



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ : «Πραγματικοί αριθμοί»

1) Αν οι αριθμοί $A = x - 3y + 4z$ και $B = y - x - 2z$ είναι αντίθετοι, δείξτε ότι $y = z$.

2) Να υπολογισθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{4 - \frac{1}{4}}{3 - \frac{1}{3}}, \quad B = \frac{1 - \frac{1}{2}}{3 - \frac{1}{3}}, \quad \Gamma = \frac{1}{2} + \frac{2 : \frac{1}{2} - 4 + \frac{2 + \frac{1}{4}}{3}}{\frac{1}{2} - \frac{2}{3 - \frac{5}{3}}}$$

3) Αν $A = 3x + 2y - 5xy$ και $B = 0,7(y - x) - 2(xy - x)$, να βρεθεί η αριθμητική τιμή της παράστασης $\Gamma = 4A - 10B$ για $x = 11,721$ και $y = -18,279$.

4) Αν $\alpha - \beta = \beta + 4$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A = \alpha(\alpha + 4) + 4\beta(\beta - 2) - 4\alpha\beta$.

5) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) 4[3(2 - 5x) + 4(3x + 1)] + 5[2(1 - 2x) - 3], \quad \beta) 5 + 5\{3 - 4[-2 - 3[1 - 2(x + 1)]]\}.$$

6) Να βρεθούν οι τιμές των παραστάσεων:

$$A = 2[x(y - 1) - y(x - 2)] + 3(x - y) \quad \text{και} \quad B = 3x + y(3 - 2x) + 2[x \cdot (y - 3) + 10]$$

για $x = 7,5$ και $y = 2,5$.

7) Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A = \alpha(2\alpha - 3) + \beta(2\beta + 3) - 4\alpha\beta$, αν $\alpha - \beta = 3$

και της $B = 2\alpha(6\alpha - 7) + \beta(3\beta + 7) - 12\alpha\beta$, αν $2\alpha = \beta + 5$.



8) Αν $\alpha - 3\beta = 1$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A = \alpha(\alpha - 1) - 4\beta(2 + \alpha) + \beta(\alpha + 8)$.

9) Να βρεθούν οι τιμές του x , για τις οποίες ορίζονται οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x^2 + 1}{x - 2}, \quad B = \frac{1}{2 - \frac{1}{3 - x}}, \quad \Gamma = \frac{\frac{2}{x} - 1}{1 + \frac{3}{x}}, \quad \Delta = \frac{x + 2}{2x + 3} : \frac{3x + 9}{4x^2 - 9}, \quad E = \frac{\frac{1}{2x} - 1}{4 - \frac{2}{x + 1}}, \quad Z = \frac{2 - \frac{1}{x + 1}}{\frac{5}{x} - 3}.$$

10) Αν $\frac{x}{y} = \frac{3}{2}$, να υπολογισθούν οι παραστάσεις:

$$A = \frac{x}{x + y}, \quad B = \frac{x - y}{x}, \quad \Gamma = \frac{3x - y}{2y} \quad \text{και} \quad \Delta = \frac{x + y}{x - y}.$$

11) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta} \neq 0$, να αποδείξετε ότι: α) $\frac{3\alpha - 7\beta}{6\beta} = \frac{3\gamma - 7\delta}{6\delta}$ και β) $\frac{\alpha^2 - \beta^2}{\beta^2} = \frac{\gamma^2 - \delta^2}{\delta^2}$.

12) Αν $\frac{x}{2} = \frac{y}{4} = \frac{z}{7}$ και $3x - 2y + z = 10$, να βρεθούν οι x, y, z .

13) Αν $\frac{\alpha}{\beta} = \frac{\gamma}{\delta}$ και $\beta, \delta, \beta + \delta \neq 0$, δείξτε ότι: $\frac{\alpha^2 + \gamma^2}{\beta^2 + \delta^2} = \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \delta} \right)^2$.

14) Αν $\frac{\gamma}{\alpha} = \frac{\beta}{\gamma}$ και $\alpha, \gamma, \beta + \gamma \neq 0$, δείξτε ότι: $\frac{\alpha}{\beta} = \left(\frac{\alpha + \gamma}{\beta + \gamma} \right)^2$.

15) Αν $\frac{2x + y}{x - y} = \frac{2x - 5y}{x - 3y}$ και $y \neq 0$, να βρεθεί ο λόγος $\lambda = \frac{x}{y}$.

16) Αν οι α, β είναι άρτιοι ακέραιοι, να δείξετε ότι οι $\alpha \pm \beta$ και $\alpha\beta$ είναι άρτιοι.

17) Αν α άρτιος και β περιττός, να δείξετε ότι οι $\alpha \pm \beta$ είναι περιττοί και $\alpha\beta$ άρτιος.

18) Αν οι αριθμοί α και β είναι ρητοί, τότε ο αριθμός $\frac{\alpha^2 - \beta}{\beta^2 + 5}$ είναι ρητός.

**ΔΥΝΑΜΕΙΣ - ΤΑΥΤΟΤΗΤΕΣ - ΠΑΡΑΓΟΝΤΟΠΟΙΗΣΗ**

1) Αν είναι $A = 2x^2y^4z^3$ και $B = \frac{1}{2}x^4y^3z$, να βρείτε τα : $A^2 \cdot B^2$ και $A^2 : B^2$.

2) Αν $x = 0,1$ και $y = 0,2$, να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων :

$$A = (x^{-2}y^{-3})^{-2} : (x^4y^4)^2 \quad \text{και} \quad B = \left[(x^{-1}y^2)^{-1} : \frac{x^2}{y^3} \right]^2$$

3) Με τη βοήθεια των ιδιοτήτων των δυνάμεων να υπολογίσετε τις παραστάσεις :

$$\alpha) (-0,2)^{15} 25^8, \quad \beta) \frac{(-6)^{24} \cdot (-1,5)^{-20}}{16^{10}}, \quad \gamma) 15^{50} \cdot (-0,6)^{-49} \cdot 5^{-100}, \quad \delta) 12^{80} \cdot 4^{-41} \cdot 6^{-78}.$$

4) Να βρεθούν οι αριθμητικές τιμές των παραστάσεων :

$$\alpha) A = \left[x^3y(x^{-2})^{-2} \right] : (y^2)^{-3} \quad \text{για} \quad x = 0,5 \quad \text{και} \quad y = 2.$$

$$\beta) B = \left[(x^{-1}y)^{-2} : (x^7y^3) \right]^{-2} \quad \text{για} \quad x = -1,25 \quad \text{και} \quad y = 0,8.$$

$$\gamma) \Gamma = (x^{-2}y)^{-4} : (x^5y^{-7}) \quad \text{για} \quad x = 4 \quad \text{και} \quad y = 0,5.$$

5) Να υπολογισθούν με την βοήθεια των ταυτοτήτων οι αριθμοί :

$$\alpha) 4567^2 - 4564^2, \quad \beta) 95 \cdot 105, \quad \gamma) 2004^2, \quad \delta) 1998^2, \quad \epsilon) \frac{7,23^2 - 6,75^2}{13,98}.$$

6) Να βρεθούν τα αναπτύγματα :

$$\alpha) (4x + y)^2, \quad \beta) (x^2 - y^2)^2, \quad \gamma) \left(\frac{x}{3} - \frac{y}{4} \right) \cdot \left(\frac{y}{4} + \frac{x}{3} \right), \quad \delta) (x^3 - 1)^3, \quad \epsilon) (x^2 + 2y^3)^3$$

$$\sigma\tau) (x + y - z)^2 \quad \text{και} \quad \zeta) (x - y - 2z)^2.$$

7) Να συμπληρώσετε τα παρακάτω κενά ώστε να προκύψουν αναπτύγματα ταυτοτήτων :

$$\alpha) 9 - \dots = (\dots - x) \cdot (3 + \dots), \quad \beta) 8\alpha^3 + \dots = (2\alpha + \dots) \cdot (\dots + \dots + 1), \quad \gamma) (\dots + \beta)^2 = \dots + 6\alpha^2\beta + \dots$$

$$\delta) x^4 - \dots = (\dots + x^2) \cdot (\dots - 4), \quad \epsilon) (x + \dots)^3 = x^3 + 3x^2 \dots + 3x \dots + 8, \quad \zeta) (x - \dots)^3 = x^3 - 3x^2 + 3x - \dots$$



8) Αν $\alpha = 0,253$, $\beta = 0,25$ και $\gamma = 0,747$ να βρεθεί η τιμή της παράστασης :

$$A = (\alpha + \beta + \gamma)^2 - (\alpha - \beta + \gamma)^2 .$$

9) Αν $\alpha - \beta = 1$ να δείξετε ότι : $\alpha^3 - \alpha^2\beta + \beta^3 - \alpha\beta^2 = \alpha + \beta$.

10) α) Να αποδείξετε ότι : $\alpha\beta = \left(\frac{\alpha + \beta}{2}\right)^2 - \left(\frac{\alpha - \beta}{2}\right)^2$

β) Να γράψετε τον αριθμό 2004 ως διαφορά τετραγώνων .

11) Να δείξετε ότι : $(\alpha^2 + 2\alpha + 1)^2 - (\alpha^2 + 2\alpha - 1)^2 = 4[(\alpha + 1)^2 - 1]$.

12) Αν $\alpha\beta = 2$ και $\alpha + \beta = 5$ να υπολογιστούν τα : i) $\alpha^2 + \beta^2$ και ii) $\frac{1}{\alpha^3} + \frac{1}{\beta^3}$.

13) Αν $x + \frac{1}{x} = 3$, να υπολογισθούν οι παραστάσεις : α) $x^2 + \frac{1}{x^2}$ και β) $x^3 + \frac{1}{x^3}$.

14) Να αποδειχθούν οι ταυτότητες :

i) $(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)^3 - \alpha^4 + \beta^4 = 2\alpha\beta(\alpha - \beta)(\alpha + \beta)$, ii) $(\alpha + \beta)^2 - 2(\alpha + \beta)(\alpha - \beta) + (\alpha - \beta)^2 = 4\beta^2$

iii) $(\alpha^2 + \beta^2)^2 + 4\alpha\beta(\alpha^2 - \beta^2) = (\alpha^2 - \beta^2 + 2\alpha\beta)^2$, i v) $\frac{\alpha^2(\alpha + 1)^2}{4} - \frac{\alpha^2(\alpha - 1)^2}{4} = \alpha^3$,

v) $(\alpha^3 + \beta^3)^2 - (\alpha^2 + \beta^2)^3 + 3\alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)^2 = (2\alpha\beta)^3$, vi) $(\alpha^2 + 1)(\beta^2 + 1) - (\alpha\beta + 1)^2 = (\alpha - \beta)^2$,

vii) $\alpha^2(\beta - \gamma) + \beta^2(\gamma - \alpha) + \gamma^2(\alpha - \beta) = (\beta - \alpha)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)$.

15) Αν $(\alpha + \beta)^2 = 2(\alpha^2 + \beta^2)$, να αποδειχθεί ότι $\alpha = \beta$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

16) Αν $(x + \alpha)^2 + (y + \beta)^2 = 4(\alpha x + \beta y)$, να δείξετε ότι : $x = \alpha$ και $y = \beta$, $x, y, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

17) Αν $x = \alpha - \beta$ να δείξετε ότι : $(x - \alpha)^2 + (x - \alpha)(2\beta - \gamma) + \beta^2 - \beta\gamma = 0$.



18) Αν $\alpha\beta = 3x + 1$ και $\alpha + \beta = 2x + 2$, να δείξετε ότι: $(2\alpha - 3)(2\beta - 3) = 1$.

19) Αν $\left(\alpha + \frac{1}{\alpha}\right)^2 = 3$, να δείξετε ότι: $\alpha^3 + \frac{1}{\alpha^3} = 0$.

20) Αν $\alpha + \beta + \gamma = 0$, δείξτε ότι: $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 2(\beta^2 - \alpha\gamma)$.

21) Αν $\alpha\beta\gamma \neq 0$, δείξτε ότι: $(\alpha + \beta + \gamma)^2 = \alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 \Leftrightarrow \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma} = 0$.

22) i) Να αποδείξετε ότι: $(\alpha^2 + \beta^2)(x^2 + y^2) = (\alpha x + \beta y)^2 + (\alpha y - \beta x)^2$, (ταυτότητα Lagrange)

ii) Να γράψετε τον αριθμό $74 \cdot 130$, ως άθροισμα τετραγώνων ακεραίων αριθμών.

23) Αν $x^2 + y^2 = 1$, δείξτε ότι η παράσταση: $A = (3 - 2y^2)y^4 + (3 - 2x^2)x^4$, είναι ανεξάρτητη των $x, y \in \mathbb{R}$.

24) Να γίνουν γινόμενο οι παραστάσεις:

$$A = x^4 - 1, \quad B = x^2 y^2 - 16\alpha^2, \quad \Gamma = \alpha^3 \beta + 2\alpha^2 \beta^2 + \alpha \beta^3, \quad \Delta = x^2 - 3x + 2, \quad E = x^2 + 10x + 24,$$

$$Z = x^2 + 3x - 4, \quad H = \frac{x^2}{9} + \frac{1}{3}xy + \frac{y^2}{4}, \quad \Theta = 4x^3 - 8x^2 + 4x, \quad I = 27x^3 - 8y^3, \quad K = \alpha^2 - \beta^2 + 4\beta - 4.$$

25) i) Δείξτε ότι: $\frac{\alpha^3 + \beta^3}{(\alpha - \beta)^2 + \alpha\beta} = \alpha + \beta$

ii) Να υπολογισθεί το κλάσμα: $\frac{333^3 + 33^3}{300^2 + 333 \cdot 33}$.

26) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

$$\alpha) \frac{x^2 - \alpha^2}{x^2 - \alpha x}, \quad \beta) \frac{x^3 \alpha - x \alpha^3}{x^2 \alpha + x \alpha^2}, \quad \gamma) \frac{\alpha x^2 (x^2 + 5x + 6)}{\alpha^2 x (x^2 - 9)}, \quad \delta) \frac{(x^4 - 16)(x^2 - x)}{(x^3 - x)(x^3 - 4x)}, \quad \epsilon) \frac{2x^2 - \alpha x - \alpha^2}{x - \alpha}$$

27) Να γίνουν οι πράξεις:

$$\alpha) \frac{2}{x^2 - \alpha x} + \frac{3}{\alpha x - \alpha^2}, \quad \beta) \frac{x}{\alpha + x} \cdot \frac{x^2 + 2\alpha x + \alpha^2}{x^2 - 3x}, \quad \gamma) \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2 - \beta^2} - \frac{\alpha - \beta}{\alpha + \beta} \right) \cdot \frac{\alpha + \beta}{2\alpha - \beta} + \frac{\alpha}{\beta - \alpha}.$$



28) Όμοια οι προάξεις :

$$\alpha) \left[\frac{\alpha+3\beta}{\alpha^2-\beta^2} + \frac{\alpha-3\beta}{(\alpha-\beta)^2} \right] : \frac{\alpha^2-3\beta^2}{\alpha^2-2\alpha\beta+\beta^2}, \quad \beta) \left(\frac{1}{\alpha^2-9} \cdot \frac{3\alpha^2+9\alpha}{\beta-\alpha} - \frac{3\alpha}{9-3\beta-3\alpha+\alpha\beta} \right) \cdot \frac{\beta^3-27}{3\alpha},$$

$$\gamma) \left[\left(\frac{3\alpha}{\alpha^3-\beta^3} \cdot \frac{\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2}{\alpha+\beta} - \frac{3}{\beta-\alpha} \right) : \frac{\alpha+\beta}{3} \right] \cdot \frac{\alpha-\beta}{9}, \quad \delta) \frac{1}{(\alpha+\beta)^2} \cdot \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} \right) + \frac{2}{(\alpha+\beta)^3} \cdot \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} \right)$$

$$\epsilon) \left[\left(1 - \frac{2\alpha\beta}{\alpha^2+\beta^2} \right) : \left(\frac{\alpha^3-\beta^3}{\alpha-\beta} - 3\alpha\beta \right) \right] \cdot (\alpha^2+\beta^2), \quad \sigma\tau) \frac{\alpha^2-1}{\beta^2+\alpha\beta} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{1}{\beta}} - 1 \right) \cdot \frac{\alpha-\alpha\beta^3-\beta^4+\beta}{1-\alpha^2}.$$

29) Αν $\alpha+\beta+\gamma=2\tau$ δείξτε ότι :

$$\text{i)} 2\beta\gamma=4\tau(\tau-\alpha)+\alpha^2-\beta^2-\gamma^2, \quad \text{ii)} \tau(\tau-\alpha)+(\tau-\beta)(\tau-\gamma)=\beta\gamma,$$

$$\text{iii)} (2\alpha\tau+\beta\gamma)(2\beta\tau+\alpha\gamma)(2\gamma\tau+\alpha\beta)=(\alpha+\beta)^2(\beta+\gamma)^2(\gamma+\alpha)^2.$$

$$30) \text{ Αν } \alpha+\beta+\gamma=0, \text{ να αποδείξετε ότι : } \frac{\alpha^2-\beta^2-2\beta\gamma}{\alpha+\beta} + \frac{\beta^2-\gamma^2-2\alpha\gamma}{\beta+\gamma} + \frac{\gamma^2-\alpha^2-2\alpha\beta}{\alpha+\gamma} = 0$$

όπου : $\alpha+\beta \neq 0, \beta+\gamma \neq 0$ και $\alpha+\gamma \neq 0$.

$$31) \text{ Αν } \frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} + 3 = 0, \text{ με } xyz \neq 0, \text{ να αποδειχθεί ότι : } x+y+z=0 \text{ ή}$$

$$xy+yz+zx=0$$

$$32) \text{ Αν } \alpha^2+\beta^2+\alpha^2 \cdot \beta^2 - 10 \cdot (\alpha+\beta+\alpha\beta) + 61 = 0, \text{ δείξτε ότι : } \alpha^3+\beta^3=35.$$

$$33) \text{ Αν } \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R} \text{ και } 3(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2) = (\alpha+\beta+\gamma)^2 \text{ τότε : } \alpha=\beta=\gamma.$$