



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
(ΡΙΖΕΣ)

ΟΜΑΔΑ Α

Α. Ερωτήσεις Σωστού (Σ) Λάθους (Λ)

- 1) Αν $x < 0$ τότε $\sqrt{x^2} = -x$
- 2) Αν $\alpha < 0$ τότε $\sqrt{\alpha^2\beta} = -\alpha\sqrt{\beta}$
- 3) Αν $\alpha\beta \geq 0$ τότε $\sqrt{\alpha \cdot \beta} = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt{\beta}$
- 4) Για κάθε πραγματικό α ισχύει $\sqrt{(-\alpha)^2} = |\alpha|$
- 5) Αν $\alpha < \beta < 0$ τότε $\sqrt{-\alpha} > \sqrt{-\beta}$
- 6) Αν $\alpha < \beta$, τότε $\sqrt[3]{\alpha} < \sqrt[3]{\beta}$
- 7) Αν $x > y$ τότε $x+y+\sqrt{(x-y)^2} = 2y$
- 8) Ο αντίστροφος του $2 + \sqrt{3}$ είναι ο $2 - \sqrt{3}$
- 9) Η παράσταση $\sqrt[5]{3-x}$ ορίζεται για $x \leq 3$
- 10) Αν $\alpha, \beta > 0$ τότε $\frac{\sqrt{\alpha^5\beta^7}}{\sqrt{\alpha^3\beta^5}} = \alpha\beta$



Β. Ερωτήσεις πολλαπλής επιλογής

- 1) Αν $x < 0$ η παράσταση $A = \sqrt{4x^2} + 2x$ είναι ίση με:

A. 0 **B.** $4x$ **Γ.** x **Δ.** 2 **Ε.** -2

- 2) Αν $x > 0$ η παράσταση $A = \frac{\sqrt{9x^2}}{x} + 3$ είναι ίση με:

A. 0 **B.** 6 **Γ.** 9 **Δ.** 3 **Ε.** 4



3) Η παράσταση $(\sqrt{3} - 1) \cdot (\sqrt{3} + 1)$ είναι ίση με:

A. 3

B. 0

Γ. 4

Δ. 2

Ε. -1

4) Η τετραγωνική ρίζα του 12 είναι ίση με:

A. $3\sqrt{2}$

B. $2\sqrt{3}$

Γ. $3\sqrt{3}$

Δ. $2\sqrt{2}$

5) Η παράσταση $\sqrt{\sqrt{5}-1} \cdot \sqrt{\sqrt{5}+1}$ είναι ίση με:

A. 5

B. 6

Γ. 2

Δ. -2

Ε. 3

6) Η παράσταση $\frac{3}{\sqrt[3]{3}}$ είναι ίση με:

A. $\sqrt[3]{2}$

B. $\sqrt[3]{6}$

Γ. $\sqrt[3]{3}$

Δ. $\sqrt[3]{9}$

7) Η παράσταση $\sqrt[3]{15 - \sqrt{25} - \sqrt{4}}$ είναι ίση με:

A. 2

B. -2

Γ. 3

Δ. 8

8) Η παράσταση $\sqrt[3]{4\sqrt{6-\sqrt{4}}}$ είναι ίση με:

A. 3

B. 2

Γ. 4

Δ. 5

Ε. 0

9) Αν ισχύει $\sqrt{x^2 - 2x + 1} = 1 - x$ τότε:

A. $x < 1$,

B. $x \leq 1$,

Γ. $x > 1$,

Δ. $x \geq 1$

10) Αν ισχύει $\sqrt{a^2 - 4a + 4} + \sqrt{\beta^2 - 6\beta + 9} = 0$ τότε:

A. $a = 2$ και $\beta \neq 0$,

B. $a = 2$ και $\beta = 3$,

Γ. $a = 2$ ή $\beta = 3$,

Δ. $a \neq 2$ και $\beta \neq 3$



Γ. Ασκήσεις

1. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = 3\sqrt{2} + \sqrt{200} - \sqrt{50} \quad \text{και} \quad \mathbf{B} = \sqrt{300} - \sqrt{75} - \sqrt{12}$$

i) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις $\mathbf{A}, \mathbf{B}$.

ii) Να υπολογίσετε την παράσταση $\mathbf{\Gamma} = \mathbf{A}^2 - \mathbf{B}^2$.

2. Δίνονται οι παραστάσεις:

$$\mathbf{A} = \sqrt{200} - 5\sqrt{2} - \sqrt{18}, \quad \mathbf{B} = \sqrt{48} + \sqrt{12} - \sqrt{75} \quad \text{και} \quad \mathbf{\Gamma} = \frac{\sqrt{12}}{2} + \frac{\sqrt{96}}{\sqrt{2}} - \frac{\sqrt{150}}{\sqrt{2}} + \sqrt{11}$$

i) Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις.

ii) Να εξετάσετε αν υπάρχει ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές τις $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{\Gamma}$.

3. **i)** Αν $\mathbf{x} + \sqrt{75} = \sqrt{48}$ να βρείτε το $\mathbf{x}^2$.

ii) Αν $\mathbf{x} - \sqrt{125} = \sqrt{45} - \sqrt{80}$ να βρείτε το $\mathbf{x}^2$.

4. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

$$\mathbf{i)} (2\sqrt{3} + 3\sqrt{2})^2, \quad \mathbf{ii)} (3\sqrt{3} - 1)^2, \quad \mathbf{iii)} (\sqrt{3} - \sqrt{5})(\sqrt{3} + \sqrt{5}), \quad \mathbf{iv)} (\sqrt{a + \sqrt{b}} - \sqrt{a - \sqrt{b}})^2$$

$$\mathbf{v)} (\sqrt{\sqrt{a} + \sqrt{b}} - \sqrt{\sqrt{a} - \sqrt{b}})^2.$$

5. Να αποδείξετε ότι:

$$\mathbf{i)} \sqrt[3]{\sqrt{28} - 1} \cdot \sqrt[3]{\sqrt{28} + 1} = 3, \quad \mathbf{ii)} \sqrt[5]{\sqrt{33} + 1} \cdot \sqrt[5]{\sqrt{33} - 1} = 2, \quad \mathbf{iii)} \frac{1}{\sqrt{3} - 1} + \frac{1}{\sqrt{3} + 1} - \frac{3}{\sqrt{3}} = 0$$

$$\mathbf{iv)} \sqrt{a + b + 2\sqrt{ab}} = \sqrt{a} + \sqrt{b} \quad \text{με} \quad a \geq 0, \quad b \geq 0$$

$$\mathbf{v)} \text{ Αν } a < b < 0 \text{ τότε } \sqrt{(a - b)^2} - \sqrt[3]{(-a)^3} + \sqrt[4]{b^4} = 0.$$



6. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις:

i) $\left(\frac{1}{\alpha - \sqrt{\beta}} + \frac{1}{\alpha + \sqrt{\beta}} \right) : \frac{2\sqrt{\alpha}}{\alpha^2 - \beta}$, ii) $\frac{1}{\sqrt{3} + 1} + \frac{1}{\sqrt{3} - 1}$, iii) $\frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{5} - 2} - \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{5} + 2}$

iv) $\left(\frac{\sqrt{\alpha} + \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta} + \frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} + \beta} \right) : \left(\frac{\sqrt{\alpha} + \beta}{\sqrt{\alpha} - \beta} - \frac{\sqrt{\alpha} - \beta}{\sqrt{\alpha} + \beta} \right)$

7. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις με τη μορφή μίας ρίζας:

i) $\sqrt{3\sqrt{3\sqrt{3}}}$, ii) $\sqrt[4]{3\sqrt{2}\sqrt[5]{2}}$, iii) $\sqrt[3]{3\sqrt[4]{3\sqrt{3}}}$, iv) $\sqrt{\alpha\sqrt[3]{\alpha}\sqrt[4]{\alpha}}$, v) $\sqrt[4]{3\sqrt{\alpha}\sqrt{\alpha^3\beta}}$

8. Να βρείτε τα εξαγόμενα:

i) $\sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt{\alpha^5}$, ii) $\sqrt{3^3} \cdot \sqrt[3]{3^2} \cdot \sqrt[6]{3}$, iii) $\sqrt[12]{2^{11}} : \sqrt[4]{2^3}$, iv) $\sqrt[6]{5^7} : \sqrt[3]{5^2}$, v) $\sqrt[7]{\alpha^2\beta^3} : \sqrt[2]{\alpha\beta^5}$

9. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \frac{\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 2x + 1}}{x - 1} \quad \text{αν } 0 < x < 1.$$

10. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$A = \sqrt{x^2 - 4x + 4} - \sqrt{x^2 + 4x + 4} \quad \text{αν } |x| < 2.$$

11. Να απλοποιηθεί η παράσταση:

$$B = \frac{x\sqrt{x^2}}{x} - \frac{\sqrt{x^2 - 6x + 9}}{x - 3}, \quad \text{για τις διάφορες τιμές του } x.$$

12. Να γράψετε τις παρακάτω παραστάσεις σε ισοδύναμες με ρητό παρονομαστή:

i) $\frac{7}{\sqrt[3]{14}}$ ii) $\frac{6}{\sqrt[5]{3^4}}$ iii) $\frac{\alpha}{\sqrt[3]{\alpha^2}}$ iv) $\frac{\beta}{\sqrt[6]{\beta^4}}$ v) $\frac{\alpha}{\sqrt[13]{\alpha^5}}$

vi) $\frac{1}{2\sqrt{2} - 1}$ vii) $\frac{2}{\sqrt{3} + \sqrt{2}}$ viii) $\frac{\sqrt{\alpha} - \sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}}$



ΟΜΑΔΑ Β

1) Αν $2 \leq x \leq 4$, να αποδείξετε ότι η παράσταση : $A = \sqrt{(x-2)^2} + \sqrt[6]{(4-x)^6}$ είναι σταθερή (ανεξάρτητη του x).

2) Να υπολογίσετε την τιμή των παραστάσεων :

$$A = \frac{\sqrt{49} + \sqrt[3]{27} + \sqrt[4]{16} - \sqrt[5]{32}}{\sqrt{81} + \sqrt[3]{64} + \sqrt[4]{81} - \sqrt[5]{1024}} \quad \text{και} \quad B = \frac{\sqrt{121} + \sqrt[3]{125} - \sqrt[4]{81}}{\sqrt{144} + \sqrt[3]{27} - \sqrt[6]{64}}.$$

3) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $A = x - 2\sqrt{x+1} - \frac{3\sqrt[3]{4x-5} - \sqrt{2x-7}}{\sqrt{x-4}}$, με $x = 8$

4) Αν είναι $x = \sqrt{6} + \sqrt{5}$ και $y = \sqrt{6} - \sqrt{5}$, να αποδείξετε ότι : $2x^2 - 5xy + 2y^2 = 39$.

5) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}} + \sqrt{\frac{(1-\sqrt{2})^2}{4}} = \sqrt{2}$ και $\sqrt{\frac{1}{(\sqrt{6}-3)^2}} + \sqrt{\frac{1}{(\sqrt{6}+3)^2}} = 2$.

6) Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις : $A = \sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{3}}} \cdot \sqrt{2+\sqrt{3}} \cdot \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{3}}}$.

$$B = \sqrt{21x^2 + \sqrt{19x^4 - \sqrt{6x^8 + \sqrt{9x^{16}}}}}, \quad \Gamma = \left(\sqrt[3]{16} + 4 \cdot \sqrt[3]{2} + 4 \cdot \sqrt[3]{54} \right) \left(3 \cdot \sqrt[3]{\frac{1}{2}} + 5 \cdot \sqrt[3]{4} \right),$$

$$\Delta = \sqrt[3]{25 \cdot \sqrt{5 \cdot \sqrt[5]{5}}}, \quad E = \sqrt[3]{\frac{2}{3} \cdot \sqrt{\frac{9}{2} \cdot \sqrt{\frac{1}{4}}}}, \quad Z = \left(\sqrt[3]{2 \cdot \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{2}}} : \sqrt[5]{3 \cdot \sqrt{2 \cdot \sqrt[3]{2}}} \right) \cdot \sqrt[20]{4} \cdot \sqrt[15]{9}$$

7) α) Να συγκριθούν οι αριθμοί $9\sqrt{3}$ και $11\sqrt{2}$

β) Να δείξετε ότι: $\sqrt[3]{9\sqrt{3} - 11\sqrt{2}} = \sqrt{3} - \sqrt{2}$

8) Να αποδείξετε ότι : α) $\sqrt{5-2\sqrt{6}} + \sqrt{5+2\sqrt{6}} = 2\sqrt{3}$, β) $\sqrt{3+\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}+1}{\sqrt{2}}$.

9) Αν $x^2 + y^2 = 1$, να δείξετε ότι: $\sqrt{\frac{x^4 + 4y^2}{9}} + \sqrt{\frac{y^4 + 4x^2}{9}} = 1$



10) Να γράψετε τα παρακάτω κλάσματα με ρητό παρονομαστή :

$$A = \frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{2}} \quad , \quad B = \frac{1-\sqrt{3}}{\sqrt{3}+1} \quad , \quad \Gamma = \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{5}-3} \quad , \quad \Delta = \frac{5}{\sqrt[3]{4}} \quad , \quad E = \frac{7}{\sqrt[4]{8}} \quad , \quad Z = \frac{8}{\sqrt[5]{25}} \quad , \quad H = \frac{2}{\sqrt[7]{10^5}}$$

11) Να αποδείξετε ότι : **α)** $\sqrt{\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}} + \sqrt{\frac{2-\sqrt{3}}{2+\sqrt{3}}} = 4$, **β)** $\sqrt{\frac{3-\sqrt{5}}{3+\sqrt{5}}} + \sqrt{\frac{\sqrt{5}-1}{\sqrt{5}+1}} = 1$, **γ)** $\frac{\sqrt[4]{17-12\sqrt{2}}}{\sqrt{2}-1} = 1$.

12) Να αποδείξετε ότι : $\sqrt{\left(3\sqrt{2+\sqrt{2}}+4\sqrt{2-\sqrt{2}}\right)^2 + \left(3\sqrt{2-\sqrt{2}}-4\sqrt{2+\sqrt{2}}\right)^2} = 10$.

13) α) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\sqrt{2026+2026 \cdot 2025}$ είναι φυσικός.

β) Να αποδείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = \sqrt{63} - 7\sqrt{3} + \sqrt{147} - 2\sqrt{7} - \frac{7}{\sqrt{7}}$ είναι ακέραιος.

14) Να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = \sqrt{28+10\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{7+4\sqrt{3}}}$

15) Να δείξετε ότι: $\frac{\sqrt{98}+\sqrt{162}}{\sqrt{50}-\sqrt{32}} \cdot \sqrt{\frac{9^{12}+3^{20}}{9^{11}+27^6}} = 48$

16) Δίνονται οι αριθμοί $A = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{1821} \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{1821}$ και $B = (\sqrt{2}+1)^3 - (\sqrt{2}-1)^3$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης : $\Gamma = \frac{1}{A-\sqrt{B}} - \frac{1}{A+\sqrt{B}}$

17) Δίνεται ο αριθμός : $\alpha = \sqrt{7-4\sqrt{3}} - \sqrt{7+4\sqrt{3}}$.

α) Να υπολογίσετε τους αριθμούς **i)** $\beta = \sqrt{7-4\sqrt{3}} \cdot \sqrt{7+4\sqrt{3}}$, **ii)** α^2 , **iii)** $\gamma = (1+\alpha+2\sqrt{3})^{1940}$

β) Να δείξετε ότι: $\left(\sqrt{7-4\sqrt{3}}\right)^{2004} + \left(\sqrt{7+4\sqrt{3}}\right)^{2004} \geq 2$

18) Δίνονται οι παραστάσεις: $A = \left[(7+4\sqrt{3})^8 + \frac{1}{(7-4\sqrt{3})^8} \right] \cdot \frac{(14-8\sqrt{3})^8}{2^9}$ και

$$B = \left[(\sqrt{3}+\sqrt{2})^{15} + \frac{1}{(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{15}} \right] \cdot \frac{(2\sqrt{3}-2\sqrt{2})^{15}}{2^{16}} . \quad \text{Να δείξετε ότι } A = B$$