ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Πραγματικοί αριθμοί »

1) Αν οι αριθμοί $A = x - 3y + 4z$ και $B = y - x - 2z$ είναι αντίθετοι, δείξτε ότι $y = z$.

2) Να υπολογισθούν οι παραστάσεις :

$$A = \frac{4 - \dfrac{4 - \dfrac{1}{4}}{4}}{3 - \dfrac{1}{3 - \dfrac{1}{3}}} \quad , \quad B = \frac{1 - \dfrac{1 - \dfrac{1}{2}}{2}}{3 - \dfrac{3}{2 - \dfrac{1}{3}}} \quad , \quad \Gamma = \frac{1}{2} + \frac{2 : \dfrac{1}{2} - 4 + \dfrac{2 + \dfrac{1}{4}}{3}}{\dfrac{1}{2} - \dfrac{2}{3 - \dfrac{5}{3}}}$$

3) Αν $A = 3x + 2y - 5xy$ και $B = 0,7(y - x) - 2(xy - x)$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $\Gamma = 4A - 10B$ για $x = 11,721$ και $y = -18,279$.

4) Αν $\alpha - \beta = \beta + 4$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης : $A = \alpha(\alpha + 4) + 4\beta(\beta - 2) - 4\alpha\beta$.

5) Να γίνουν οι πράξεις :

α) $4\left[3(2 - 5x) + 4(3x + 1)\right] + 5\left[2(1 - 2x) - 3\right]$, β) $5 + 5\left\{3 - 4\left[-2 - 3\left[1 - 2(x + 1)\right]\right]\right\}$.

6) Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων :

$A = 2\left[x(y - 1) - y(x - 2)\right] + 3(x - y)$ και $B = 3x + y(3 - 2x) + 2\left[x \cdot (y - 3) + 10\right]$

για $x = 7,5$ και $y = 2,5$.

7) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης : $A = \alpha(2\alpha - 3) + \beta(2\beta + 3) - 4\alpha\beta$, αν $\alpha - \beta = 3$

και της $B = 2\alpha(6\alpha - 7) + \beta(3\beta + 7) - 12\alpha\beta$, αν $2\alpha = \beta + 5$.

8) Αν $\alpha-3\beta=1$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης : $A=\alpha(\alpha-1)-4\beta(2+\alpha)+\beta(\alpha+8)$.

9) Να βρεθούν οι τιμές του x , για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις :

$$A=\frac{x^2+1}{x-2}\ ,\ \ B=\frac{1}{2-\dfrac{1}{3-x}}\ ,\ \ \Gamma=\frac{\dfrac{2}{x}-1}{1+\dfrac{3}{x}}\ ,\ \ \Delta=\frac{x+2}{2x+3}:\frac{3x+9}{4x^2-9}\ ,\ \ E=\frac{\dfrac{1}{2x}-1}{4-\dfrac{2}{x+1}}\ ,\ \ Z=\frac{2-\dfrac{1}{x+1}}{\dfrac{5}{x}-3}\ .$$

10) Αν $\frac{x}{y}=\frac{3}{2}$, να υπολογισθούν οι παραστάσεις :

$$A=\frac{x}{x+y}\ ,\ \ B=\frac{x-y}{x}\ ,\ \ \Gamma=\frac{3x-y}{2y}\ \ \text{και}\ \ \Delta=\frac{x+y}{x-y}\ .$$

11) Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}\neq 0$, να αποδείξετε ότι : **α)** $\frac{3\alpha-7\beta}{6\beta}=\frac{3\gamma-7\delta}{6\delta}$ και **β)** $\frac{\alpha^2-\beta^2}{\beta^2}=\frac{\gamma^2-\delta^2}{\delta^2}$.

12) Αν $\frac{x}{2}=\frac{y}{4}=\frac{z}{7}$ και $3x-2y+z=10$, να βρεθούν οι x,y,z .

13) Αν $\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\gamma}{\delta}$ και β , δ , $\beta+\delta\neq 0$, δείξτε ότι : $\frac{\alpha^2+\gamma^2}{\beta^2+\delta^2}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\delta}\right)^2$.

14) Αν $\frac{\gamma}{\alpha}=\frac{\beta}{\gamma}$ και α , γ , $\beta+\gamma\neq 0$, δείξτε ότι : $\frac{\alpha}{\beta}=\left(\frac{\alpha+\gamma}{\beta+\gamma}\right)^2$.

15) Αν $\frac{2x+y}{x-y}=\frac{2x-5y}{x-3y}$ και $y\neq 0$, να βρεθεί ο λόγος $\lambda=\frac{x}{y}$.

16) Αν οι α,β είναι άρτιοι ακέραιοι , να δείξετε ότι οι $\alpha\pm\beta$ και αβ είναι άρτιοι .

17) Αν α άρτιος και β περιττός , να δείξετε ότι οι $\alpha\pm\beta$ είναι περιττοί και αβ άρτιος .

18) Αν οι αριθμοί α και β είναι ρητοί , τότε ο αριθμός $\frac{\alpha^2-\beta}{\beta^2+5}$ είναι ρητός .

ΔΥΝΑΜΕΙΣ – ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ – ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ

1) Αν είναι $A=2x^2y^4z^3$ και $B=\frac{1}{2}x^4y^3z$, να βρείτε τα : $A^2\cdot B^2$ και $A^2:B^2$.

2) Αν $x=0,1$ και $y=0,2$, να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων :

$$A=\left(x^{-2}y^{-3}\right)^{-2}:\left(x^4y^4\right)^2 \quad \text{και} \quad B=\left[\left(x^{-1}y^2\right)^{-1}:\frac{x^2}{y^3}\right]^2$$

3) Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

α) $(-0,2)^{15}\,25^8$, **β)** $\frac{(-6)^{24}\cdot(-1,5)^{-20}}{16^{10}}$, **γ)** $15^{50}\cdot(-0,6)^{-49}\cdot 5^{-100}$, **δ)** $12^{80}\cdot 4^{-41}\cdot 6^{-78}$.

4) Να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων :

α) $A=\left[x^3y\left(x^{-2}\right)^{-2}\right]:\left(y^2\right)^{-3}$ για $x=0,5$ και $y=2$.

β) $B=\left[\left(x^{-1}y\right)^{-2}:\left(x^7y^3\right)\right]^{-2}$ για $x=-1,25$ και $y=0,8$.

γ) $\Gamma=\left(x^{-2}y\right)^{-4}:\left(x^5y^{-7}\right)$ για $x=4$ και $y=0,5$.

5) Να υπολογισθούν με την βοήθεια των ταυτοτήτων οι αριθμοί :

α) 4567^2-4564^2 , **β)** $95\cdot 105$, **γ)** 2004^2 , **δ)** 1998^2 , **ε)** $\frac{7,23^2-6,75^2}{13,98}$.

6) Να βρεθούν τα αναπτύγματα :

α) $(4x+y)^2$, **β)** $\left(x^2-y^2\right)^2$, **γ)** $\left(\frac{x}{3}-\frac{y}{4}\right)\cdot\left(\frac{y}{4}+\frac{x}{3}\right)$, **δ)** $\left(x^3-1\right)^3$, **ε)** $\left(x^2+2y^3\right)^3$

στ) $(x+y-z)^2$ και **ζ)** $(x-y-2z)^2$.

7) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αναπτύγματα ταυτοτήτων :

α) $9-\ldots=(\ldots-x)\cdot(3+\ldots)$, **β)** $8\alpha^3+\ldots=(2\alpha+\ldots)\cdot(\ldots+\ldots+1)$, **γ)** $(\ldots+\beta)^2=\ldots+6\alpha^2\beta+\ldots$

δ) $x^4-\ldots=\left(\ldots+x^2\right)\cdot(\ldots-4)$, **ε)** $(x+\ldots)^3=x^3+3x^2\ldots+3x\ldots+8$, **ζ)** $(x-\ldots)^3=x^3-3x^2+3x-\ldots$

8) Αν $\alpha = 0,253$, $\beta = 0,25$ και $\gamma = 0,747$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

$$A = (\alpha+\beta+\gamma)^2 - (\alpha-\beta+\gamma)^2 .$$

9) Αν $\alpha - \beta = 1$ να δείξετε ότι : $\alpha^3 - \alpha^2\beta + \beta^3 - \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$.

10) **α)** Να αποδείξετε ότι : $\alpha\beta = \left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^2$

β) Να γράψετε τον αριθμό 2004 ως διαφορά τετραγώνων .

11) Να δείξετε ότι : $(\alpha^2+2\alpha+1)^2 - (\alpha^2+2\alpha-1)^2 = 4\left[(\alpha+1)^2 - 1\right]$.

12) Αν $\alpha\beta = 2$ και $\alpha+\beta = 5$ να υπολογιστούν τα : **i)** $\alpha^2+\beta^2$ και **ii)** $\frac{1}{\alpha^3}+\frac{1}{\beta^3}$.

13) Αν $x + \frac{1}{x} = 3$, να υπολογισθούν οι παραστάσεις : **α)** $x^2 + \frac{1}{x^2}$ και **β)** $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

14) Να αποδειχθούν οι ταυτότητες :

i) $(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)^3 - \alpha^4 + \beta^4 = 2\alpha\beta(\alpha-\beta)(\alpha+\beta)$, **ii)** $(\alpha+\beta)^2 - 2(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) + (\alpha-\beta)^2 = 4\beta^2$

iii) $(\alpha^2+\beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha^2-\beta^2) = (\alpha^2-\beta^2+2\alpha\beta)^2$, **i v)** $\frac{\alpha^2(\alpha+1)^2}{4} - \frac{\alpha^2(\alpha-1)^2}{4} = \alpha^3$,

v) $(\alpha^3+\beta^3)^2 - (\alpha^2+\beta^2)^3 + 3\alpha^2\beta^2(\alpha+\beta)^2 = (2\alpha\beta)^3$, **vi)** $(\alpha^2+1)(\beta^2+1) - (\alpha\beta+1)^2 = (\alpha-\beta)^2$,

vii) $\alpha^2(\beta-\gamma) + \beta^2(\gamma-\alpha) + \gamma^2(\alpha-\beta) = (\beta-\alpha)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)$.

15) Αν $(\alpha+\beta)^2 = 2(\alpha^2+\beta^2)$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta$, $\alpha,\beta \in \mathbb{R}$.

16) Αν $(x+\alpha)^2 + (y+\beta)^2 = 4(\alpha x + \beta y)$, να δείξετε ότι : $x = \alpha$ και $y = \beta$, $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

17) Αν $x = \alpha - \beta$ να δείξετε ότι : $(x-\alpha)^2 + (x-\alpha)(2\beta-\gamma) + \beta^2 - \beta\gamma = 0$.

18) Αν $\alpha\beta = 3x+1$ και $\alpha+\beta = 2x+2$, να δείξετε ότι : $(2\alpha-3)(2\beta-3)=1$.

19) Αν $\left(\alpha+\dfrac{1}{\alpha}\right)^2 = 3$, να δείξετε ότι : $\alpha^3+\dfrac{1}{\alpha^3}=0$.

20) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, δείξτε ότι : $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2 = 2\left(\beta^2-\alpha\gamma\right)$.

21) Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$, δείξτε ότι : $(\alpha+\beta+\gamma)^2 = \alpha^2+\beta^2+\gamma^2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}+\dfrac{1}{\gamma}=0$.

22) **i)** Να αποδείξετε ότι : $\left(\alpha^2+\beta^2\right)\left(x^2+y^2\right)=(\alpha x+\beta y)^2+(\alpha y-\beta x)^2$, (ταυτότητα Lagrange)

ii) Να γράψετε τον αριθμό $74\cdot 130$, ως άθροισμα τετραγώνων ακεραίων αριθμών .

23) Αν $x^2+y^2=1$, δείξτε ότι η παράσταση : $A=\left(3-2y^2\right)y^4+\left(3-2x^2\right)x^4$, είναι ανεξάρτητη των $x, y \in \mathbb{R}$.

24) Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις :

$A = x^4-1$, $B = x^2y^2-16\alpha^2$, $\Gamma = \alpha^3\beta+2\alpha^2\beta^2+\alpha\beta^3$, $\Delta = x^2-3x+2$, $E = x^2+10x+24$,

$Z = x^2+3x-4$, $H = \dfrac{x^2}{9}+\dfrac{1}{3}xy+\dfrac{y^2}{4}$, $\Theta = 4x^3-8x^2+4x$, $I = 27x^3-8y^3$, $K = \alpha^2-\beta^2+4\beta-4$.

25) **i)** Δείξτε ότι : $\dfrac{\alpha^3+\beta^3}{(\alpha-\beta)^2+\alpha\beta}=\alpha+\beta$

ii) Να υπολογισθεί το κλάσμα: $\dfrac{333^3+33^3}{300^2+333\cdot 33}$.

26) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις :

α) $\dfrac{x^2-\alpha^2}{x^2-\alpha x}$, **β)** $\dfrac{x^3\alpha-x\alpha^3}{x^2\alpha+x\alpha^2}$, **γ)** $\dfrac{\alpha x^2\left(x^2+5x+6\right)}{\alpha^2 x\left(x^2-9\right)}$, **δ)** $\dfrac{\left(x^4-16\right)\left(x^2-x\right)}{\left(x^3-x\right)\left(x^3-4x\right)}$, **ε)** $\dfrac{2x^2-\alpha x-\alpha^2}{x-\alpha}$

27) Να γίνουν οι πράξεις :

α) $\dfrac{2}{x^2-\alpha x}+\dfrac{3}{\alpha x-\alpha^2}$, **β)** $\dfrac{x}{\alpha+x}\cdot\dfrac{x^2+2\alpha x+\alpha^2}{x^2-3x}$, **γ)** $\left(\dfrac{\alpha^2}{\alpha^2-\beta^2}-\dfrac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta}\right)\cdot\dfrac{\alpha+\beta}{2\alpha-\beta}+\dfrac{\alpha}{\beta-\alpha}$.

28) Όμοια οι πράξεις :

α) $\left[\dfrac{\alpha+3\beta}{\alpha^2-\beta^2}+\dfrac{\alpha-3\beta}{(\alpha-\beta)^2}\right]:\dfrac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}$, **β)** $\left(\dfrac{1}{\alpha^2-9}\cdot\dfrac{3\alpha^2+9\alpha}{\beta-\alpha}-\dfrac{3\alpha}{9-3\beta-3\alpha+\alpha\beta}\right)\cdot\dfrac{\beta^3-27}{3\alpha}$,

γ) $\left[\left(\dfrac{3\alpha}{\alpha^3-\beta^3}\cdot\dfrac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta}-\dfrac{3}{\beta-\alpha}\right):\dfrac{\alpha+\beta}{3}\right]\cdot\dfrac{\alpha-\beta}{9}$, **δ)** $\dfrac{1}{(\alpha+\beta)^2}\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha^2}+\dfrac{1}{\beta^2}\right)+\dfrac{2}{(\alpha+\beta)^3}\cdot\left(\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{1}{\beta}\right)$

ε) $\left[\left(1-\dfrac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2}\right):\left(\dfrac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta}-3\alpha\beta\right)\right]\cdot\left(\alpha^2+\beta^2\right)$, **στ)** $\dfrac{\alpha^2-1}{\beta^2+\alpha\beta}\cdot\left(\dfrac{1}{1-\dfrac{1}{\beta}}-1\right)\cdot\dfrac{\alpha-\alpha\beta^3-\beta^4+\beta}{1-\alpha^2}$.

29) Αν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ δείξτε ότι :

i) $2\beta\gamma=4\tau(\tau-\alpha)+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2$, **ii)** $\tau(\tau-\alpha)+(\tau-\beta)(\tau-\gamma)=\beta\gamma$,

iii) $(2\alpha\tau+\beta\gamma)(2\beta\tau+\alpha\gamma)(2\gamma\tau+\alpha\beta)=(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2$.

30) Αν $\alpha+\beta+\gamma=0$, να αποδείξετε ότι : $\dfrac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta}+\dfrac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma}+\dfrac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma}=0$

όπου : $\alpha+\beta\neq0$, $\beta+\gamma\neq0$ και $\alpha+\gamma\neq0$.

31) Αν $\dfrac{x}{y}+\dfrac{y}{z}+\dfrac{z}{x}+\dfrac{y}{x}+\dfrac{z}{y}+\dfrac{x}{z}+3=0$, με $xyz\neq0$, να αποδειχθεί ότι : $x+y+z=0$ ή

$xy+yz+zx=0$

32) Αν $\alpha^2+\beta^2+\alpha^2\cdot\beta^2-10\cdot(\alpha+\beta+\alpha\beta)+61=0$, δείξτε ότι : $\alpha^3+\beta^3=35$.

33) Αν $\alpha,\beta,\gamma\in\mathbb{R}$ και $3\left(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\right)=(\alpha+\beta+\gamma)^2$ τότε : $\alpha=\beta=\gamma$.