίγωνο λέγεται το τρίγωνο που έχει μια γωνία ορθή. Στο ορθογώνιο τρίγωνο, οι πλευρές που σχηματίζουν την ορθή γωνία λέγονται **κάθετες πλευρές** του ορθογωνίου τριγώνου. Στο ορθογώνιο τρίγωνο η πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την ορθή γωνία λέγεται **υποτείνουσα** του ορθογωνίου τριγώνου

ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:

1. Στο διπλανό σχήμα δίνεται ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ. Οι κάθετες πλευρές του τριγώνου είναι οι και και η υποτείνουσα η



2. Στο εξωτερικό μέρος του τριγώνου ΑΒΓ έχουν κατασκευαστεί τα τετράγωνα:
1) ΑΒΔΕ με πλευρά την, 2) ΑΓΘΙ με πλευρά την και 3) ΒΓΖΗ με πλευρά την
3. Οι τελείες χωρίζουν τις πλευρές του τριγώνου και των τετραγώνων σε ευθύγραμμα τμήματα μήκους 1 cm. Συνεπώς οι πλευρές του τριγώνου ΑΒΓ έχουν μήκος ΑΒ= cm, ΑΓ= cm, και ΒΓ= cm.
4. Να χωρίσετε τα τετράγωνα ΑΒΔΕ, ΑΓΘΙ και ΒΓΖΗ σε τετραγωνάκια πλευράς 1 cm. Το τετράγωνο ΑΒΔΕ χωρίζεται σε τετραγωνάκια και άρα έχει εμβαδό ίσο με cm². Είναι ΑΒ= cm, ΑΒ²= cm².
5. Το τετράγωνο ΑΓΘΙ χωρίζεται σε τετραγωνάκια και έχει εμβαδό ίσο με cm².
Είναι ΑΓ= cm, ΑΓ²= cm².
6. Το τετράγωνο ΒΓΖΗ χωρίζεται σε τετραγωνάκια και άρα έχει εμβαδό ίσο με cm².
Είναι ΒΓ= cm, ΒΓ²= cm².



7. Τα δυο μικρότερα τετράγωνα ΑΓΘΙ και ΑΒΔΕ, τα τετράγωνα δηλαδή που κατασκευάστηκαν από τις κάθετες πλευρές ΑΒ και ΑΓ του ορθογωνίου τριγώνου ΑΒΓ έχουν άθροισμα εμβαδών: $(ΑΒΔΕ)+(ΑΓΘΙ)= \dots\dots\dots + \dots\dots\dots = \dots\dots\dots \text{ cm}^2$.
8. Το μεγαλύτερο τετράγωνο ΒΓΖΗ, δηλαδή το τετράγωνο που κατασκευάστηκε από την υποτείνουσα ΒΓ του ορθογωνίου τριγώνου, έχει εμβαδόν: $(ΒΓΖΗ)= \dots\dots\dots \text{ cm}^2$. Παρατηρούμε ότι $(ΑΒΔΕ)+(ΑΓΘΙ) \dots\dots (ΒΓΖΗ)$ καθώς επίσης και ότι $ΑΒ^2+ΑΓ^2 \dots\dots ΒΓ^2$.
9. **Συμπέρασμα:** Στο ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ του σχήματος, αλλά και γενικότερα για κάθε ορθογώνιο τρίγωνο ισχύει το Θεώρημα (Πυθαγόρειο):

Πυθαγόρειο Θεώρημα

Σε κάθε τρίγωνο ΑΒΓ, το τετράγωνο της υποτείνουσας ισούται με το

.....

Δηλαδή $ΑΒ^2 \dots\dots ΑΓ^2 = ΒΓ^2$. Επίσης ισχύει $ΑΒ^2 = \dots\dots\dots$ και $ΑΓ^2 = \dots\dots\dots$



Φύλλο Εργασίας 2^ο

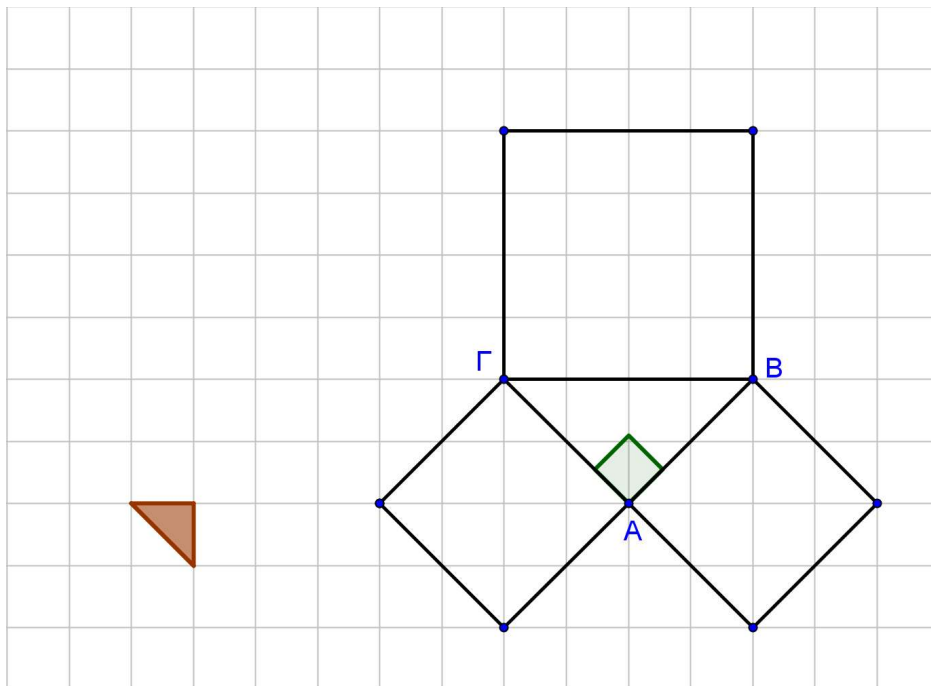
(Πυθαγόρειο Θεώρημα)



ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑ:

Στο διπλανό σχήμα.

1. Να υπολογίσετε το εμβαδόν των τετραγώνων και που έχουν πλευρές τις δυο πλευρές του ορθογωνίου τριγώνου με μονάδα μέτρησης το τριγωνικό πλακάκι που είναι στην άκρη γραμμοσκιασμένο.



ΑΠΑΝΤΗΣΗ

2. Με την ίδια μονάδα μέτρησης να υπολογίσετε το εμβαδόν του τετραγώνου που έχει πλευρά την υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

3. Ποια σχέση συνδέει τα εμβαδά των τριών τετραγώνων;

ΑΠΑΝΤΗΣΗ

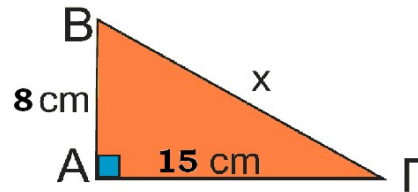


Φύλλο Εργασίας 3^ο

(Πυθαγόρειο Θεώρημα)

1. Στο διπλανό τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{A} = 90^\circ$. Να υπολογίσετε την πλευρά ΒΓ.

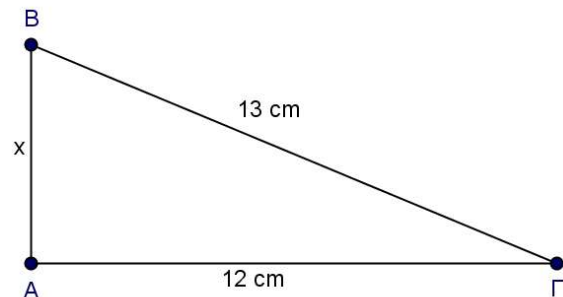
ΛΥΣΗ:



2. Στο παρακάτω τρίγωνο ABΓ είναι $\hat{A} = 90^\circ$.

Να υπολογίσετε την πλευρά AB.

ΛΥΣΗ:

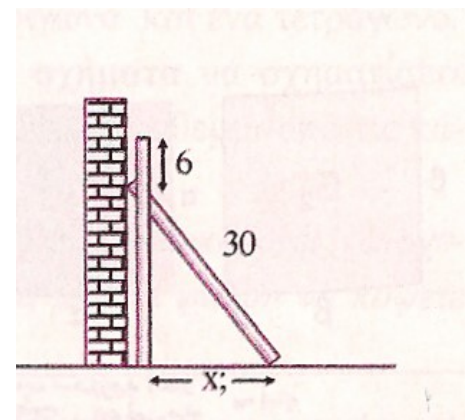


3. Οι Βαβυλώνιοι γνώριζαν το θεώρημα αυτό 1000 χρόνια νωρίτερα, την δόξα όμως την πήρε Ο Πυθαγόρας που πρώτος το απέδειξε. Σε μια πινακίδα της πρώτης βαβυλωνιακής περιόδου(1900-1600 π.Χ) βρίσκουμε γραμμένο το εξής πρόβλημα:

«Ένα δοκάρι που έχει μήκος 30 (ακουμπά κατακόρυφα σε έναν τοίχο). Το πάνω άκρο του γλιστράει προς τα κάτω κατά 6. Πόσο απομακρύνεται το κάτω άκρο;»

Μπορείτε να το υπολογίσετε:

ΛΥΣΗ:





Φύλλο Εργασίας 5^ο

(Αντίστροφο του Πυθαγορείου Θεωρήματος)

1. Να σχεδιάσετε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ΑΒΓ με $(\hat{A} = 90^\circ)$, να μετρήσετε τις πλευρές του και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

β	γ	α	β^2	γ^2	$\beta^2 + \gamma^2$	α^2

Μπορείτε να επιλέξετε από τις απαντήσεις που δίνονται παρακάτω αυτή που νομίζετε ότι ισχύει για τα μήκη των πλευρών ενός ορθογωνίου τριγώνου;

- i) $\beta^2 + \gamma^2 < \alpha^2$ ii) $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$ iii) $\beta^2 + \gamma^2 > \alpha^2$, iv) τίποτε από τα προηγούμενα

2. Να σχεδιάσετε ένα τρίγωνο ΑΒΓ, το οποίο τώρα να μην είναι ορθογώνιο και να έχει μεγαλύτερη πλευρά τη ΒΓ (δηλ. να ισχύει $B\Gamma > AB$ και $B\Gamma > A\Gamma$). Να μετρήσετε τις πλευρές του και να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

β	γ	α	β^2	γ^2	$\beta^2 + \gamma^2$	α^2

Τι παρατηρείτε; Ισχύει η σχέση $\beta^2 + \gamma^2 = \alpha^2$; Τι συμπεραίνετε;

Απάντηση.....
.....

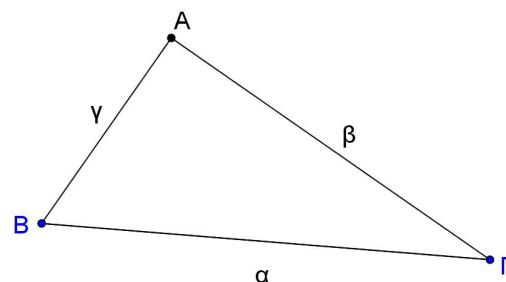


3. Ένα τρίγωνο $AB\Gamma$ έχει πλευρές $\alpha = \frac{17}{3}$, $\beta = 5$ και $\gamma = \frac{8}{3}$

Είναι $\alpha^2 = \dots\dots\dots$, $\beta^2 = \dots\dots\dots$,

$\gamma^2 = \dots\dots\dots$

και $\beta^2 + \gamma^2 = \dots\dots\dots$



Παρατηρούμε ότι: $\beta^2 + \gamma^2 \dots\dots\dots \alpha^2$

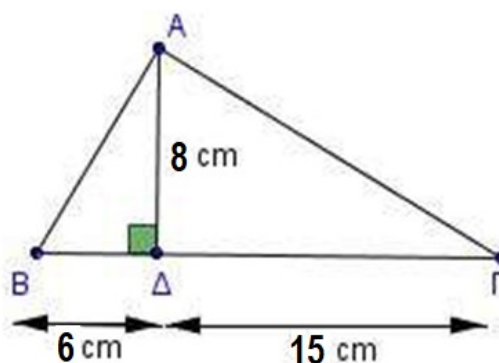
Γενικά : Αν σε ένα τρίγωνο το τετράγωνο της μεγαλύτερης πλευράς είναι ίσο με τα
..... τότε το τρίγωνο είναι ορθογώνιο με ορθή γωνία.....
.....

4. Στο διπλανό τρίγωνο $AB\Gamma$, το ύψος AD είναι 8 cm,

$BD = 6$ cm και $D\Gamma = 15$ cm.

α) Να υπολογίσετε τα μήκη των πλευρών AB και AG

β) Να εξετάσετε αν το τρίγωνο $AB\Gamma$ είναι ορθογώνιο



Λύση :

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....



1) Να συμπληρώσεις τα κενά: « Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο το της είναι ίσο με το των των καθέτων πλευρών.»

2) Να συμπληρώσεις τις ισότητες που προκύπτουν εφαρμόζοντας το Πυθαγόρειο θεώρημα.

α. $ΑΓ^2 = \dots\dots\dots$

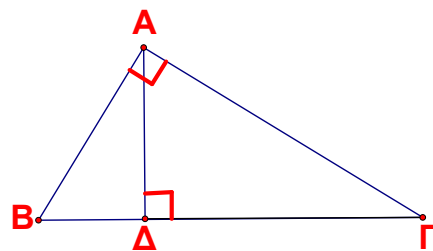
β. $ΒΓ^2 = \dots\dots\dots$

γ. $ΑΒ^2 = \dots\dots\dots$

δ. $ΒΔ^2 = \dots\dots\dots$

ε. $ΔΓ^2 = \dots\dots\dots$

στ. $ΑΔ^2 = \dots\dots\dots$



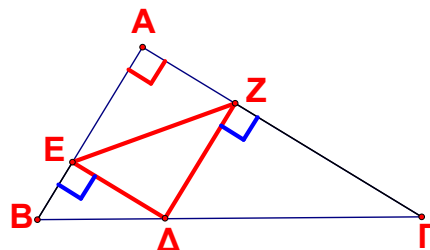
3) Στα κενά να βάλεις τα σύμβολα (+), (-), ώστε να ισχύουν οι ισότητες που προκύπτουν από το σχήμα.

α. $ΔΖ^2 = ΔΓ^2 \dots\dots ΓΖ^2$

β. $ΒΕ^2 = ΒΔ^2 \dots\dots ΕΔ^2$

γ. $ΑΖ^2 = ΕΖ^2 \dots\dots ΑΕ^2$

δ. $ΑΓ^2 = ΒΓ^2 \dots\dots ΑΒ^2$



4) Αν α είναι η υποτείνουσα και β, γ οι κάθετες

πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου, να συμπληρώσεις τον πίνακα:

α	β	γ
	4	3
10		6
13	5	

5) Να χαρακτηρίσεις με Σ ή Λ τις παρακάτω προτάσεις:

α. Αν x, y, z είναι οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και ισχύει $x^2 = y^2 - z^2$, τότε η πλευρά y είναι υποτείνουσα.

β. Αν x, y, z οι πλευρές ενός ορθογωνίου τριγώνου και ισχύει $x < y < z$ τότε $y^2 = x^2 + z^2$

γ. Αν ABΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $\angle B = 90^\circ$, τότε $ΒΓ^2 = ΑΒ^2 + ΑΓ^2$

δ. Αν ABΓ ορθογώνιο τρίγωνο με $\angle \Gamma = 90^\circ$, τότε $ΑΓ^2 = ΑΒ^2 - ΒΓ^2$



6) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $\Gamma=90^\circ$, ισχύει:

A. $AB^2 = A\Gamma^2 + B\Gamma^2$

B. $B\Gamma^2 = AB^2 + A\Gamma^2$

Γ. $A\Gamma^2 = B\Gamma^2 - AB^2$

Δ. $AB^2 = A\Gamma^2 - B\Gamma^2$

7) Αν α, β, γ οι πλευρές ορθογωνίου τριγώνου ABΓ με $B=90^\circ$, τότε:

A. $\alpha^2 = \beta^2 + \gamma^2$

B. $\beta^2 = \alpha^2 - \gamma^2$

Γ. $\gamma^2 = \beta^2 - \alpha^2$

Δ. $\gamma^2 = \alpha^2 - \beta^2$

8) Σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο ABΓ με $A=90^\circ$ δίνεται ότι $\alpha=6\text{ cm}$ και $\beta=3\text{ cm}$. Τότε το εμβαδόν του τετραγώνου με πλευρά ίση με τη πλευρά γ είναι ίσο με:

A. 3 cm^2

B. 27 cm^2

Γ. 45 cm^2

Δ. 9 cm^2

9) Αν x και 2x είναι οι δύο διαστάσεις ενός ορθογωνίου ABΓΔ, τότε για τη διαγώνιό του δ ισχύει ότι:

A. $\delta^2 = 3x^2$

B. $\delta^2 = 2x^2$

Γ. $\delta^2 = x^2$

Δ. $\delta^2 = 5x^2$

ΑΣΚΗΣΗ: Να υπολογίσεις το εμβαδόν του διπλανού τραπεζίου.

Λύση:

