

ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΑΛΓΕΒΡΑΣ

(ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ)



ΕΠΙΜΕΛΕΙΑ ΘΕΜΑΤΩΝ

ΔΑΜΙΑΝΟΣ ΓΙΑΝΝΗΣ
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΟΣ



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
(ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ)

1. Δίνεται η παράσταση : $(\sqrt{3-x} - \sqrt{x+2}) \cdot (\sqrt{x+2} + \sqrt{3-x})$
 - α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση A .
 - β) Να απλοποιήσετε την παράσταση A .
 - γ) Να βρείτε την ελάχιστη και μέγιστη τιμή της παράστασης A .
2. Δίνεται η εξίσωση: $\lambda^2(x-2) = -1 - \lambda(\lambda-x)$ (1). Αν η εξίσωση (1) είναι ταυτότητα τότε:
 - α) να βρείτε τον αριθμό λ β) να λύσετε την εξίσωση: $|x-\lambda| = 3x-7$
3. Σε μια αριθμητική πρόοδο είναι $\alpha_6 = 12$ και $S_6 = 42$.
 - α) Να βρείτε τον 5ο όρο της προόδου και β) το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της.
4. Δίνεται η συνάρτηση : $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2+x+6}}{|x-1|-2}$
 - α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
 - β) Να εξετάσετε αν το σημείο $\Sigma(2, -2)$ ανήκει στην γραφική της παράσταση.
 - γ) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$
5. Σε μια Γεωμετρική Πρόοδο έχουμε ότι $\alpha_1 = x$, $\alpha_2 = 2x+2$ και $\alpha_3 = 5x+8$ με $x > 0$.
 - α) Να δείξετε ότι $x=2$.
 - β) Να βρείτε το λόγο λ της Γεωμετρικής Προόδου.
 - γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα των έξι πρώτων όρων της.
6. Σε αριθμητική πρόοδο (α_n) δίνεται ότι: $\alpha_3 + \alpha_9 = 24$. Να βρείτε i) τον α_6 και ii) S_{11}
7. A. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -x^2 + 7x - 10$.
 Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν επιλέγοντας την κατάλληλη ένδειξη Σ για το σωστό Λ για το λάθος:
 1. $f(-1567) > 0$
 2. $f(2) = 0$
 3. $f(-\sqrt{10}) < 0$
 4. $f(k^2+120) > 0$
 (να δικαιολογήσετε την απάντησή σας)

 B. Να βρεθεί η απόσταση (AB) όπου $A(1, f(1))$, $B(3, f(3))$.
8. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - 2\lambda x + \lambda(\lambda+1) = 0$ (1) όπου $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - α) Αν S, P είναι το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών της (1) αντίστοιχα και $S+P=4$, να βρεθεί το $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - β) Για την μικρότερη τιμή του λ να βρεθεί η τιμή της παραστάσεως $A = 3x_1 + 5x_1x_2 + 3x_2$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες της (1).



9. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{-(x-1)^2 - 5|1-x| + 6}{|x-1| - 2}$.

- α) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f , β) Να δείξετε ότι: $f(x) = 3 - |x-1|$
 γ) Να λυθεί η εξίσωση: $f(x) = 2$, δ) Να γραφεί η f χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής,
 ε) Να λυθεί η ανίσωση: $f(f(4)) \cdot x^2 + f(-6) \cdot x + f(10) \geq 0$

10. Δίνεται η εξίσωση $x^2 - \lambda x + \lambda - 1 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- i) Να δείξετε ότι η εξίσωση έχει πραγματικές λύσεις.
 ii) Να βρεθεί ο λ ώστε η (1) να έχει διπλή ρίζα την οποία να βρείτε.
 iii) Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης να βρείτε το λ ώστε να ισχύει $2x_1 + x_2 = 3\lambda$.
 iv) Να κατασκευάσετε εξίσωση δευτέρου βαθμού με ρίζες: $\rho_1 = 3x_1 - 2$ και $\rho_2 = 3x_2 - 2$.

11. A. Να λυθεί η εξίσωση: $\frac{2-3|x+3|}{4} + \frac{|2x+6|-1}{3} = |-x-3|-2$

- B. i) Να γίνουν οι ταυτότητες: $(5-2\sqrt{11})^2$ και $(5+2\sqrt{11})^2$
 ii) Να υπολογισθεί η παράσταση $K = \sqrt{69+20\sqrt{11}} - \sqrt{69-20\sqrt{11}}$

12. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 3x - 1 = 0$ (1)

- A. Να δείξετε ότι η (1) έχει δύο ρίζες x_1, x_2 πραγματικές, άνισες και ετερόσημες.
 B. Να υπολογισθεί η τιμή κάθε μιας από τις παραστάσεις: i) $\frac{2}{x_1} + \frac{2}{x_2}$ ii) $x_1^2 + x_2^2$
 Γ. Αν οι ρίζες της εξίσωσης: $2x^2 - 5\beta x + 6\gamma = 0$ είναι κατά μία μονάδα μεγαλύτερες από τις ρίζες της εξίσωσης (1), να υπολογίσετε τους πραγματικούς αριθμούς β και γ

13. Αν οι αριθμοί $x-4$, $x+4$, και $3x-4$ είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου (α_n)

- A. Να βρεθεί ο $x \in \mathbb{R}$.
 B. Αν $\alpha_5 = x - 4$, τότε:
 i) να βρείτε τους α_1 και ω ii) το S_{20} και iii) αν $\alpha_v = 100$, να βρεθεί ο v

14. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{\sqrt{3-|x-1|}}{|2x-3|-5}$

- A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της.
 B. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $K = 2 \cdot f(0) \cdot f\left(-\frac{3}{2}\right) - [2 \cdot f(3)]^{2026} - 7\sqrt{11} \cdot f\left(\frac{3}{4}\right) + 2024$

15. Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο: $f(x) = \frac{x^3 - 4x}{x^2 + 2x}$

- A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της. B. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
 Γ. Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής της παράστασης με τους άξονες $x'x$ και $y'y$.
 Δ. Να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $\Sigma = \frac{2024^3 - 4 \cdot 2024}{2024^2 + 2 \cdot 2024}$

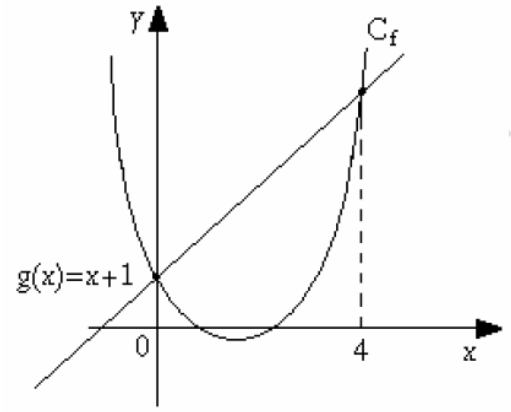


- 16.** Οι αριθμοί $3x-2$, $x+1$ και $2x-5$ είναι διαδοχικοί όροι μίας αριθμητικής προόδου (a_n)
- 1) Να αποδείξετε ότι $x=3$.
 - 2) Να βρείτε τη διαφορά ω της προόδου.
 - 3) Αν ο αριθμός $3x-2$ είναι ο **έκτος** όρος της προόδου, να βρείτε:
 - α) τον πρώτο όρο της προόδου
 - β) το άθροισμα των 20 πρώτων όρων της προόδου.
- 17.** Έστω η εξίσωση: $x^2 - 3x - \mu^2 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (1)
- A. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$.
 - B. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του μ :
 - i) η παράσταση $A = \rho_1\mu + \rho_2(\mu - \rho_1)$ παίρνει το πολύ την τιμή -2 .
 - ii) οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \rho_1^2x + 2026$ και $\varepsilon_2: y = (27 - \rho_2^2)x - 2027$ είναι παράλληλες.
- 18.** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης: $x^2 - 2x - 4 = 0$ τότε:
- A. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $\alpha = (1 + x_1)^{2027} \cdot (1 + x_2)^{2027}$
 - B. Αν $\alpha = -1$:
 - i) να δείξετε η παράσταση $\Sigma = (\alpha x_1 + 2) \cdot (\alpha x_2 + 2)$ είναι ίση με -4
 - ii) να βρεθεί η εξίσωση 2ου βαθμού με ρίζες $\rho_1 = \frac{\alpha}{x_1}$ και $\rho_2 = \frac{\alpha}{x_2}$
 - iii) να λυθεί η ανίσωση: $x^2 + \frac{\Sigma}{2} \leq \alpha \cdot x$
- 19.** Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (3\lambda - 1) \cdot x + \lambda^2 - 1 = 0$, (1) με $\lambda \in \mathbb{R}$.
- α) Να δείξετε ότι η (1) έχει ρίζες πραγματικές και άνισες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$.
 - β) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1), να βρεθεί ο $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε: $x_1^2 + x_2^2 \leq x_1 \cdot x_2 + 16$
 - γ) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο ερώτημα β), να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης:

$$M = \sqrt{\lambda^2 + 2\lambda + 1} + \sqrt{\lambda^2 - 4\lambda + 4}$$
- 20.** Δίνεται η αριθμητική πρόοδος (a_n), $n \in \mathbb{N}^*$, με πρώτο όρο $a_1 = 1$ και διαφορά $\omega = 1$. Έστω επίσης η συνάρτηση g με $g(x) = 2x - 1$, $x \in \mathbb{R}$ και το σημείο $A(k, a_3)$, $k \in \mathbb{R}$ της γραφικής παράστασης της g .
- α) Να αποδείξετε ότι: $a_3 = 3$ και στη συνέχεια να βρείτε το k .
 - β) Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\sqrt{g(2)+1}} - \frac{1}{\sqrt{g(2)-1}} = -1$, γ) Να λύσετε την εξίσωση: $\frac{|g(x)|-1}{2} + \frac{|g(x)|+3}{3} = 3$
- 21.** α) Να λύσετε την εξίσωση $|2x - 1| = 3$
 β) Αν α, β με $\alpha < \beta$ είναι οι ρίζες της εξίσωσης του ερωτήματος (α), τότε να λύσετε την ανίσωση $\alpha x^2 + \beta x + 3 < 0$
- 22.** Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = x^2 + \beta x + \kappa\lambda$, $\kappa, \lambda, \beta \in \mathbb{R}$.
- α) Αν οι αριθμοί $\kappa, \frac{\beta}{2}, \lambda$ είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου, να δείξετε ότι η $f(x) = 0$ έχει μια διπλή ρίζα.
 - β) Αν η διπλή ρίζα είναι το 1, να δείξετε ότι $\beta = -2$.
 - γ) Αν $\beta = -2$, να λυθεί η ανίσωση $f(x) \leq 0$.



23. Στο διπλανό σχήμα φαίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων $f(x)$ με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$ και $g(x) = x + 1$.



- α)** Να βρείτε τα $f(0)$ και $f(4)$
- β)** Να βρείτε τις λύσεις της εξίσωσης $f(x) = x + 1$
- γ)** Να βρείτε τις λύσεις της ανίσωσης $f(x) < x + 1$
- δ)** Αν η πιο πάνω συνάρτηση f έχει μορφή $f(x) = x^2 + \beta x + \gamma$ να δείξετε ότι $\beta = -3$ και $\gamma = 1$.

24. Δίνεται το τριώνυμο: $\lambda x^2 - (\lambda^2 + 1)x + \lambda$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{0\}$

- α)** Να βρείτε τη διακρίνουσα Δ του τριωνύμου και να αποδείξετε ότι το τριώνυμο έχει ρίζες πραγματικές για κάθε $\lambda \neq 0$
- β)** Αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του τριωνύμου, να εκφράσετε το άθροισμα $S = x_1 + x_2$ συναρτήσει του $\lambda \neq 0$ και να βρείτε την τιμή του γινομένου $P = x_1 \cdot x_2$ των ριζών.
- γ)** Αν $\lambda > 0$, το παραπάνω τριώνυμο έχει ρίζες θετικές ή αρνητικές; Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.
- δ)** Για κάθε $\lambda > 0$, αν x_1, x_2 είναι οι ρίζες του παραπάνω τριωνύμου να αποδείξετε ότι $\sqrt{x_1 x_2} \leq \frac{x_1 + x_2}{2}$

25. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2(\lambda - 1) \cdot x + \lambda - 1 = 0$ (1) $\lambda \in \mathbb{R}$.

- α)** Να βρεθεί ο λ ώστε η εξίσωση (1) να έχει ρίζες πραγματικές και άνισες.
- β)** Αν x_1, x_2 οι ρίζες της (1) με $x_1 \cdot x_2 - x_1 - x_2 = 0$ τότε:
 - i)** να δείξετε ότι: $\lambda = 3$ και
 - ii)** να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $A = x_1^2 \cdot x_2 + x_1 \cdot x_2^2$, $B = \frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1}$
 - iii)** να λυθεί η ανίσωση: $|x + A| \leq |x + B|$

26. Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^2 + \lambda \cdot |x| - \lambda - 1}{|x| - 1}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ και $f(-4) = 7$

- α)** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f , **β)** να δείξετε ότι $\lambda = 2$,
- γ)** να δείξετε ότι $f(x) = |x| + 3$
- δ)** για ποιες τιμές του x ορίζεται το $f(x - 4)$; **ε)** να λυθεί η ανίσωση: $f(x - 4) \leq 5$



ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

1. Δίνεται το τριώνυμο $f(x) = -3x^2 + 2(\lambda - 1)x - 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε $f(x) < 0$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

B) Για $\lambda = -1$, να λυθεί η εξίσωση: $|f(x)| - x = 9$

2. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\mu + 1) \cdot x + (\mu + 1) = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$.

A) Να βρεθεί η τιμή του μ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες.

B) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να λυθεί η εξίσωση:

$$\frac{2|x_1 + x_2 - 20| + 1}{3} - \frac{|20 - x_1 \cdot x_2| + 1}{2} = \frac{19}{6}$$

3. Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (3\lambda - 1) \cdot x + 3 - \lambda = 0$.

A) Να βρεθούν οι τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$, ώστε η εξίσωση να έχει δύο ρίζες ετερόσημες.

B) Αν x_1, x_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:

$$f(\lambda) = \sqrt{|x_1 + x_2 + 4 - \lambda| - 2|x_1 \cdot x_2| + 9}$$

4. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \kappa\sqrt{x+1}$, $x \geq -1$, $\kappa \in \mathbb{R}$.

A. Να βρεθεί η τιμή του κ ώστε το σημείο $A(3, 8)$ να ανήκει στη γραφική παράσταση της f

Για την τιμή του κ που βρήκατε στο A. ερώτημα:

B. Να βρεθεί η απόσταση των σημείων $A(3, 8)$ και $B(8, f(8))$.

5. Έστω η συνάρτηση f με $f(x) = \frac{\sqrt{|x-1|-2}}{x-4}$.

A. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της f .

B. Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τους άξονες και σε ποια σημεία;

Γ. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης $[f(-1) - 3f(7)] \cdot \left[2f(12) - \frac{9}{8}f(-5) \right]$.

6. Δίδονται τα τριώνυμα $P(x) = -x^2 + 4x - 4$, $Q(x) = x^2 + 1$, $K(x) = x^2 - 5x + 6$.

A. Να βρεθεί το πρόσημο σε κάθε ένα από τα παραπάνω τριώνυμα για κάθε $x \in \mathbb{R}$

B. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \frac{P(x) \cdot Q(x)}{K(x)}$ και τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες $x'x$ και $y'y$

7. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 - (\lambda - 1)x + 2\lambda - 2 = 0$ (1), $\lambda \in \mathbb{R}$.

A. Να βρείτε τις τιμές του λ ώστε να έχει 2 πραγματικές και ίσες ρίζες.

B. Αν $\lambda = \frac{1}{4}$ και x_1, x_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), χωρίς να βρεθούν αυτές, να βρείτε την τιμή της παράστασης:

$$A = \frac{6}{x_1} + \frac{6}{x_2} - x_1^2 x_2 - x_1 x_2^2.$$



8. Δίνεται η ανίσωση : $\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} < \frac{|x-1|}{3}$, με $x \in \mathbb{R}$

α. Να δείξετε ότι $x \in \Delta = (-1, 3)$,

β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης $f(x) = |x+1| - |x-3|$ αν αυτή έχει πεδίο ορισμού το διάστημα Δ .

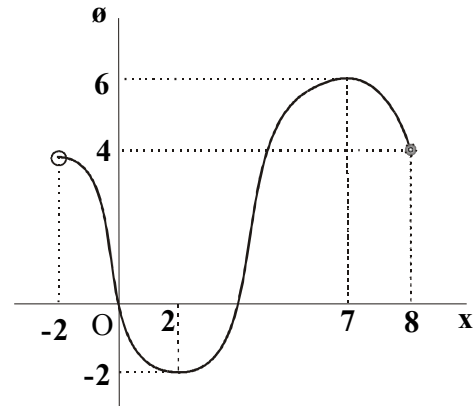
9. Στο σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και το σύνολο τιμών της

β. Να βρείτε τα διαστήματα μονοτονίας και τα ακρότατά της.

γ. Να υπολογίσετε την παράσταση :

$$A = [f(0) - 2f(2)] \cdot \frac{\sqrt{4f(8)} - 2023f(0)}{f(0) + f(7) + f(2)}$$



10. Οι αριθμοί p_1 και p_2 είναι οι ρίζες εξίσωσης 2ου βαθμού με $S = p_1 + p_2$, $P = p_1 p_2$ τέτοια ώστε $P + 2S = 2$ και $P - 2S = -10$.

α. Να δείξετε ότι $S = 3$ και $P = -4$,

β. Να βρείτε την εξίσωση $x^2 + kx + \lambda = 0$ που έχει ρίζες τους $p_1 + 2$ και $p_2 + 2$,

γ. Να λύσετε την ανίσωση $x^2 + kx + \lambda \leq 0$

11. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x|} - 1$

A) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της

B) Να βρεθούν τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τον άξονα $x'x$

Γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $y'y$

12. Δίνεται η εξίσωση $\lambda x^2 + (\lambda - 1)x + \lambda - 1 = 0$ με $\lambda \neq 0$.

A) Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο ρίζες πραγματικές και ίσες

B) Για τις τιμές του λ που βρήκατε στο A) ερώτημα, να αποδείξετε ότι οι ευθείες $y = (2\lambda + 1)x + 2$ και $y = 3\lambda(\lambda x - 1)$ είναι παράλληλες.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x-1| - 1$

α. Να δείξετε ότι $f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ β. Να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση βρίσκεται πάνω από τον $x'x$.

γ. Να δείξετε ότι $f(x) = x - 2$ όταν $x \geq 1$



14. Δίνονται οι παραστάσεις $\alpha(x) = x^2 - 4$, $\beta(x) = 2x^2 + 3x - 2$.

α. Να παραγοντοποιήσετε τις παραστάσεις $\alpha(x)$ και $\beta(x)$

β. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε την παράσταση $f(x) = \frac{(x-2)\beta(x)}{\alpha(x)}$

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = (\lambda-1)x^2 - \lambda^2x + 3$ με $\lambda \in \mathbb{R}$, της οποίας η γραφική παράσταση είναι μια παραβολή που περνά από το σημείο $A(1,0)$

α. Να δείξετε ότι το $\lambda = 2$ (καλύτερα να βρείτε την τιμή του λ)

β. Να σχηματίσετε την εξίσωση που έχει ρίζες τις $\rho_1 = \frac{1}{x_1}$, $\rho_2 = \frac{1}{x_2}$, όπου x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$.

16. Δίνονται οι ευθείες: $(\varepsilon_1): y = (\lambda-4)x + 11$ και $(\varepsilon_2): y = (11-2\lambda)x + 2$ με $\lambda \in \mathbb{R}$.

A) Να βρείτε την τιμή του λ ώστε οι (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες.

B) Για $\lambda = 5$

α) Να γράψετε τη μορφή που παίρνουν οι (ε_1) και (ε_2)

β) Αν A είναι το σημείο στο οποίο η (ε_1) τέμνει τον άξονα $x'x$ και B το σημείο στο οποίο η (ε_2) τέμνει τον άξονα $y'y$, να βρείτε την απόσταση (AB) .

17. Δίνονται τα τριώνυμα: $P(x) = x^2 - 5x + 4$, $Q(x) = 9 - x^2$ και $K(x) = x^2 + x + 1$.

A) Να λύσετε κάθε μια από τις ανισώσεις: $P(x) \geq 0$, $Q(x) \geq 0$ και $K(x) \leq 0$.

B) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f(x) = \sqrt{P(x)} + \frac{K(-1)}{\sqrt{Q(x)}}$

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x - \frac{1}{x}}{x^2 - 1}$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να απλοποιήσετε τον τύπο της

B) Να λύσετε την ανίσωση $|f(x)| > 1$

19. Έστω η εξίσωση $x^2 - 3x - \mu^2 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ (1)

α. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση (1) έχει δύο ρίζες άνισες για κάθε $\mu \in \mathbb{R}$

β. Αν ρ_1, ρ_2 είναι οι ρίζες της εξίσωσης (1), να βρείτε για ποιες τιμές του μ :

i) η παράσταση $A = \rho_1\mu + \rho_2(\mu - \rho_1)$ παίρνει το πολύ την τιμή -2 .

ii) οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \rho_1^2x + 2023$ και $\varepsilon_2: y = (27 - \rho_2^2)x - 2024$ είναι παράλληλες.



20. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \lambda^2 x + 5$ και $(\varepsilon_2): y = (5\lambda - 6)x + 8$ όπου ο λ είναι πραγματικός αριθμός.

A) Να υπολογίσετε το λ ώστε οι ευθείες (ε_1) και (ε_2) να είναι παράλληλες

B) Για $\lambda = 2$

α) να αποδείξετε ότι το σημείο $A(-1, 1)$ είναι σημείο της ευθείας (ε_1) και ότι το σημείο $B(-1, 4)$, είναι σημείο της ευθείας (ε_2)

β) να υπολογίσετε την απόσταση των σημείων $A(-1, 1)$ και $B(-1, 4)$

21. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{4-|x|}}$

A) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f

B) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης $\sqrt{(f(2) - 1)^2} + \sqrt{(f(-2) - 1)^2}$

22. Δίνεται ο πραγματικός αριθμός λ και η εξίσωση $x^2 + (1 - \lambda)x + 1 = 0$, η οποία έχει δύο ρίζες πραγματικές και άνισες, τις x_1 και x_2

A) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία παίρνει τιμές ο λ

B) Να λύσετε την ανίσωση $(x_1^2 + x_2^2 + 1)(x_1 + x_2 - 2x_1 \cdot x_2) < 0$, ως προς λ

23. α. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{|x-1|-4}{2} + \frac{5}{3} = \frac{|x-1|}{3}$.

β. Για την μεγαλύτερη λύση που βρήκατε στο α. ερώτημα υπολογίστε την τιμή της παράστασης

$$A = \sqrt[3]{x+5} \cdot \sqrt[3]{2-\sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{2+\sqrt{x}}$$

24. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = (\lambda^2 - 4)x + 4$ και $(\varepsilon_2): y = (3\lambda - 6)x - 6$

α. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες είναι παράλληλες;

β. Για $\lambda = 1$ να βρείτε το σημείο A που τέμνει η ευθεία (ε_1) τον άξονα $\psi'\psi$ και το σημείο B που τέμνει η (ε_2) τον άξονα $\chi'\chi$.

γ. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο ABΓ με $\Gamma(-5, 4)$ είναι ισοσκελές με κορυφή το Γ.

25. α. Να λυθεί η εξίσωση $\frac{|2x-1|-3}{2} - 1 = 0$

β. Να υπολογισθεί η παράσταση $\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}-\sqrt{2}} + \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$

γ. Αν x_1 είναι η μεγαλύτερη λύση της εξίσωσης του πρώτου ερωτήματος και x_2 η τιμή της παράστασης του δεύτερου ερωτήματος, να βρείτε εξίσωση 2ου βαθμού που να έχει ως ρίζες τους αριθμούς x_1, x_2 .

26. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{|x+2|-3} + k$, $k \in \mathbb{R}$

α. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .

β. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f διέρχεται από το σημείο $A(5, 3)$ να βρείτε τη τιμή του k .

γ. Για $k = 1$

1) να βρείτε σε ποια σημεία τέμνει τους άξονες $\chi'\chi$ και $\psi'\psi$ (αν τους τέμνει) η γραφική παράσταση της f .

2) να δείξετε ότι $f(2021) \cdot (\sqrt{2020} - 1) = 2019$



27. Δίνονται οι αριθμοί $\lambda = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}}$ και $\mu = 1 - \sqrt[3]{8}$

Α. Να αποδείξετε ότι $\lambda = \frac{1}{2}$ και $\mu = -1$

Β. Να αποδείξετε ότι οι ευθείες $\varepsilon_1 : y = (1 + 2\lambda)x + \mu$ και $\varepsilon_2 : y = (1 + |\mu|)x + \lambda$ είναι παράλληλες

Γ. Να βρεθεί το σημείο στο οποίο η ε_1 τέμνει τον $y'y$

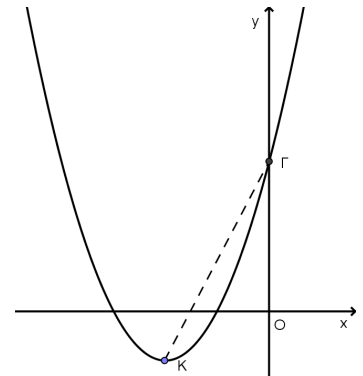
28. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 + (\lambda + 1)x + \lambda$

1. Να δείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε $\lambda \in \mathbb{R}$

2. Για $\lambda = 5$

α. Να βρείτε τα σημεία στα οποία η γραφική παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$

β. Να αποδείξετε ότι η απόσταση της κορυφής Κ, της γραφικής παράστασης της f , από το σημείο Γ που γραφική παράσταση τέμνει τον άξονα $y'y$ είναι $(ΚΓ) = 3\sqrt{10}$



29. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|-x^2 + x - 2| - 4}{x^2 - 6x + 8}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της A

2. α. Να αποδείξετε ότι: $-x^2 + x - 2 < 0$, για κάθε πραγματικό αριθμό x

β. Να αποδείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f απλοποιείται στη μορφή $f(x) = \frac{x+1}{x-4}$, $x \in A$

3. Να λύσετε την ανίσωση $x \cdot f(x) > -\frac{f(5)}{2}$

30. Δίνονται οι ευθείες $(\varepsilon_1): y = \lambda^2 x + 8$ και $(\varepsilon_2): y = (5\lambda - 6)x + 1$

α. Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ οι ευθείες είναι παράλληλες.

β. Για $\lambda = 2$ να βρείτε τις εξισώσεις των ευθειών (ε_1) και (ε_2)

γ. Αν Α το σημείο που τέμνει η ευθεία (ε_1) τον άξονα $x'x$ και Β το σημείο που τέμνει η (ε_2) τον άξονα $y'y$, να βρεθούν τα Α και Β και η απόσταση (ΑΒ)

31. Δίνεται η παράσταση $A = \sqrt{25x^2} + \sqrt{x^2 - 8x + 16} - \sqrt{(8 - 4x)^2}$

α. Να αποδείξετε ότι η παράσταση Α γίνεται: $A = 5|x| + |x - 4| - |8 - 4x|$

β. Αν $2 < x < 4$ να αποδείξετε ότι $A = 12$

32. Έστω μια συνάρτηση $y=g(x)$, της οποίας η γραφική παράσταση φαίνεται στο διπλανό σχήμα. Παρατηρώντας την γραφική παράσταση να απαντήσετε στα παρακάτω ερωτήματα

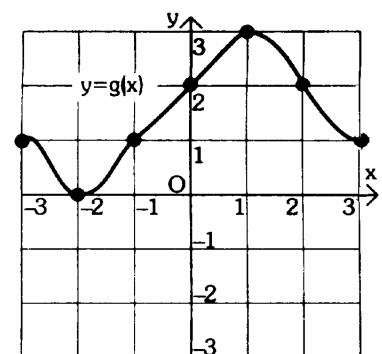
α) Ποιο είναι το πεδίο ορισμού της g ;

β) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $g(2) - (g(-2) - g(-3))$

γ) Είναι σωστό ότι $g(0) > g(3)$; (να δικαιολογηθεί η απάντηση)

δ) Για ποιες τιμές του x ισχύει ότι $g(x) = 1$;

ε) Για ποιες τιμές του x ισχύει ότι $g(x) > 1$;





ΠΡΟΤΕΙΝΟΜΕΝΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΘΕΜΑ 1^ο (Προτείνεται για Θέμα Γ)

Στο διπλανό σχήμα δίνεται η γραφική παράσταση της συνάρτησης f που είναι ορισμένη σε όλο το $\mathbb{R}$.

α) Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε_1) που διέρχεται από τα σημεία $A(-3,0)$ και $B(0,1,5)$.

β) Να λύσετε τις εξισώσεις :

1. $f(x)=0$, 2. $f(x)=3$,
3. $f(x)=0,5x+1,5$

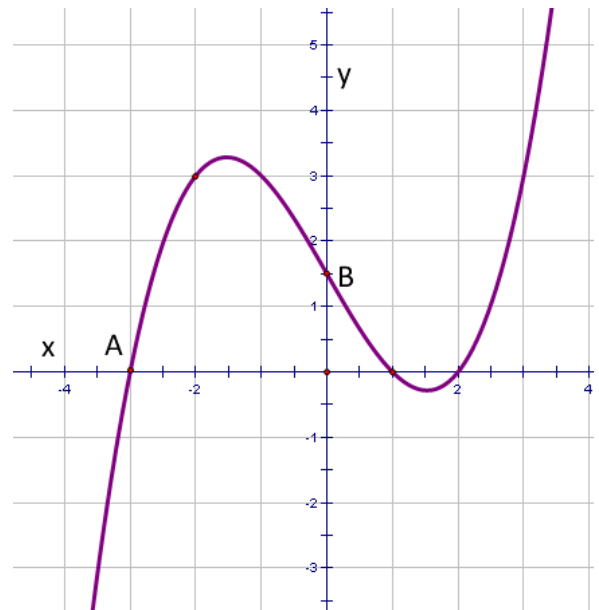
και τις ανισώσεις :

4. $f(x)>0$, 5. $f(x)\leq 3$.

γ) Η ευθεία (ε_2) έχει εξίσωση $y = |\lambda - 1|x + 5$.

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ είναι η $\varepsilon_1 // \varepsilon_2$;

δ) Σε αριθμητική πρόοδο με πρώτο όρο a_1 την κλίση της ευθείας $y=0,5x+1,5$ και $a_6=10,5$, να βρείτε τη διαφορά ω .



ΘΕΜΑ 2^ο (Προτείνεται για Θέμα Γ)

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2\lambda x + \lambda^2 + 3\lambda = 0$, με $\lambda \in \mathbb{R}$.

Δ1. Βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.

Δ2. Αν x_1, x_2 οι άνισες ρίζες βρείτε το άθροισμά τους S και το γινόμενό τους P .

Δ3. Αν $x_1 \cdot x_2 - (x_1 + x_2) = 12$ δείξτε ότι $\lambda = -4$.

Δ4. Βρείτε τις τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ ώστε $x_1^2 + x_2^2 - x_1 \cdot x_2 + 8 \leq 0$.

ΘΕΜΑ 3^ο (Προτείνεται για Θέμα Γ)

Δίνεται το τριώνυμο: $f(x) = x^2 - kx + k - 1$, που έχει δύο άνισες ρίζες με γινόμενο 3.

Δ1. Δείξτε ότι $k = 4$.

Δ2. Για $k = 4$, βρείτε τις ρίζες του τριωνύμου.

Δ3. Για $k = 4$, λύστε την ανίσωση: $f(x) < 0$.

Δ4. Αν μια αριθμητική πρόοδος (a_n) έχει ως 1ο όρο (a_1) τη μικρότερη από τις ρίζες που βρήκατε και ως διαφορά (ω) τη μεγαλύτερη από αυτές:

1. Βρείτε τον 13ο όρο (a_{13}) και το άθροισμα των 13 πρώτων όρων (S_{13})
2. Ποιος όρος της αριθμητικής προόδου ισούται με 64;

ΘΕΜΑ 4^ο (Προτείνεται για Θέμα Β)

Δίνεται η παράσταση $A(x) = 2|x-1| + 3|2-x|$ με $x \in [1, 2]$

Α) Να αποδείξετε ότι $A(x) = -x+4$ Β) Να λύσετε την ανίσωση $|A(x)| + \frac{|x-4|}{2} \leq 3$



ΘΕΜΑ 5^ο (Προτείνεται για Θέμα Γ)

Για ποιες τιμές του $\lambda \in \mathbb{R}$ η εξίσωση $x^2 + (2\lambda + 1)x + \lambda^2 - 3 = 0$ έχει :

- α) ρίζες πραγματικές και ίσες β) ρίζες αντίστροφες γ) ρίζες αντίθετες δ) ρίζα τον αριθμό -1
ε) γινόμενο ριζών ίσο με 6 στ) ρίζες x_1 και x_2 που ικανοποιούν την σχέση: $3x_1x_2^2 + 3x_1^2x_2 < 0$

ΘΕΜΑ 6^ο (Προτείνεται για Θέμα Β)

Έστω $P(x) = x^2 - 7x + 12$

- α) Να λυθεί η ανίσωση $P(x) < 0$
β) Αν ο αριθμός k ανήκει στο σύνολο λύσεων της ανίσωσης, να αποδείξετε ότι η παράσταση $\Pi = |k| - 4 \mid k - 3 \mid - 3 \mid k - 4 \mid$ είναι σταθερή.

ΘΕΜΑ 7^ο (Προτείνεται για Θέμα Β)

Σε μια αριθμητική πρόοδο (a_n) γνωρίζουμε ότι : $a_7 = 23$ και $a_{10} = 32$.

Να βρείτε :

- α) Τον 1ο όρο και την διαφορά της προόδου
β) Τον 20ο όρο της προόδου
γ) Ποιος όρος της προόδου ισούται με 26;
δ) Το άθροισμα των 26 πρώτων όρων της προόδου.

ΘΕΜΑ 8^ο (Προτείνεται για Θέμα Β)

Οι αριθμοί $x-3$, $1-2x$, $3x-11$, είναι διαδοχικοί όροι μιας αριθμητικής προόδου.

- A. Να βρείτε: α) τον πραγματικό αριθμό x β) τη διαφορά ω της προόδου
B. Αν ο αριθμός $1-2x$ είναι ο πέμπτος όρος της προόδου, να βρείτε :
α) Τον πρώτο όρο της προόδου β) Το άθροισμα των δώδεκα πρώτων όρων της προόδου.

ΘΕΜΑ 9^ο (Προτείνεται για Θέμα Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 + |x| - 6}$

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού A της συνάρτησης f β. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = \frac{|x| + 2}{|x| + 3}$ για κάθε $x \in A$
γ. Να λύσετε την εξίσωση: $f(x) \cdot (|x| + 3) = 3$ δ. Να λύσετε την ανίσωση: $10 \cdot f(x) \geq |x| + 6$

ΘΕΜΑ 10^ο (Προτείνεται για Θέμα Γ)

Δίνονται τα σημεία $K(0, 2)$ και $\Lambda(-1, 3)$.

- A. Να βρείτε την εξίσωση της ευθείας (ε) που διέρχεται από τα σημεία K και Λ
B. Αν η ευθεία (ε) έχει εξίσωση $y = -x + 2$ και τα σημεία K , Λ και $M(1-\lambda^2, 4\lambda-3)$ $\lambda \in \mathbb{R}$, είναι συνευθειακά, τότε:
α. Να αποδείξετε ότι $\lambda = 2$,
β. Να υπολογίσετε τη γωνία που σχηματίζει η ευθεία $(\delta): y + 8x = \lambda^3x - 5$ με τον άξονα x 'x



ΘΕΜΑ 11^ο (Προτείνεται για Θέμα Γ)

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - \lambda x + \lambda - 1$, $\lambda \in \mathbb{R}$

- α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει πραγματικές ρίζες για κάθε τιμή του πραγματικού αριθμού λ .
- β) Έστω x_1, x_2 οι ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$. Να βρείτε τις τιμές του λ , ώστε $|x_1 - x_2| = 4$.
- γ) Να βρεθεί η τιμή του λ ώστε $|x_1^2 \cdot x_2 + x_2^2 \cdot x_1| < 2$.
- δ) Για $\lambda = 3$ να βρείτε τις τιμές του x που αληθεύει η σχέση: $2 \leq f(x) \leq 6$

ΘΕΜΑ 12^ο (Προτείνεται για Θέμα Γ)

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \sqrt{2x+4} - \sqrt{2x+16}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να βρείτε τα σημεία τομής της γραφικής παράστασης της f με τους άξονες.
- γ) Να εξετάσετε αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από το σημείο $M(8, 6 - 4\sqrt{2})$.
- δ) Να δείξετε ότι ο $2^{-1} \cdot \sqrt{2}$ είναι αριθμητικός μέσος των $f(6)$, $f(17)$.

ΘΕΜΑ 13^ο (Προτείνεται για Θέμα Γ)

Δίνεται η συνάρτηση: $f(x) = \frac{x^3 - 9x}{x^2 + 3x}$.

- α) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β) Να δείξετε ότι: $f(x) = x - 3$.
- γ) Να μετατρέψετε το κλάσμα $A = \frac{f(10)}{f(6) - \sqrt{f(5)}}$ σε ισοδύναμο με ρητό παρονομαστή.
- δ) Να λύσετε την εξίσωση: $|f(1) \cdot x + 1| = |2 + f(2) \cdot x|$.
- ε) Να λύσετε την ανίσωση: $(f(2))^{2024} \cdot x^2 + \sqrt[3]{f(30)} \cdot x - 10 \leq 0$.

ΚΑΛΗ ΕΝΑΣΧΟΛΗΣΗ !!!