



ΦΥΛΛΑ ΕΡΓΑΣΙΑΣ
ΕΝΟΤΗΤΑ : «ΑΠΟΛΥΤΑ - ΡΙΖΕΣ»

ΑΠΟΛΥΤΑ

1. Να απλοποιηθεί η παράσταση : $A = \frac{|2x-1|}{|1-2x|} - 3 \frac{|3y+2|}{|-2-3y|} + 2 \frac{|x-y-z|}{|y-x+z|}$
2. Αν $x \leq 1$, να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές, την παράσταση: $A = |x-3| - 2|x-1| + |2-x|$
3. Αν $x < 2$, να γράψετε χωρίς τις απόλυτες τιμές, την παράσταση: $A = |x-2| - 2|3-x| + |x-4|$
4. Αν $-1 < x < 2$ να απλοποιηθεί η παράσταση $A = |x-2| + |x+1| + |3-x|$.
5. Δίνεται η παράσταση: $A = |x-1| + |y-3|$, με x, y πραγματικούς αριθμούς, για τους οποίους ισχύει:
 $1 < x < 4$ και $2 < y < 3$. Να αποδείξετε ότι: α) $A = x - y + 2$ β) $0 < A < 4$.
6. Αν $x \in [1, 2)$, να αποδείξετε ότι: $3 < |x| - |x-1| + 2|3-x| \leq 5$.
7. Δίνεται πραγματικός αριθμός x για τον οποίο ισχύει: $|x-2| < 3$
α) Να αποδείξετε ότι: $-1 < x < 5$. β) Να απλοποιήσετε την παράσταση: $K = \frac{|x+1| + |x-5|}{3}$
8. Για τον πραγματικό αριθμό x ισχύει: $d(2x, 3) = 3 - 2x$
α) Να αποδείξετε ότι $x \leq \frac{3}{2}$.
β) Αν $x \leq \frac{3}{2}$, να αποδείξετε ότι η παράσταση: $K = |2x-3| - 2|3-x|$ είναι ανεξάρτητη του x .
9. Αν $\alpha < 1 < \beta$ να αποδείξετε ότι: α) $|1-\alpha| + |1-\beta| = |\alpha-\beta|$ β) $|\alpha-2| + |\beta| - |\alpha-\beta| = 2$
10. Αν $\alpha < x < \beta$ να δείξετε ότι $\| \alpha - x \| + \| \beta - x \| = \beta - \alpha$.
11. Δίνεται η παράσταση $A = |x-2|$, $x \in \mathbb{R}$.
α) Να υπολογίσετε τη τιμή της παράστασης $\Pi = A + |4-2x| - |3x-6|$.
β) Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x, y για τους οποίους ισχύει:
$$10x^2 + 2y^2 + |x-2| = (x+y)^2 + 4xy$$

γ) Αν $x < 1$, να αποδείξετε ότι η παράσταση $B = |x-1| - A$ έχει σταθερή τιμή.
δ) Να απλοποιήσετε τη παράσταση: $\frac{A + 5(x-2)^2}{5A+1}$.
ε) Να αποδείξετε ότι $A + |5-x| \geq 3$.
στ) Αν $x < 1 < y$ να αποδείξετε ότι: $A + |y| = 2 + |x-y|$.



12. Δίνεται η παράσταση $A = |x-1| - 1$.

α) Να αποδείξετε ότι $A \leq |x|$ β) Να αποδείξετε ότι $A \geq -x$

γ) Να γράψετε την παράσταση A χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

δ) Να γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής την παράσταση $|A+x| - |1-x|$

ε) Να βρείτε τα $x, y \in \mathbb{R}$ για τα οποία ισχύει ότι $x^2 + A + y^2 = 2xy - 1$

στ) Να αποδείξετε ότι $A + |3-x| \geq 1$

ζ) Να αποδείξετε ότι για κάθε $x \neq 0$ και $x \neq 1$ ισχύει $\frac{x-1}{A+1} + \frac{x}{|x|} \leq 2$

13. Αν $\left| \frac{\alpha + 25}{\alpha + 1} \right| = 5$ τότε $|\alpha| = 5$.

14. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ με $\alpha + \beta \neq 0$, να αποδείξετε ότι $\left| \frac{\alpha}{\alpha + \beta} \right| + \left| \frac{\beta}{\alpha + \beta} \right| \geq 1$

15. Αν $x, y \in \mathbb{R}$ και $d(2x, 3y) = 3y - 2x$, τότε $y \geq \frac{2x}{3}$.

16. Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί α , για τους οποίους ισχύει:

α) $|\alpha - 5| < |\alpha + 2|$ β) $d(\alpha, -4) > d(5, \alpha)$

17. Να βρείτε τους $x \in \mathbb{R}$, για τους οποίους ισχύει: α) $\frac{|x-6|}{|4-x|} < 1$ β) $\frac{d(2x, -3)}{d(1, 2x)} \geq 1$

18. Να αποδείξετε ότι: $|\alpha^2 + 4\alpha + 5| - 3 = |2\alpha - \alpha^2 - 2| + 6\alpha$.

19. Αν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, να αποδείξετε ότι: $\alpha^2 |\alpha| - \beta^2 |\beta| = (|\alpha| - |\beta|)(\alpha^2 + |\alpha\beta| + \beta^2)$.

20. Να αποδείξετε ότι: α) $\frac{(x+2)^2}{|x+2|} + \frac{(1-x)^2}{|1-x|} \geq 3$ με $x \neq 1$ και $x \neq -2$

β) $\frac{4\alpha^2 - 4\alpha + 1}{|2\alpha - 1|} + \frac{4\alpha^2 + 4\alpha + 1}{|2\alpha + 1|} \geq 2$ με $\alpha \neq \frac{1}{2}$ και $\alpha \neq -\frac{1}{2}$

21. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α, β , για τους οποίους ισχύει η σχέση: $|\alpha + 3| \leq 2\beta - 1 - \beta^2$

22. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς x , για τους οποίους ισχύει η σχέση: $|x^2 - 2x| \leq 4x - x^2 - 4$



ΡΙΖΕΣ

1. α) Αν $\alpha = \sqrt{3} + 1$ και $\beta = \sqrt{3} - 1$ να αποδείξετε ότι $\alpha^2 + \beta^2 = 8$ και $\alpha^3 - \beta^3 = 20$.

β) Να γίνουν οι πράξεις $\Gamma = \sqrt{27} - 2\sqrt{75} + 3\sqrt{48} - 3\sqrt{12} + \sqrt{(1-3)^2}$.

2. Αν $1 \leq x \leq 2$ να βρείτε την τιμή της παράστασης: $A = \sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(x-2)^2}$.

3. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = \frac{2\sqrt{18} - 3\sqrt{24}}{\sqrt{2}}$ $B = \frac{3\sqrt{12} + 8 + \sqrt{20} - 2\sqrt{8}}{3\sqrt{27} + \sqrt{45} - 2\sqrt{18} + 12}$

$$\Gamma = (\sqrt{32} + \sqrt{45} - \sqrt{98})(\sqrt{72} + \sqrt{80} - \sqrt{8}) \quad \Delta = (\sqrt{112} - \sqrt{7} + \sqrt{48})(\sqrt{63} - \sqrt{48})$$

4. Αν $\alpha = \frac{\sqrt{5} - \sqrt{3}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}}$ και $\beta = \frac{\sqrt{5} + \sqrt{3}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}}$, να βρείτε την τιμή των παραστάσεων:

$$A = \alpha^2 - 3\alpha\beta + \beta^2 + 3 \quad \text{και} \quad B = \frac{\alpha + \beta}{1 + \alpha\beta}$$

5. Να αποδείξετε ότι: α) $\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} - \sqrt{2}} - \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 5$ β) $(\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} - \sqrt{3}})^2 + (\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{5} + \sqrt{3}})^2 = 8$

6. Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις: $A = \sqrt{4 - 2\sqrt{3}} + \sqrt{4 + 2\sqrt{3}}$
 $B = \sqrt{3 - 2\sqrt{2}} + \sqrt{5 - 2\sqrt{6}} + \sqrt{19 + 2\sqrt{48}}$

7. Αν $x^2 = \sqrt{3} - 1$ και $\psi = \sqrt{3} + 1$ να υπολογιστεί η τιμή της παράστασης: $A = 2x^4\psi^2 + 2\sqrt{2}x^2\psi$.

8. Να βρείτε τα παρακάτω εξαγόμενα: i) $\sqrt{50} + \sqrt{32} - \sqrt{18}$, ii) $4\sqrt{63} + 5\sqrt{7} - 8\sqrt{28}$,
iii) $(4 + \sqrt{6})(3\sqrt{2} - 5\sqrt{3})$ iv) $(2\sqrt{10} - \sqrt{5})(2\sqrt{2} + 1)$ v) $\sqrt{32} - 5\sqrt{18} + 7\sqrt{8} - 2\sqrt{50}$.

9. Να απλοποιηθούν οι παραστάσεις: α) $\sqrt{4a^2\beta} + 6\sqrt{a^2\beta} - 7a\sqrt{\beta}$, $\beta \geq 0$ β) $\sqrt{(x-1)^2} + \sqrt{(1+x)^2}$

$$\gamma) \frac{\sqrt{x^4} - \sqrt{x^2}}{x^2 - x} + \frac{x+1}{\sqrt{x^2} + 1}, x \neq 0, 1. \quad \delta) \frac{\sqrt{4x^2 + 4x + 1}}{2x+1} + \frac{\sqrt{9x^2}}{3x} - \frac{1}{2}, x \neq 0, -\frac{1}{2}.$$

10. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: α) $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt{2 + \sqrt{2}}$ β) $\sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{2 - \sqrt{2}} \cdot \sqrt[3]{2 + \sqrt{2}}$

$$\gamma) \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3 - \sqrt{5}} \cdot \sqrt[3]{3 + \sqrt{5}} \quad \delta) \sqrt[3]{3} \cdot \sqrt[3]{4 - \sqrt{7}} \cdot \sqrt[3]{4 + \sqrt{7}}.$$

11. Να βρεθεί η τιμή της παράστασης: $A = \sqrt{\frac{(1+2\sqrt{2})^2}{4}} + \sqrt{\frac{(1-2\sqrt{2})^2}{4}}$.

12. Να τραπούν σε ισοδύναμα με ρητό παρανομαστή τα παρακάτω κλάσματα:

$$\alpha) \frac{5\sqrt{3} - 4\sqrt{2}}{2\sqrt{3} + 7\sqrt{2}} \quad \beta) \frac{1}{\sqrt{5} + \sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5} - \sqrt{3}} \quad \gamma) \frac{x - \sqrt{x^2 - 4}}{x + \sqrt{x^2 - 9}} \quad \delta) \frac{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2} + \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}} \quad \varepsilon) \frac{\sqrt{3}}{(2 - \sqrt{3})^2} + \frac{\sqrt{3}}{(2 + \sqrt{3})^2}$$



13. α) Να δειχθεί ότι: $\sqrt{1+\sqrt{\frac{3}{4}}} - \sqrt{1-\sqrt{\frac{3}{4}}} = 1$.

β) Να δειχθεί ότι η παράσταση: $A = \sqrt[3]{6 + \sqrt{\frac{847}{27}}} + \sqrt[3]{6 - \sqrt{\frac{847}{27}}}$ είναι ρητός αριθμός.

14. 1. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $\sqrt{12\sqrt{3}\sqrt{\sqrt{7}-2}\sqrt{\sqrt{7}+2}}$

2. Αν $0 < x < 1$ να δείξετε ότι:
$$\frac{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} - \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}}{\sqrt{\frac{1+x}{1-x}} + \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}} = x$$

3. Να αποδείξετε ότι: $(1-\sqrt{2})^{-3} + (1+\sqrt{2})^{-3} = -14$

4. Να βρείτε το εξαγόμενο. $(\sqrt[3]{81} - \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{24})(\sqrt[3]{9} + \sqrt[3]{6} + \sqrt[3]{4})$

5. Αν $x > 4$ να μετασχηματίσετε την παράσταση A σε ισοδύναμη με ρητό παρονομαστή.

$$A = \frac{(x-4)^2}{x-4\sqrt{x}+4}$$

6. Για ποιες τιμές του πραγματικού αριθμού x η παράσταση είναι ανεξάρτητη του x.

$$A = \sqrt{x+2\sqrt{x-1}} + \sqrt{x-2\sqrt{x+1}}$$

15. Αν είναι $\sqrt{\alpha^2 - 2\alpha + 5} + \sqrt{\beta^2 - 6\beta + 10} = 3$ να αποδείξετε ότι $\alpha=1$ και $\beta=3$.

16. α) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\alpha = \sqrt{5}$ και $\beta = \sqrt{3} + \sqrt{2}$

β) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{5}-2$ και $3-\sqrt{10}$.

γ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt{6} + \sqrt{2}$ και $2 + \sqrt{3}$.

δ) Να συγκρίνετε τους αριθμούς $\sqrt[6]{6}$ και $\sqrt[4]{4}$.

17. Να υπολογίσετε τις παραστάσεις: α) $\sqrt[7]{\alpha^3} \cdot \sqrt[7]{\alpha^4}$, β) $\sqrt[8]{\alpha^3} \cdot \sqrt[8]{\alpha^5}$, γ) $\sqrt[3]{\alpha^8} \cdot \sqrt[3]{\alpha^{-5}}$,

δ) $\frac{\sqrt[5]{\alpha^9}}{\sqrt[5]{\alpha^4}}$, ε) $\sqrt[4]{2} \cdot \sqrt[4]{6-\sqrt{4}} \cdot \sqrt[4]{6+\sqrt{4}}$, στ) $\sqrt{7} \cdot \sqrt{3-\sqrt{2}} \cdot \sqrt{3+\sqrt{2}}$,

18. Να γίνουν οι πράξεις: α) $\sqrt{3} \cdot \sqrt[3]{9} \cdot \sqrt[4]{27}$ β) $\sqrt[12]{\alpha^7} : \sqrt[3]{\alpha}$ γ) $\sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[4]{\alpha}$.

19. Να βρείτε τις τιμές των x, y αν $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[5]{6-2y} = 0$.

20. Δίνονται οι αριθμοί $A = (\sqrt{3}-\sqrt{2})^{2020} \cdot (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{2020}$ και $B = (\sqrt{2}+1)^3 - (\sqrt{2}-1)^3$

Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $\Gamma = \frac{1}{A-\sqrt{B}} - \frac{1}{A+\sqrt{B}}$.