



ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΟΤΗΤΑ: ΔΙΑΤΑΞΗ - ΑΠΟΛΥΤΗ ΤΙΜΗ - ΡΙΖΕΣ

ΟΜΑΔΑ Β

1. Αν $d(x, 3) < 2$, να απλοποιηθεί η παράσταση: $A = 3 \cdot |x - 1| - |x - 5| + 2 \cdot |11 - 2x|$.

2. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = \sqrt{\frac{9^5 + 27^2}{9^4 + 81}}$ είναι ρητός.

3. Αν $\alpha \geq 2$, να δείξετε ότι: $\alpha\beta^2 - 8 \geq 2 \cdot (\beta^2 - 2\alpha)$.

4. α. Να απλοποιηθεί η παράσταση: $M = \sqrt{(x - |x|)^2} - \sqrt{(x + |x|)^2}$.

β. Αν $M = -2x$ και $|M + 1| < 3$ να δείξετε ότι, η παράσταση: $K = \sqrt{x^2 - 4x + 4} + \sqrt{x^2 + 2x + 1}$ είναι σταθερή.

5. Αν $\alpha = \sqrt{2} - 1$ και $\beta = \sqrt{2} + 1$, να υπολογίσετε τις παραστάσεις: $\alpha \cdot \beta$, $\alpha^2 + \beta^2$, $\alpha^3 - \beta^3$.

6. Α. Να δείξετε ότι: $(2\sqrt{2} + 3)^2 = 17 + 12\sqrt{2}$ και $(2\sqrt{2} - 3)^2 = 17 - 12\sqrt{2}$.

Β. Να υπολογίσετε τον αριθμό: $w = \sqrt{17 - 12\sqrt{2}} + \sqrt{17 + 12\sqrt{2}}$.

7. Στην ευθεία των πραγματικών αριθμών τα σημεία Α και Β έχουν τετμημένες 4 και -2 αντίστοιχα. Ένα σημείο Μ το οποίο έχει τετμημένη x βρίσκεται ανάμεσα στα Β και Α. Να υπολογίσετε γεωμετρικά και αλγεβρικά την τιμή της παράστασης:

$$\Sigma = |x + 2| + |x - 4|$$

8. Αν οι αριθμοί $\alpha, \beta \neq 0$ είναι ετερόσημοι, να δείξετε ότι: $\frac{2 - \alpha}{\beta} \geq \frac{\beta + 2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha\beta}$

9. Αν $\alpha = \sqrt{12} - \sqrt{18}$, $\beta = \sqrt{50} + \sqrt{48}$ και $\gamma = \sqrt{8} + \sqrt{108}$, να δείξετε ότι: $\alpha + \beta = \gamma$.

10. Αν $\alpha = \frac{2}{\sqrt{3} - 1} - \frac{2}{\sqrt{3} + 1}$, $\beta = (2\sqrt{2} - 3) \cdot (2\sqrt{2} + 3)$ και $\beta < x < \alpha$, να δείξετε ότι η παράσταση

$$A = |x - 2| - |x + 1| + 2 \cdot |3 - x|, \text{ είναι ανεξάρτητη του } x.$$

11. Για τους αριθμούς α και β ισχύει: $\alpha \cdot \beta + 1 > \alpha + \beta > 2$.

Α. Να αποδείξετε ότι: $\alpha > 1$ και $\beta > 1$. Β. Να αποδείξετε ότι: $\frac{1}{\alpha^2} < \frac{1}{\alpha - 1} - \frac{1}{\alpha}$.

Γ. Να συγκρίνετε τους αριθμούς: $x = \beta^3 - 1$ και $y = \beta^2 - \beta$.



12. Για τους αριθμούς α και β ισχύει ότι: $|\alpha + 2\beta| + |3\beta - 3| = |2 - 2\beta|$.

A. Να βρείτε τους αριθμούς α και β .

B. Δίνεται η παράσταση: $\Sigma = -\alpha - \frac{|\beta - x|}{x^2 + \alpha x + \beta}$.

i) Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η παράσταση Σ .

ii) Να απλοποιήσετε την παράσταση Σ και να την γράψετε χωρίς το σύμβολο της απόλυτης τιμής.

13. A. Να δείξετε ότι: $(1 - \sqrt{5})^2 = 6 - \sqrt{20}$.

B. Να δείξετε ότι ο αριθμός $\alpha = \sqrt{2} \cdot (\sqrt{5} - 1) \cdot \sqrt{4 + \sqrt{6 - \sqrt{20}}}$ είναι ρητός.

14. Δίνεται ο αριθμός x με $1 < x < 3$ και η παράσταση: $\Sigma = \sqrt{4x^2 - 25x + 37} + \sqrt{x^2 - 2x + 1}$.

A. Να απλοποιήσετε την παράσταση Σ . B. Να δείξετε ότι: $0 < \Sigma < 4$.

15. A. Να βρείτε τα αναπτύγματα: $(2 + \sqrt{3})^3$ και $(2 - \sqrt{3})^3$.

B. Να βρείτε την τιμή της παράστασης: $K = \frac{1}{\sqrt[3]{26 + 15\sqrt{3}}} + \frac{1}{\sqrt[3]{26 - 15\sqrt{3}}}$.

16. A. Να γράψετε ως μία ρίζα τις επόμενες παραστάσεις:

$$K = \sqrt{\alpha} \cdot \sqrt[3]{\alpha}, \quad \Lambda = \sqrt[3]{\alpha} \cdot \sqrt[6]{\alpha}, \quad M = \sqrt[3]{\sqrt{\alpha}} \cdot \sqrt[9]{\alpha}, \quad N = \sqrt[3]{\sqrt[4]{\alpha}} \cdot \sqrt[4]{\sqrt{\alpha}}$$

B. Αν ισχύει: $x < 0 < y$ και $x \neq -1$, να δείξετε ότι η παράσταση: $Z = \frac{\sqrt{x^6 \cdot y^6} - \sqrt[4]{x^4 \cdot y^{12}}}{\sqrt{x^2 \cdot y^4} - \sqrt[6]{x^{18} \cdot y^{12}}}$ είναι ανεξάρτητη του x .

17. A. Αν $\alpha > 2$, να αποδείξετε ότι: $\frac{\sqrt{\alpha - 1}}{\alpha} < \frac{1}{2}$.

B. Αν $x, y > 2$, να αποδείξετε ότι: $x \cdot \sqrt{y - 1} + y \cdot \sqrt{x - 1} < x \cdot y$

18. A. Αν $\alpha, \beta \geq 0$, να αποδείξετε ότι: $\sqrt{\frac{\alpha + 4\beta}{2}} \geq \frac{\sqrt{\alpha} + 2\sqrt{\beta}}{2}$.

B. Αν $\alpha, \beta > 0$, να αποδείξετε ότι: $\frac{8\alpha\beta}{\alpha + 2\beta} \leq \sqrt{8\alpha\beta} \leq \alpha + 2\beta$.