



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: «Συναρτήσεις»

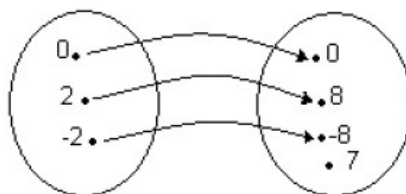
Η έννοια της συνάρτησης

1. Έστω η συνάρτηση f που παριστάνεται με το παρακάτω βελλοδιάγραμμα. Να βρείτε :

α. Το πεδίο ορισμού της f .

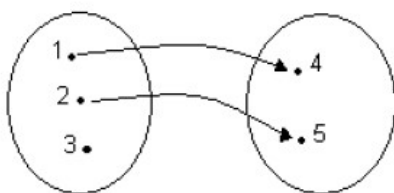
β. Τα $f(0)$, $f(2)$.

γ. Το σύνολο τιμών της f .

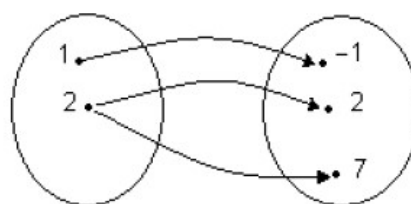


2. Να εξετάσετε ποια από τα παρακάτω βελλοδιαγράμματα παριστάνουν συνάρτηση:

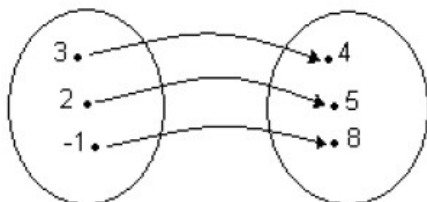
α.



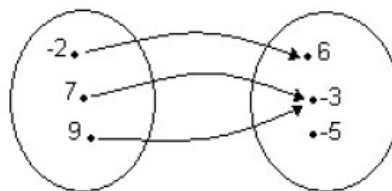
β.



γ.



δ.



3. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x^2 - x - 1$. Να υπολογίσετε τα : $f(0)$, $f(1)$, $f(1 - \sqrt{2})$, $f(x-2)$, $f(3x^2)$, $f(-x)$, $f(f(1))$.

4. Αν $f(x) = x^2 - 2x$, να βρείτε τις τιμές: α. $f(-\frac{1}{2})$ β. $f(x^2)$ γ. $f(2x)$ δ. $f(1+x) - f(1-x)$

5. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 1$.

α. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις : i. $\frac{f(3) - f(-1)}{4}$ ii. $\frac{f(2+h) - f(2)}{h}$

β. Να λυθεί η εξίσωση $x^6 f(1) - f(30) = f(3)$.

γ. Να βρείτε το a ώστε $f(a^2) = 2$.

6. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x+1}{3}$. Να λυθεί η εξίσωση

$$3[f(x) + 2] + 2[f(-x) + 1] = 12f(x) - 2.$$



7. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^2 - 1$. Να βρείτε το λ ώστε : **α.** $f(\lambda - 1) = 3$ **β.** $f(2) = 3\lambda - 5$

8. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x^3 - 2x$. Να λύσετε: **α.** την εξίσωση $f(x) = 0$.

β. την εξίσωση $f(x-1) - f(x) = 1$.

γ. την ανίσωση $f(2x) - 8f(x) < x^2$ στο $(0, +\infty)$.

9. Αν $f(x) = ax^2 + \beta$, να βρείτε τα a και β ώστε να ισχύει $f(-2) = 7$ και $f(3) = -3$.

10. Αν $f(x) = a|x-2| + \beta|x+1|$, να βρείτε τα a και β ώστε να ισχύει $f(0) = 0$ και $f(-1) = 6$.

11. Αν $f(x) = \begin{cases} 3x^2 - 1, & x \geq 1 \\ \frac{2}{x-1}, & x < 1 \end{cases}$, να βρείτε τις τιμές $f(0)$, $f(1)$, $f(-2)$.

Στην συνέχεια να λυθεί η εξίσωση $f(x) = 2$.

12. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3x-1, & x \in (-\infty, 2) \\ 2, & x \in [2, 5) \\ x^2-1, & x \in [5, 10) \end{cases}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να βρείτε αν υπάρχουν τα $f(-1)$, $f(5+\sqrt{2})$, $f(3)$, $f(12)$.

γ. Να λύσετε την εξίσωση $x^{f(2)} + 3f(0) = 0$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 1+x^2, & x \leq 0 \\ 1-x^2, & x > 0 \end{cases}$.

α. Υπολογίστε τους αριθμούς $f(0)$, $f(1)$, $f(-1)$.

β. Αν ισχύει $2f(-1) + af(2) = a^2 f(0)$, να προσδιορίσετε τον a .

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x, & |x| \leq 1 \\ \frac{1}{x}, & |x| > 1 \end{cases}$. Να βρείτε τους αριθμούς

$$f\left(\frac{1}{2}\right), f(-2), f(-\sqrt{2}), f\left(\frac{\pi}{4}\right), f(1).$$



15. Αν είναι συνάρτηση η $f(x) = \begin{cases} ax^2 & , x \leq 1 \\ 3ax - 2 & , x \geq 1 \end{cases}$, να βρείτε :

α. το a , **β.** τον τύπο της f , **γ.** τα $f(\sqrt{5}-1)$, $f\left(\frac{1}{\sqrt{5}-1}\right)$,

δ. να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 4$

16. Αν $f(x) = \begin{cases} ax - 1 & , x \leq 0 \\ \beta - 2x^2 & , x > 0 \end{cases}$, να βρείτε τα a και β ώστε να ισχύει $f(1) = 3$ και $f(-2) = 1$.

Στην συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Sigma = 2f(0) - 3f(1) - 3f(-\frac{1}{2}) + 5f(\frac{1}{2})$.

17. Αν $f(x) = \begin{cases} (x-1)^2 & , x < 0 \\ \lambda x + \beta & , 0 \leq x < 1 \\ \mu x^2 + 3 & , x \geq 1 \end{cases}$, να βρείτε τα λ και μ ώστε να ισχύει $f(-2) = 5 - f(2)$

και $2f(1) = 3f(\frac{1}{2})$.

Στην συνέχεια να βρείτε την τιμή της παράστασης $\Sigma = f(0) + 3f(1) - 3f(-2) + 2f(\frac{1}{2})$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{ax}{2} - 1 & , x \leq 1 \\ ax^4 - \beta & , x > 1 \end{cases}$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .

β. Να βρείτε τα a και β ώστε $f(0) + f(1) = 0$ και $f(2) = 64$.

γ. Για $a = 4$ και $\beta = 0$ να λύσετε την εξίσωση $|f(-1) - x| = f\left(\frac{3}{2}\right)$.

19. Έστω η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} 3ax + 1 & , x \leq -1 \\ \beta x^3 + \sqrt{x+2} & , x \geq -1 \end{cases}$. Αν $f(2) = 10$, να βρείτε τα a και β .

20. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \frac{x+1}{x^2-3x+2}$

β. $f(x) = \frac{x}{|x|-1}$

γ. $f(x) = \frac{x^{20} + x^{19}}{x + x^3}$

δ. $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

ε. $f(x) = \frac{x^2-9}{x-3}$

στ. $f(x) = \frac{1-2x}{x^3-4x}$

ζ. $f(x) = \frac{x-3|x|}{x^2-2x+1}$

η. $f(x) = \frac{1-|x|}{1+|x|}$

θ. $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$



21. Να βρεθεί το πεδίο ορισμού των παρακάτω συναρτήσεων:

α. $f(x) = \sqrt{x-1}$ **β.** $f(x) = 2\sqrt{x+3}$ **γ.** $f(x) = \sqrt{x^2-1}$

δ. $f(x) = \sqrt[3]{x} - \frac{1}{\sqrt{2x-1}}$ **ε.** $f(x) = \frac{2x}{\sqrt{1+x} - \sqrt{1-x}}$ **στ.** $f(x) = \frac{\sqrt{1-2x}}{\sqrt{x-4}}$

22. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-4}{|x|-2}$.

- α.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . **β.** Να απλοποιηθεί ο τύπος της f .
γ. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 3$.

23. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|x|}{x^2-2|x|}$.

- α.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . **β.** Να απλοποιηθεί ο τύπος της f .
γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = -\frac{1}{2}$. **δ.** Να βρείτε το $f(-\sqrt{3})$ με ρητό παρονομαστή.

24. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2-2|x|+1}{x^2-1}$.

- α.** Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f . **β.** Να δείξετε ότι $f(x) = \frac{|x|-1}{|x|+1}$.
γ. Να λυθεί η εξίσωση $f(x) = \frac{1}{3}$. **δ.** Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 2^{-1}$.

25. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{x-2} & , x < 2 \\ x^2-3 & , x \geq 2 \end{cases}$.

- α.** Να βρείτε το $f(\sqrt{3})$ και να το γράψετε με ρητό παρονομαστή.
β. Να βρείτε το $f\left(a + \frac{1}{a}\right)$, $a > 0$. **γ.** Αν $f(f(2)) = \lambda^5$, τότε να βρείτε το λ .
δ. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) < 2^{-1}$.

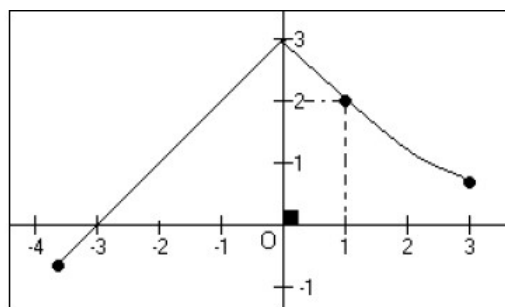
26. Δίνεται ορθογώνιο παραλληλόγραμμο του οποίου οι πλευρές διαφέρουν κατά 2 μονάδες.

- α.** Να εκφράσετε συναρτήσει του x τις πλευρές του και κατόπιν την περίμετρο και το εμβαδόν του.
β. Να βρείτε τις τιμές του x ώστε η περίμετρος να είναι τουλάχιστον 32.



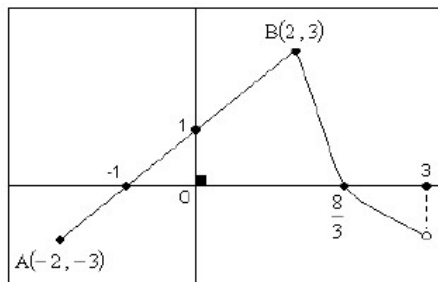
Καρτεσιανές συντεταγμένες - Η γραφική παράσταση συνάρτησης

1. Αν το σημείο $A(3x-2, 1-5x)$ βρίσκεται στο 3^ο τεταρτημόριο να βρείτε τις τιμές του x .
2. Να βρείτε το λ ώστε το σημείο :
 - α. $A(\lambda-1, \lambda-3)$, να ανήκει στον άξονα $x'x$.
 - β. $B(\lambda^2-1, \lambda)$, να βρίσκεται στον ημιάξονα Oy' .
 - γ. $\Gamma(2\lambda, \lambda-1)$, να βρίσκεται στο 4^ο τεταρτημόριο.
3. Να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(-3, 2)$ ως προς :
 - α. τον άξονα $y'y$.
 - β. την διχοτόμο της 1^{ης} και 3^{ης} γωνίας των αξόνων.
 - γ. τον άξονα $x'x$.
 - δ. Την αρχή των αξόνων.
4. Να βρείτε τις αποστάσεις των σημείων:
 - α. $M(-2, 0)$, $K(1, -3)$
 - β. $M(6, 1)$, $K(6, 2)$
 - γ. $M(3, -2)$, $K(-3, -2)$
 - δ. $M(1, 2)$, $O(0, 0)$
5. Να αποδείξετε ότι το τρίγωνο $AB\Gamma$ με $A(-1, -3)$, $B(1, -1)$, $\Gamma(-1, -1)$ είναι ορθογώνιο και ισοσκελές.
6. Σε ένα ορθοκανονικό σύστημα συντεταγμένων να σημειώσετε τα σημεία $A(1, 3)$, $B(1, -3)$, $\Gamma(-1, -3)$ και $\Delta(-1, 3)$. Να βρείτε το είδος του τετραπλεύρου που σχηματίζεται και να υπολογίσετε την περίμετρο του.
7. Αν $A(4, 0)$, $B(0, x)$, $x < 0$ και $(AB) = 5$, να βρείτε το x και το εμβαδόν του τριγώνου OAB .
8. Έστω το σημείο $M(-2, 0)$. Να βρείτε σημείο A του ημιάξονα Oy' , ώστε :
 - α. Το τρίγωνο OAM να είναι ισοσκελές.
 - β. Το εμβαδόν του τριγώνου OAM να είναι 4.
 - γ. $(AM) = 3$.
9. Να αποδείξετε ότι τα σημεία $A(-2, 4)$, $B(3, -1)$, $\Gamma(-7, 9)$ είναι κορυφές ισοσκελούς τριγώνου.
10. Να βρείτε το x , ώστε το τρίγωνο με κορυφές $A(-3, 2)$, $B(x, 1)$ και $\Gamma(5, 0)$, να είναι ορθογώνιο στο B .
11. Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε τα $f(1)$, $f(0)$, $f(-3)$.





12. Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f . Να βρείτε :



- α. τα $f(0)$, $f(-1)$, $f(-2)$,
- β. το πεδίο ορισμού της f ,
- γ. το σύνολο τιμών της f ,
- δ. τις ρίζες της εξίσωσης $f(x) = 0$,
- ε. τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται :
 - i. πάνω από τον άξονα $x'x$
 - ii. κάτω από τον άξονα $x'x$.

13. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{\sqrt{3x-2}}{x-2}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f .
- β. Να βρείτε τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες.

14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = |x| - 2$. Να βρείτε:

- α. το πεδίο ορισμού της f ,
- β. τα σημεία τομής της C_f με τους άξονες,
- γ. τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται :
 - i. πάνω από τον άξονα $x'x$
 - ii. κάτω από τον άξονα $x'x$.

15. Έστω οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ με $f(x) = 3x - 1$ και $g(x) = x - 5$. Να βρείτε :

- α. τα κοινά σημεία των C_f και C_g ,
- β. τα διαστήματα του x που η C_f βρίσκεται :
 - i. πάνω από την C_g
 - ii. κάτω από την C_g .

16. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = ax^3 - (a+1)x^2 - \beta x - 2$. Αν η C_f διέρχεται από τα σημεία $A(1, -2)$ και $B(-1, 3)$, να βρείτε τα a και β καθώς και τον τύπο της f .

17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 - a & , x \leq 1 \\ \frac{a}{x-1} + \beta x & , x > 1 \end{cases}$.

Αν η γραφική παράσταση της f διέρχεται από τα σημεία $A(-1, 0)$ και $B(2, 5)$, να βρείτε :

- α. τα a και β ,
- β. την συνάρτηση f ,
- γ. την απόσταση των σημείων $\Gamma(0, \kappa)$, $\Delta(2, \lambda)$, όταν $\Gamma, \Delta \in C_f$.

18. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} \frac{ax-4}{x} & , x < 0 \\ \beta - 1 + a\sqrt{x} & , x \geq 0 \end{cases}$. Αν η γραφική

παράσταση της f τέμνει τον άξονα $x'x$ στο -2 και τον άξονα $y'y$ στο 3 , να βρείτε :

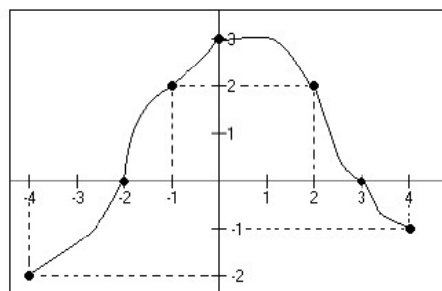
- α. τα a και β ,
- β. την συνάρτηση f ,
- γ. το λ ώστε το σημείο $A(\lambda^2, -2)$ να είναι σημείο της C_f .



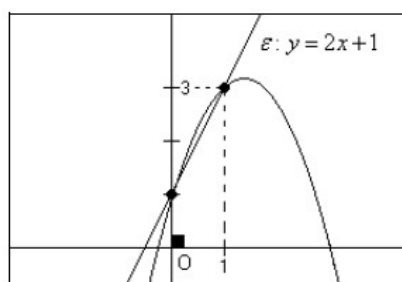
Συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$

1. Αν οι ευθείες $\varepsilon_1: y = \frac{\lambda^2 + 3}{2}x + \lambda - 1$ και $\varepsilon_2: y = 2x$ είναι παράλληλες, να βρείτε το λ .
2. Δίνονται οι ευθείες $\varepsilon_1: y = 3(2 - |\lambda|)x + 2$ και $\varepsilon_2: y = (\lambda^2 + 2)x - 5$.
Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες ε_1 και ε_2 να είναι παράλληλες.
3. Να βρείτε το λ ώστε η ευθεία $\eta: y = (|\lambda| - 2)x + \lambda - 2$ να είναι παράλληλη στον άξονα $x'x$.
4. Να βρείτε την ευθεία που τέμνει τον άξονα $x'x$ στο 2 και έχει συντελεστή διεύθυνσης -3 .
5. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = x - \lambda$ τέμνει τους άξονες $x'x$ και $y'y$ στα σημεία A και B αντίστοιχα ώστε $(AB) = 1$, να βρείτε
 - α. το λ ,
 - β. το εμβαδόν του τριγώνου που σχηματίζει η ευθεία με τους άξονες.
6. Αν η ευθεία $\varepsilon: y = x + \lambda$ σχηματίζει με τους άξονες τρίγωνο με εμβαδόν 4, να βρείτε την ευθεία ε .

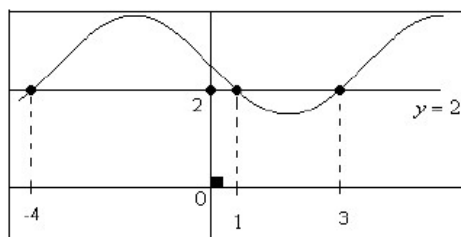
7. Στο διπλανό σχήμα είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f .
 - α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f .
 - β. Να λύσετε :
 - i. την εξίσωση $f(x) = 0$
 - ii. την εξίσωση $f(x) = 2$
 - iii. την ανίσωση $f(x) > 0$
 - iv. την ανίσωση $f(x) \leq 2$



8. Στο διπλανό σχήμα στο ίδιο σύστημα αξόνων είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και η ευθεία $\varepsilon: y = 2x + 1$.
 - α. Να βρείτε τα $f(1)$, $f(1)$.
 - β. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = 2x + 1$.
 - γ. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) > 2x + 1$.

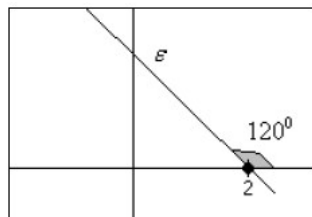


9. Στο διπλανό σχήμα στο ίδιο σύστημα αξόνων είναι η γραφική παράσταση μιας συνάρτησης f και η ευθεία $\varepsilon: y = 2$.
Να λύσετε :
 - α. την εξίσωση $f(x) = 2$,
 - β. την ανίσωση $f(x) - 2 < 0$.

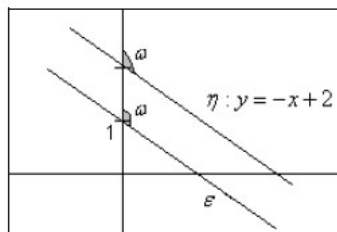




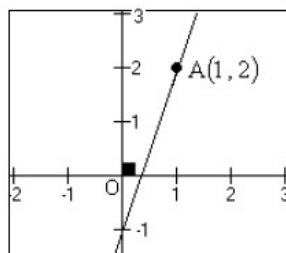
10. Να βρείτε την ευθεία ε του σχήματος .



11. Να βρείτε την ευθεία ε του σχήματος.



12. Να βρείτε την ευθεία ε του σχήματος .



13. Να βρείτε την ευθεία ε που διέρχεται από την αρχή των αξόνων και
 α. σχηματίζει με τον άξονα $x'x$ γωνία 150° ,
 β. από το σημείο $(4, 4)$. Μετά να βρείτε το συμμετρικό του σημείου $M(1, 2)$ ως προς την ευθεία ε .

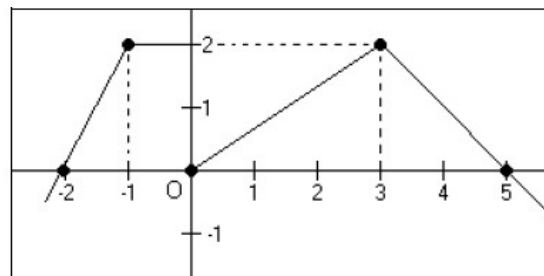
14. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = x + \sqrt{x^2 - 4x + 4}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
 γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της f . δ. Να βρείτε το σύνολο τιμών της f .
 ε. Να λυθεί η ανίσωση $f(x) > 2$.

15. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{|3x-6|}{x-2}$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . β. Να απλοποιήσετε τον τύπο της f .
 γ. Να γίνει η γραφική παράσταση της f .

16. Να βρείτε την συνάρτηση f που έχει γραφική παράσταση στο παρακάτω σχήμα .



17. Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2 - 3x}{x - 3} + ax - \beta$.

- α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της f . β. Να βρείτε τα a , β ώστε η f να είναι σταθερή με τιμή 2 .

18. Έστω η συνάρτηση $f(x) = (a-1)x + \beta$. Να βρείτε τα a , β ώστε η f να είναι σταθερή με τιμή 3 .