



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
(ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟΥ ΑΡΙΘΜΟΥ)

ΟΜΑΔΑ Β

1. Να συμπληρωθούν τα δεύτερα μέλη των παρακάτω ισοτήτων χωρίς τις απόλυτες τιμές :

$$|-201|, \quad |\sqrt{5}-1|, \quad |3,11-\pi|, \quad |\sqrt{2}-2|, \quad |-x^2+4x-4|, \quad |-a^2-1|, \\ |x^2+5|+|x^4+2|-|x^4+x^2+6|, \quad |(-2024)^{2023}|, \quad |3^{32}-4^{16}|$$

2. Να εκφράσετε για τις διάφορες τιμές του x τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς απόλυτες τιμές :

i) $A = |x-5|$ ii) $B = |-x+7|$ iii) $\Gamma = 5 - |x-2|$, iv) $\Delta = 2|x-1| - 3|5-x|$
v) $E = |2x-1| - |x+1| - |x-3|$.

3. Αν $1 < x < 5$, να δείξετε ότι : α) $|x-1| + |x-5| = 4$, β) $|x-1| + |x-5| < |x+2| + |x-6|$

4. Δίνεται η παράσταση $A = |2x+1| - 2|1-x|$.

Να βρείτε για ποιες τιμές του x η παράσταση A είναι ανεξάρτητη του x .

5. Να βρεθεί η απόσταση των αριθμών α, β στις παρακάτω περιπτώσεις:

α) $\alpha = -5$ και $\beta = -8$, β) $\alpha = \sqrt{5}$ και $\beta = \pi$, γ) $\alpha = 201$ και $\beta = -201$

6. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις:

α) $|x-y| - |y-2| + |x-2| - 2|x-3|$ αν $x < 2 < y$ β) $||x|-x| + ||x|+x| - |1+2|x||$, $x \in \mathbb{R}$

7. Αν $|x| < 1$ να απλοποιήσετε την παράσταση: $A = |x-2| - 2|x-1| + |x+3| - 5$.

8. Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{x^2+|x|}{|x|+1} + \frac{x^2-|x|}{|x|-1} - 2\frac{x^2-4}{|x|+2}$.

α) Να βρείτε για ποιες τιμές του x , ορίζεται η παράσταση A .

β) Να βρείτε την τιμή της παράστασης A .

9. Αν $-1 < x < 2$ να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις χωρίς την απόλυτη τιμή.

i) $A = |x+1| + |x-2| + |x+2| + |x+3|$ ii) $B = 6|2x+3| + 3|4x-9|$ iii) $\Gamma = \frac{|x-2|}{2-x} + \frac{|2x-6|}{x-3} + \frac{|x+1|}{-x-1}$

10. Αν $1 < x < 2 < y$, να δείξετε ότι: $|1-x| + |2-y| + |x-y| - |2y-1| = -2$

9. Αν $|a| \leq 1$, όπου $a \in \mathbb{Z}$, να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A = \alpha^{2024} + 3$

10. Έστω α, β πραγματικοί αριθμοί με: $|\alpha| < |\beta|$ και $|\alpha+\beta x| < |\alpha x + \beta|$. Να αποδείξετε ότι:

α) $(\alpha+\beta)(\alpha-\beta) < 0$ β) $\alpha^2 + \beta^2 x^2 < \beta^2 + \alpha^2 x^2$ γ) $|x| < 1$



11. i. Να αποδείξετε την ισοδυναμία $|a| < |b| \Leftrightarrow a^2 < b^2$.

ii. Αν $|a| \neq |b|$ και ισχύει $1 + |ab| < |a + b|$ να αποδείξετε ότι $|a| < 1 < |b|$ ή $|b| < 1 < |a|$.

iii. Αν $ab \neq 0$ και ισχύει $|a + b| < |a - b|$ να αποδείξετε ότι **α)** a, b ετερόσημοι, **β)** $a|b| + b|a| = 0$.

12. Αν $\beta \neq 0$, $2\alpha + 5\beta \neq 0$ και $\left| \frac{5\alpha + 2\beta}{2\alpha + 5\beta} \right| < 1$, να αποδείξετε ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| < 1$.

13. Να βρείτε το x σε κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις

α) $d(x, 1) = 4$ **β)** $d(x, -2) = 3$ **γ)** $d(x - 1, 2) = 5$

14. Να βρείτε το x σε κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις

α) $d(x, 0) < 3$ **β)** $d(x, 2) \leq 3$ **γ)** $d(x - 1, 1) < 4$

15. Να βρείτε το x σε κάθε μία από τις παρακάτω σχέσεις

α) $d(x, 0) \geq 4$ **β)** $d(x, -3) \geq 2$ **γ)** $d(x + 1, 3) > 4$

16. Να δείξετε ότι: i) $d(\alpha, \beta) - d(3\alpha, \alpha) \leq d(\alpha, -\beta)$ ii) $d\left(\frac{\alpha}{\beta}, 0\right) + d\left(\frac{\beta}{\alpha}, 0\right) \geq 2$

17. Αν ισχύει $d(4\alpha - \beta, \alpha - 2\beta) = d(2\alpha, 0) + d(2\beta, \beta)$, όπου $\alpha, \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι οι αριθμοί α, β είναι ετερόσημοι.

18. Αν ισχύει: $d(x, -2) \leq 5$ και $d(y, 3) \leq 3$, να αποδείξετε $d(x + 7, -y) \leq 16$

19. Να συμπληρωθεί ο παρακάτω πίνακας, στα μη γραμμοσκιασμένα κουτάκια όπως δείχνει η πρώτη γραμμή

Απόλυτη Τιμή	Απόσταση	Διάστημα ή ένωση διαστημάτων
$ x + 1 \leq 2$	$d(x, -1) \leq 2$	$[-3, 1]$
	$d(x, -1) \geq 3$	
$ x + 1 > 5$		
$ x - 2 \geq 6$		
	$d(x - 2, 3) < 4$	
		$(-3, 3)$
		$(-\infty, 3) \cup (3, +\infty)$
	$d(x, 7) > 5$	
$ x - 3 < 1$		
		$(-\infty, -5) \cup (1, +\infty)$
		$[-2, 2]$
		$[-5, 1]$



20. Να σημειώσετε το σωστό (Σ) ή λάθος σε καθεμιά από τις παρακάτω προτάσεις:

1.	Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει ότι: $ a = -a $	
2.	Δεν ισχύει πάντα $ a - \beta = \beta - a $	
3.	Η ισότητα $ x + y = x + y $ ισχύει μόνο όταν οι x, y είναι θετικοί.	
4.	Ισχύει ότι $\left -\frac{2024}{2025} \right = -2024 \frac{1}{2025}$	
5.	Αν $a < 0$ τότε $ a\beta = -a \beta $.	
6.	Αν $x < 1$ τότε $ x-1 + x-2 - x-3 = -x$	
7.	$ -x = \begin{cases} x, & \text{άν } x \leq 0 \\ -x, & \text{άν } x > 0 \end{cases}$	
8.	$ x < y \Leftrightarrow x < y$	
9.	$\left \frac{a}{\beta} \right < \frac{ a }{ \beta }$	
10.	$ a \geq 1 \Leftrightarrow a \geq 1$	
11.	$1 + x^2 \geq 2 x $	
12.	Αν $a > 2$ τότε $ a-1 = a-1$	
13.	Αν $ x \leq 2$ τότε το x ανήκει στο διάστημα $[-2, 2]$	
14.	Αν $x > 0$ τότε $A = -2x - 5x$ είναι ίση με $3x$.	
15.	Αν $ x-5 = 5-x$ τότε $x < 5$.	
16.	Για κάθε πραγματικό αριθμό a ισχύει $ - a = -a $	
17.	Αν $a < 0$ τότε $A = \frac{3 a }{a} - 3$ είναι ίσο με το 6.	
18.	Η ανίσωση $ x \geq -x$ αληθεύει για: $x < 0$	

21. Αν $\alpha < 1 < \beta$ να αποδείξετε ότι: α) $|1-\alpha| + |1-\beta| = |\alpha-\beta|$ και β) $|\alpha-2| + |\beta| - |\alpha-\beta| = 2$.

22. Αν $-1 < x < 2$, να δείξετε ότι: $|3-|x-2|| = x+1$



23. Αν ισχύει $\frac{|\beta|}{\alpha} - \frac{\beta}{|\alpha|} = 0$, να δείξετε ότι οι αριθμοί α και β είναι ομόσημοι.

24. α) Αν $\alpha, \beta \neq 0$ και $|\alpha + \beta| = |\alpha| + |\beta|$, να δείξετε ότι οι αριθμοί α , β είναι ομόσημοι.

β) Έστω x, y, z μη μηδενικοί πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε: $\frac{|x|}{3} = \frac{|y|}{7} = \frac{|z|}{5}$.

Αν $x + y + 2z = 0$, να δείξετε ότι οι αριθμοί x, y είναι ομόσημοι.

25. Αν $|x| \leq 1$, $|y| \leq 2$, $|z| \leq 3$, να δείξετε ότι $|x + y + z| \leq 6$.

26. Αν $|x| \leq 2$, δείξτε ότι $|3x^2 - 5x + 1| \leq 23$.

27. Αν $x \geq 1$, δείξτε ότι: $|3x^2 - \alpha + \beta| + |x^2 + \alpha - \beta| \geq 4$.

28. Αν $|\alpha - \beta| < x$ και $|\beta - \gamma| < x$, δείξτε ότι: $|\alpha - \gamma| < 2x$.

29. Αν $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι: $(\alpha - |\alpha|) \cdot (\alpha + |\alpha|) = 0$.

30. α) Να δείξετε ότι: $2(\alpha^2 + \beta^2) \geq (|\alpha| + |\beta|)^2$, για κάθε $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

β) Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $|\alpha| + |\beta| + |\gamma| \neq 0$, να δείξετε ότι: $\frac{\beta^2 + \gamma^2}{|\beta| + |\gamma|} + \frac{\gamma^2 + \alpha^2}{|\gamma| + |\alpha|} + \frac{\alpha^2 + \beta^2}{|\alpha| + |\beta|} \geq |\alpha + \beta + \gamma|$.

31. Αν $\alpha \neq 0$, να δείξετε ότι: $\left| \alpha + \frac{1}{\alpha} \right| \geq 2$.

32. Αν $\left| \frac{\alpha + 4}{\alpha + 1} \right| = 2$, να δείξετε ότι: $|\alpha| = 2$.

33. Αν $\alpha \neq -2$ και $\left| \frac{2\alpha + 1}{2 + \alpha} \right| \leq 1$, να δείξετε ότι: $|\alpha| \leq 1$.

34. Αν $|\alpha| < 1$ και $|\beta| < 1$, να δείξετε ότι: $\left| \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta} \right| < 1$.

35. Αν $|\alpha| > |\beta|$, να δείξετε ότι: $|\alpha|^3 - |\beta|^3 > (|\alpha| - |\beta|)^3$.

36. Αν $||\alpha - \beta| - |\alpha + \beta|| = 2|\beta|$, να δείξετε ότι: $|\alpha| \geq |\beta|$.



37. Αν $\alpha, \beta \neq 0$, να δείξετε ότι: $\frac{|\alpha \cdot \beta| + \beta \cdot |\alpha|}{|\alpha \cdot \beta|} = 2 \Leftrightarrow \alpha \cdot \beta > 0$.

38. Αν $\beta \neq 0$ και $\alpha^2 < 4\beta^2$, δείξετε ότι: $\left| \frac{\alpha}{\beta} \right| - \left| \frac{\beta}{\alpha} \right| < \frac{3}{2}$.

39. Αν $y \cdot (2x + 3y) \neq 0$, να δείξετε ότι: $\left| \frac{3x + 2y}{2x + 3y} \right| > 1 \Leftrightarrow \left| \frac{x}{y} \right| > 1$.

40. Αν $|\alpha| < |\beta| < |\gamma|$, να δείξετε ότι: $\frac{|\alpha|^2 + |\beta|^2}{|\gamma|^2} < \frac{|\alpha| + |\beta|}{|\gamma|}$.

41. Αν $0 < x < 4$, να δείξετε ότι η παράσταση: $A = |x^2 - 4x + 4| + |x| \cdot |x - 4|$, είναι ανεξάρτητη του x

42. Αν $x \in \mathbb{R}$ με $\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{2}$, τότε να βρείτε την ελάχιστη και την μέγιστη τιμή της παράστασης:

$$A = \left| \frac{x+2}{x-2} \right|.$$

43. Αν $-2 < x < \frac{1}{4}$ να γράψετε την παράσταση $A = \frac{2|-4x+1| - 3|x+2|}{4+11x}$ χωρίς απόλυτα.

44. Αν $x \neq \pm y$, να δείξετε ότι: $\frac{|x|}{|x+y|} + \frac{|y|}{|x-y|} \geq 1$

45. Αν $\alpha \neq \beta \neq \gamma$ να δείξετε ότι: $\left| \frac{\alpha - \beta}{\alpha - \beta} + \frac{\alpha - \gamma}{\alpha - \gamma} + 2 \cdot \frac{\beta - \gamma}{\beta - \gamma} \right| \leq 4$